

Paul Drijvers*Expertisepunt Rekenen-Wiskunde
Universiteit Utrecht
p.drijvers@uu.nl***Anne Heemskerk***Expertisepunt Rekenen-Wiskunde
Universiteit Utrecht
a.g.a.heemskerk@uu.nl***Onderwijs Education**

BLIK OP DE BASIS: BASISVAARDIGHEDEN REKENEN-WISKUNDE IN DE LITERATUUR

In het onderwijsveld, de politiek en de media is veel te doen over prestaties van leerlingen op het gebied van taal en rekenen. De resultaten van internationale vergelijkende studies en nationale peilingsonderzoeken laten te wensen over en lijken een dalende trend te vertonen. Als reactie hierop lanceerde het ministerie van OC&W het Masterplan Basisvaardigheden. Naast taal, burgerschap en digitale geletterdheid is rekenen-wiskunde een van de basisvaardigheden. Maar wat zijn die basisvaardigheden voor rekenen en wiskunde? Hoe wordt daar tegenaan gekeken? Om deze vraag te beantwoorden voerden Anne Heemskerk en Paul Drijvers vanuit het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde [1] een internationale literatuurstudie uit [2]. Hieronder vatten ze de bevindingen samen. Gecijferdheid is in de gevonden literatuur de meestvoorkomende interpretatie van basisvaardigheid rekenen-wiskunde.

De basis, dat klinkt fundamenteel en vaardigheid is natuurlijk ook altijd goed. Het lijkt vanzelfsprekend dat basisvaardigheden belangrijk zijn. Hoewel er discussie is over de vraag in hoeverre de prestaties bij rekenen-wiskunde inderdaad een dalende trend vertonen, verdient de beheersing van basisvaardigheden daarom constante aandacht. Maar wat verstaan we daar eigenlijk onder, als het gaat om rekenen-wiskunde? Daarover zijn de ministeriële stukken niet zo duidelijk. Daarom vroegen we ons af: welke interpretaties van basisvaardigheden rekenen-wiskunde komen we tegen in de internationale onderzoeksliteratuur? Om deze vraag te beantwoorden hebben we een literatuurstudie uitgevoerd. In het kader 'Aanpak van het onderzoek' lees je meer over de manier waarop dit is gedaan.

Overzicht van de gevonden literatuur

Het literatuuronderzoek leidde tot een se-

lectie van 49 artikelen, die we in vier categorieën hebben ingedeeld die elk een verschillende blik op basisvaardigheid bieden:

1. Basisvaardigheden als procedurele operaties

Dit betreft de kijk op basisvaardigheden als procedurele en geautomatiseerde basisbewerkingen. Dit is de opvatting die van oudsher het denken over basisvaardigheden overheerst.

2. *Basisvaardigheden van hogere orde*
Dit betreft de kijk op basisvaardigheden als hogere-orde vaardigheden zoals probleemoplossen, modelleren, interpreteren en redeneren, ingegeven door het idee dat de tegenwoordige tijd vanwege de technologische ontwikkelingen beroep doet op een ander type basisvaardigheden.

3. *Basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis*
Dit betreft de kijk op basisvaardigheden als het samengaan van procedurele en conceptuele kennis, die elkaar nodig hebben en versterken. Daarmee verbindt dit perspectief de eerste twee categorieën met elkaar.

4. *Basisvaardigheden als gecijferdheid*
Dit betreft de kijk op basisvaardigheden als de vaardigheden die burgers nodig hebben om te functioneren in de maatschappij, in het vervolgonderwijs en in

Perspectief	Frequentie
Basisvaardigheden als procedurele operaties	2
Basisvaardigheden van hogere orde	3
Basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis	14
Basisvaardigheden als gecijferdheid	30
Totaal	49

Tabel 1 Aantal artikelen per perspectief

een beroep. Het gaat om procedurele en conceptuele kennis die voorbereidt op de concrete situaties waarin ze kunnen worden toegepast. Hiervoor wordt ook de term wiskundige geletterdheid gebruikt.

Tabel 1 geeft een overzicht van de frequenties per perspectief. Slechts enkele van de gevonden publicaties focussen op basisvaardigheden als procedurele operaties en hetzelfde geldt voor de basisvaardigheden van hogere orde. De nadruk in de gevonden literatuur ligt sterk op gecijferdheid als basisvaardigheid. Dit wordt mede veroorzaakt door de internationale vergelijkende PISA-studies van OECD, die wiskundige geletterdheid nadrukkelijk tot uitgangspunt hebben gekozen. Globaal gesproken zijn de bronnen over procedurele operaties ouder dan die over hogere-orde vaardigheden en over de procedurele en conceptuele kennis. De publicaties over gecijferdheid zijn overwegend van recentere datum. De artikelen komen uit het hele bereik van hoogaangeschreven wetenschappelijke tijdschriften tot praktijkgeïntereerde tijdschriften voor leraren. De geografische herkomst van de publicaties is divers, al zijn de VS sterk vertegenwoordigd.

Basisvaardigheden als procedurele operaties

We lopen deze vier perspectieven langs. In het eerste, meest voor de hand liggende perspectief worden basisvaardigheden wiskunde gezien als de vaardigheden om basisbewerkingen te kunnen uitvoeren zoals optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen. Later in de leerlijn komen daar algebraïsche procedures bij zoals haakjes wegwerken en formules vereenvoudigen. Deze basisbewerkingen moeten vlot, routinematig en geautomatiseerd met pen en papier of uit het hoofd worden beheerst. Ook feitenkennis, bijvoorbeeld het memoriseren van de tafels voor vermenigvuldiging, speelt een rol. In deze optiek zijn basisvaardigheden wiskunde dus de vaardigheid om procedures uit te voeren. Dat vraagt om de nodige oefening.

Opvallend genoeg heeft de literatuurstudie slechts twee artikelen opgeleverd waarin procedurele vaardigheid de hoofdrol speelt, die beide niet recent zijn. De eerste, de studie van Denmark en Kepner [4], betreft een vragenlijstonderzoek onder ruim 1200 wiskundeleraren in de V.S. De centrale vraag was wat deze docenten on-

der basisvaardigheden verstaan. Behalve elementaire rekenoperaties worden hier ook complexere operaties genoemd. Kennelijk was er ook toen al ruimte voor een bredere interpretatie van het begrip basisvaardigheid. Saillant detail is dat 53% van de respondenten stelt dat de leerlingen de basisvaardigheden minder goed beheersen dan vroeger. Dat geluid is dus niet uniek voor de huidige tijd. Het tweede artikel over procedurele kennis (Newport, [10]) is eveneens sceptisch over het niveau van beheersing van basisvaardigheden. Waarom er zo weinig is gepubliceerd over basisvaardigheden als procedurele kennis weten we niet. Is het onderwerp academisch gezien niet interessant? Zijn andere aspecten van basisvaardigheid van groter belang? Mogelijk is de wereldwijde trend om basisvaardigheden in toenemende mate te zien als meeromvattend dan procedurele kennis hier debet aan. Daarom gaan we in de volgende paragraaf nader in op basisvaardigheden van hogere orde.

Basisvaardigheden van hogere orde

Het perspectief van basisvaardigheden van hogere orde gaat ervan uit dat functioneren in samenleving en beroep niet zo zeer vraagt om procedurele vaardigheid, waarvoor we immers digitaal gereedschap hebben, maar eerder om weten wanneer en waarvoor je welke basisbewerkingen kunt gebruiken en wat de resultaten betekenen. Vanuit dit perspectief maken de technologische ontwikkelingen dat het doel van reken-wiskundeonderwijs het hogere-orde denken is. Denk aan vaardigheden zoals probleemoplossen, modelleren, toepassen en abstraheren. Het gaat om kennis die je flexibel kunt inzetten voor taken die het uitvoeren van procedures ontstijgen. In dit perspectief zijn de basisvaardigheden van morgen van hogere orde dan die van gisteren.

In de literatuur zien we dit perspectief onder andere terug in de vorm van competentie modellen. Een van de bekendste is het model van Kilpatrick et al. [8] dat vijf componenten van wiskundige bekwaamheid beschrijft:

Conceptueel inzicht – begrip van wiskundige concepten, operaties en relaties. Een leerling ziet bijvoorbeeld meteen in dat je bij een korting van 20% de oude prijs door 5 moet delen om de korting te berekenen.

Procedurele vlotheid – vaardigheid om procedures flexibel, accuraat, efficiënt en in geschikte situaties uit te voeren. Een leerling kent bijvoorbeeld de tafels voor vermenigvuldigen uit het hoofd en kan een uitdrukking als $3x + 2y - x + 5y$ snel en foutloos herschrijven tot $2x + 7y$.

Strategisch vermogen – competentie om problemen wiskundig te formuleren, te representeren en op te lossen. Een leerling ziet bijvoorbeeld hoe een verhoudingstabel kan worden gebruikt om een recept voor vier personen aan te passen voor zeven personen.

Adaptief redeneren – vermogen tot logisch denken, reflecteren, uitleggen en verantwoorden. Een leerling krijgt 640 m^2 als antwoord bij het berekenen van de oppervlakte van een appartement en realiseert zich dat dat onwaarschijnlijk groot is. Dit is aanleiding om alles toch nog eens na te rekenen.

Productieve dispositie – neiging om wiskunde te zien als betekenisvol, nuttig en waardevol, met een vertrouwen in volharding en eigen doeltreffendheid. De leerling heeft bijvoorbeeld het gevoel dat vaardigheid in rekenen-wiskunde van pas komt en heeft het vertrouwen om een onbekende opgave aan te pakken.

De procedurele basisvaardigheden die in de vorige paragraaf aan de orde zijn gekomen vallen in de tweede component. Nieuw is echter de nadruk op het wiskundig denken van hogere orde in de eerste, derde en vierde component. De vijfde component heeft betrekking op de attitude ten aanzien van rekenen-wiskunde. Kilpatrick en collega's benadrukken dat deze vijf sterk met elkaar verweven zijn. Ze vormen samen de 'strengen van de kabel' van



Figuur 1 Het model voor wiskundige bekwaamheid van Kilpatrick et al. [8]

wiskundige bekwaamheid (zie figuur 1). In de nieuwe concept-kerndoelen en concept-examenprogramma's in Nederland zien we de laatste drie strengen terug als denk-werkwijzen, wiskundige (denk)activiteiten en wiskundige attitude.

Ook in landen zoals Denemarken en Duitsland zien we dergelijke modellen die de inrichting van de wiskundecurricula sturen. Dit perspectief op basisvaardigheden als hogere-orde overstijgende competenties, met probleemoplossen als meest genoemde voorbeeld, zien we in sterkere mate terug in curriculumdocumenten die geen deel uitmaken van het literatuurcorpus. Deze interpretatie van basisvaardigheden wijkt af van de eerste interpretatie van basisoperaties en procedurele vlotheid.

Basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis

Het derde perspectief benadert de relatie tussen procedurele en conceptuele kennis en vaardigheid. In verschillende toonaangevende publicaties (Hiebert & Lefevre [6]; Rittle-Johnson [11]; Star [12]) wordt benadrukt dat de procedurele vaardigheid en conceptuele kennis geen tegenpolen zijn maar elkaar nodig hebben en versterken. Bovendien is het onderscheid soms slecht te maken. Een voorbeeld vinden we bij Kieran [7] (niet in de literatuurselectie). Ze bekritiseert hoe de linker opgave in figuur 2 wordt gelabeld als conceptuele kennis en de rechter als procedurele, terwijl het in beide gevallen gaat om inzicht in de globale structuur van de vergelijkingen.

Uit de literatuur blijkt dus dat procedurele en conceptuele kennis en vaardigheden twee kanten van de medaille van wiskundige competentie zijn. Het is niet *skills versus understanding* maar *skills and understanding*. Procedurele vaardigheid is niet per se oppervlakkig en conceptuele kennis is niet per definitie diep. Over de beste didactische aanpak wat betreft de volgorde, *skills-first* of *concepts-first*, is er geen consensus in de literatuur. Gepleit wordt voor een iteratieve aanpak, waarin

Conceptual Knowledge	Procedural Flexibility
Here are two equations: $98 = 21x$ $98 + 2(x + 1) = 21x + 2(x + 1)$ (a) Look at this pair of equations. Without solving the equations, decide if these equations are equivalent (have the same answer), (b) Explain your reasoning.	$5(x + 3) + 6 = 5(x + 3) + 2x$ $6 = 2x$ (a) What step did the student use to get from the first line to the second line? (b) Do you think that this is a good way to start this problem? (c) Explain your reasoning.

Figuur 2 Conceptuele en procedurele kennis kunnen veel op elkaar lijken (Kieran, p. 168)[7]

Robberies

A TV reporter showed this graph and said: "The graph shows that there is a huge increase in the number of robberies from 1998 to 1999" (Figure 3).

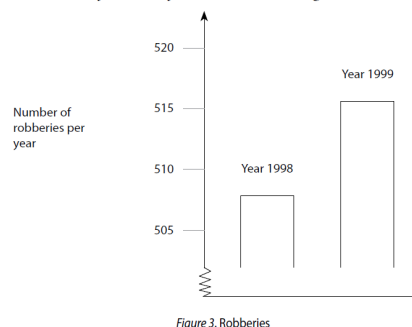


Figure 3. Robberies

Do you consider the reporter's statement to be a reasonable interpretation of the graph? Give an explanation of your answer.

Figuur 3 PISA-item in Markovic et al. [9]

beide vaardigheden elkaar afwisselen en elkaar bevorderen en waarbij begonnen wordt met een conceptuele insteek (Rittle-Johnson [11]).

Basisvaardigheden als gecijferdheid

De vierde en laatste kijk op basisvaardigheden, die van gecijferdheid of wiskundige geletterdheid, stelt de procedurele en conceptuele kennis van het derde perspectief nadrukkelijk in dienst van het functioneren in de samenleving. In ons literatuurcorpus komt dit perspectief frequent naar voren: 30 van de 49 publicaties hebben gecijferdheid als thema en met name in de recente jaren is deze interpretatie de gangbare. Een zeer actueel onderwerp dus in de onderzoeksliteratuur.

Uitgangspunt bij de opvatting van gecijferdheid als basisvaardigheid is dat de wereld waarin we leven rijk is aan kwantitatieve en wiskundige aspecten. Denk aan getallen en berekeningen, maar ook aan grafieken, diagrammen, statistische uitspraken, ruimtelijke oriëntatie en logische redeneringen. Daarmee hebben we te maken in dagelijks leven, vervolgonderwijs en beroepspraktijk. Gecijferd gaat dan ook om de kwantitatieve vaardigheden die een mens nodig heeft om in de samenleving te kunnen functioneren. Het omvat zowel procedurele als conceptuele kennis, maar beide worden geconcretiseerd voor func-

tioneel gebruik in toepassingssituaties in het leven. In verschillende landen, zoals Australië en de Verenigde Staten, heeft gecijferdheid een grote plaats in curricula gekregen.

In de literatuur worden gecijferdheid en wiskundige geletterdheid breed opgevat. Er zijn verschillende definities. Geiger en collega's omschrijven gecijferdheid als

... the knowledge and capabilities required to accommodate the mathematical demands of private and public life and to participate in society as informed, reflective, and contributing citizens (Geiger et al., p. 531)[5].

De internationale vergelijkende PISA-toetsen richten zich op wiskundige geletterdheid. Figuur 3 geeft een voorbeeldopgave, die gaat over het inzicht dat de schaling van de verticale as grote invloed heeft op de indruk die een statistische grafiek wekt.

In de gevonden literatuur is gecijferdheid of wiskundige geletterdheid de dominante interpretatie van basisvaardigheid rekenen-wiskunde. Het omvat de vaardigheden die je nodig hebt om te functioneren als burger in een samenleving die in toenemende mate doordrenkt is van wiskundige aspecten waartoe je je moet verhouden. Het hangt samen met andere vaardigheden zoals statistische geletterdheid en digitale geletterdheid. In de literatuur komt nauwelijks of niet aan de orde hoe leerlijnen voor onderwijs in gecijferdheid eruitzien die recht doen aan factoren zoals de leeftijd van de leerlingen en het schooltype.

Conclusie

Uit deze literatuurstudie concluderen we

Aanpak van het onderzoek

Op basis van een oriënterend vragenlijstonderzoek onder 48 internationale experts zijn zoektermen opgesteld waarmee vier veelgebruikte literatuurdatabases zijn doorzocht: Scopus, Web of Science, ERIC en PsycInfo. De zoekopdracht luidde:

((("basic skill*") OR ("basic compentenc*") OR ("numeracy") OR ("mathematical litera*") OR ("basic math*") OR ("basic litera*") OR ("math* skill*") OR ("math* fluen*") OR ("fundamental math*") OR ("math* proficien*") OR ("procedural know*") AND (("math* education") OR ("math* teaching") OR ("math* learning"))

Dit leidde na deduplicatie tot 3279 artikelen. Daarin zijn we gaan selecteren met behulp van het AI-programma ASReview [3]. Dat resulteerde in een corpus van 49 artikelen, gepubliceerd in de jaren 1979 – 2023. Na een eerste lezing en vanuit onze kennis van de literatuur hebben we deze artikelen ingedeeld in vier perspectieven: basisvaardigheden als procedurele operaties, basisvaardigheden van hogere orde, basisvaardigheden als combinatie van procedurele en conceptuele kennis en basisvaardigheid als gecijferdheid. Deze indeling vormt de leidraad van de analyse en van dit artikel.

ten eerste dat de perspectieven van basisvaardigheden als procedurele operaties, basisvaardigheden van hogere orde, basisvaardigheden als combinatie van

procedurele en conceptuele kennis en basisvaardigheden als gecijferdheid alle vier naar voren komen in de gevonden literatuur. Deze globale indeling geeft de ver-

schillende perspectieven weer. Wel is de verdeling over deze categorieën scheef en zijn er weinig publicaties die primair over procedurele operaties of over hogere-orde vaardigheden gaan.

Ten tweede zien we consensus over het feit dat basisvaardigheden een subtiel en gebalanceerd samenspel zijn tussen procedurele vlotheid en conceptueel inzicht van hogere orde. De derde en belangrijkste conclusie is dat gecijferdheid – of wiskundige geletterdheid – verreweg de meeste aandacht krijgt in de onderzoeksliteratuur rond basisvaardigheden rekenen-wiskunde. Kennelijk wordt dit beschouwd als de belangrijkste basisvaardigheid bij rekenen-wiskunde.

Ons advies aan het ministerie is dan ook om deze internationale trend te volgen en in te zetten op gecijferdheid als belangrijkste basisvaardigheid rekenen-wiskunde. De uitdaging voor het onderwijs in basisvaardigheden rekenen-wiskunde is dan vooral om leerlijnen te ontwerpen die de gecijferdheid bevorderen van leerlingen van verschillende leeftijden en schooltypen als voorbereiding op vervolgonderwijs, beroep en functioneren in de samenleving.



Referenties en noten

- 1 Het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde (<https://exprw.nl/>) is door OCW ingesteld om de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs in Nederland te bevorderen. Het expertisepunt ondersteunt het onderwijsveld bij het implementeren van nieuwe ontwikkelingen in reken-wiskundeonderwijs rond basisvaardigheden, kerndoelen en curriculumvernieuwingen.
- 2 Dit artikel is gebaseerd op een rapport voor het ministerie van OC&W met dezelfde titel. Het volledige rapport is te vinden op <https://exprw.nl/basisvaardigheden/>. Met dank aan Peter Boon (UU), Johan Brons (SLO), Jacqueline Klein (SLO), Peter Kop (RUL), Filip Moons (UU), en Marc van Zanten (SLO) voor het meedenken, meelesen en meecoderen van de literatuur.
- 3 <https://asreview.nl/>
- 4 Denmark, T., & Kepner, H. S., Jr. (1980). Basic Skills in Mathematics: A Survey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11(2), 104-123. <https://doi.org/10.2307/748903>
- 5 Geiger, V., Goos, M., & Forgasz, H. (2015). A rich interpretation of numeracy for the 21st century: a survey of the state of the field. *ZDM - Mathematics Education*, 47(4), 531-548. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0708-1>
- 6 Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. (pp. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates, Inc. <https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9780203063538>
- 7 Kieran, C. (2013). The False Dichotomy in Mathematics Education Between Conceptual Understanding and Procedural Skills: An Example from Algebra. In K. R. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 153-171). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_7
- 8 Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it Up. Helping Children Learn Mathematics*. National Academies Press.
- 9 Markovic, O., Pikula, M., & Zubac, M. (2019). A critical analysis of the PISA mathematics tasks. *Croatian Journal of Education*, 21(1), 233-274. <https://doi.org/10.15516/cje.v21i1.3245>
- 10 Newport, J. F. (1979). Why the Decline in Student Achievement of the Basic Skills? *School Science and Mathematics*, 79(2), 122-124. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1979.tb09461.x>
- 11 Rittle-Johnson, B. (2019). Iterative development of conceptual and procedural knowledge in mathematics learning and instruction. In J. Dunlosky & K. Rawson (Eds.), *The Cambridge Handbook of Cognition and Education* (pp. 124-147). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108235631.007>
- 12 Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411.