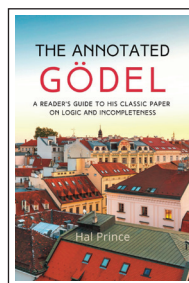


Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Secretariaat: Enna van Dijk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Hal Prince

The Annotated Gödel
A Reader's Guide to his Classic Paper on
Logic and Incompleteness

Homebred Press, 2022
xvii + 165 p., prijs € 9,95
ISBN 9798986414201

What do Gödel's incompleteness theorems say? Any decent book on Mathematical Logic will tell you; I quote/paraphrase the book that I learned it from, Mendelson's *Introduction to Mathematical Logic*:

Let K be a first-order theory with equality in the language of arithmetic that satisfied three conditions

1. *K has a recursive axiom set,*
2. *K proves that $0 \neq 1$, and*
3. *Every recursive function is representable in K .*

Then there is a sentence φ in the language of arithmetic such that

- *if K is consistent then K does not prove φ , and*
- *if K is ω -consistent then K does not prove $\neg\varphi$.*

Most people when asked will not say this when you ask them, the answers will probably vary from an honest "I don't know" to a vague statement that is a variation on "We cannot prove everything".

Many people do not know the close connection with arithmetic and the rather technical requirements made of the theory K . They also do not know what 'proves' means in this context. Consequently one sees 'applications' of the incompleteness theorems to religion, politics and what not. I can heartily recommend Torkel Franzén's *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse* from 2005 for a survey of misconceptions relating to the incompleteness phenomenon.

The title of Gödel's original paper is quite clear about its purpose: 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I'. It establishes that there are formally undecidable systems in Russell and Whitehead's *Principia Mathematica* and also in related systems. The latter work, three volumes comprising almost 2000 pages, sets out to lay the foundations of mathematics using Mathematical Logic and builds a deductive system that would allow us to deduce known and future mathematics from a well-determined set of premises.

The Principia are written in the symbolism developed by Peano and this makes it quite hard to read for modern eyes and many people (this reviewer included) will have given up quite quickly, but not after looking up Propositions 54.43 and 100.643. The former, on page 362 of volume I, establishes that the union of two disjoint members of 1 belongs to 2, with the promise that "From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$ ". And indeed, the latter proposition, on page 83 of volume II, establishes just that.

Gödel's paper is written in a limited version of Peano's formalism, which may at times still not be easy on modern eyes and it takes time to get used to its style. It will look nevertheless quite familiar to anyone who went through a proof of the incompleteness

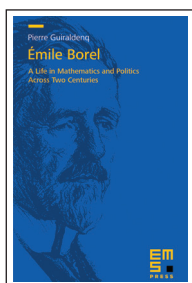
theorems in some course or other. The proof in Mendelson's book for example is to a large extent Gödel's proof in modern language.

One can read the original paper in Gödel's collected works (Oxford University Press, 1986), where it is printed on the left-hand pages in German and in English translation on the right-hand pages.

The author/editor(?) of the book under review wanted to read Gödel's original work, preferably with explanatory notes. Since there was no version available he made his own: he translated the paper and added his own annotations (if the book you'd like to read does not exist then write it yourself). And, also important, he translated the mathematics into our modern symbolism.

The translation is displayed in boxes with a light-grey background and between the boxes the author explains what is going on in Gödel's text. These explanations can simply be illustrative examples, such as a calculation of the Gödel number of a formula and showing how the β -function encodes finite sequences of natural numbers. But there are also moments where the author carefully explains what a particular formula says and, ultimately, how the common interpretation of the famous Gödel sentence "there is no proof of this formula" ultimately misses the mark, not by much but still.

I recommend this book to anyone who'd like to learn about the incompleteness results at a leisurely pace. But keep pen(cil) and paper on hand; there will be moments when you really need to work out things for yourself. That is not because the book lacks explanation, but simply because the material is non-trivial and sometimes simply copying a few lines on paper will force you to slow down your reading and not miss a subtle point. *K. P. Hart*



Pierre Guiraldenq

Émile Borel

A Life in Mathematics and Politics Across Two Centuries

EMS Press, 2022

xii + 110 p., prijs €19,00

ISBN 9783985470136

Wij kennen Émile Borel (1871–1956) allemaal als grondlegger van de maattheorie en de moderne analyse. Hij was ook de bedenker van de CNRS, onderwijsvernieuwer, politicus, burgemeester en verzetsleider in de Tweede Wereldoorlog. Zo'n man verdient een biografie en die verscheen onlangs bij de European Mathematical Society. Het is een beknopt boekje, met enkele mooie foto's, dat leest als een uitgebreid CV waar je tussen de regels door kan zien met wat voor een interessante persoon we te maken hebben.

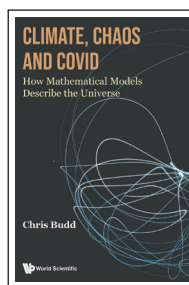
Een briljante wiskundige met de fysiek van Eric Cantona, die al op jonge leeftijd directeur werd van de École Normale Supérieure en zich ontpopte als onvermoeibare organisator. Zijn vrouw Marguerite was een prominent schrijfster en de Borels waren de spil in een uitgebreid netwerk van politici, wetenschappers en kunstenaars.

De Eerste Wereldoorlog was een breekpunt. Borel ontwikkelde apparatuur om artillerie te detecteren en plaatste die hoogst persoonlijk in het niemandsland. De ENS werd ingericht als ziekenhuis, waar Marguerite werkte als zuster. Meer dan de helft van de studenten kwam om, waaronder de pleegzoon van de Borels. Na

de oorlog was Borel ervan overtuigd dat hoger onderwijs de weg was naar een betere wereld. Hij schreef een hele rij van populair wetenschappelijke boeken, reisde naar alle uithoeken der aarde om didactische methoden te propageren, stimuleerde toegepaste wiskunde en stortte zich op de politiek.

Hij werd minister van de Marine in het kabinet van zijn vriend Paul Painlevé en zorgde voor een vijf procent omzetbelasting ten bate van de wetenschap. Toen hij richting pensioen liep werd Borel burgemeester van zijn geboortedorp Saint-Affrique in de Languedoc, waar hij de wegen liet asfalteren en een ziekenhuis en een jeu-de-boulesbaan liet bouwen, die nog steeds zijn naam dragen.

Vol verwondering las ik dit boekje. Een droge opsomming van feiten en verdiensten zonder enige persoonlijke inkleuring. Wat vroeg Émile precies aan Gaston Julia bij diens mondelinge tentamen? Hoe was het in huize Borel toen Madame Curie daar moest schuilen voor de boulevardpers, vanwege haar verhouding met Paul Langevin? Hoe zat het met de persoonlijke spanning tussen Borel en zijn student en tegenbeeld Lebesgue? Hier ligt een verhaal te wachten op een vakkundige romanschrijver. Een boek. Een film-script. De hoofdrolspeler ligt voor de hand. *Robbert Fokkink*



Chris Budd

Climate, Chaos and Covid

How Mathematical Models Describe the Universe

World Scientific, 2023

312 p., prijs £70.00

ISBN 9781800613041

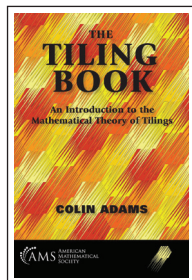
Dit boek geeft een inleiding in het opstellen en gebruiken van wiskundige modellen die gebruikt worden om verschijnselen in de dagelijkse praktijk te beschrijven. Wiskundige modellen zijn al vanaf de oudheid in gebruik. Wiskundige modellen maken gebruik van de wetten bekend uit de natuurkunde, biologie, sociale wetenschappen, enzovoort, waarmee wiskundige vergelijkingen afgeleid worden. Om de vergelijkingen bruikbaar te maken, worden ze gecombineerd met metingen, zodat de oplossingen van de vergelijkingen zo veel mogelijk overeenkomen met de observaties van het gemodelleerde verschijnsel. Bij modelleren wordt er altijd gebruikgemaakt van een modelleercyclus. Eerst wordt een zo goed mogelijk model opgesteld, daarna worden de oplossingen van dit model berekend of benaderd. Deze benaderingen vergelijkt men met de praktijk/metingen en als nodig vindt een aanpassing van het model plaats. Dit gebeurt net zo lang tot de uitkomsten van het model voldoende goed overeenkomen met de werkelijkheid.

De schrijver van het boek, Chris Budd, heeft jarenlange ervaring in het opstellen en benaderen van wiskundige modellen. Hij doet dit niet alleen aan de Universiteit van Bath, maar hij wordt ook vaak gevraagd om wiskundige modellen te ontwikkelen in andere landen in en buiten Europa. Hij is een regelmatige bezoeker van de Study Groups Mathematics and Industry. Het boek is op een luchtige toon geschreven maar is wiskundig degelijk. Ook de (on)bruikbaarheid van wiskundige modellen wordt regelmatig door de schrijver besproken.

In het eerste hoofdstuk van het boek wordt de achtergrond van wiskundige modellen besproken. Het proces van wiskundig modelleren wordt beschreven aan de hand van negen stappen, die regelmatig terugkomen in de latere hoofdstukken. In de resterende hoofdstukken worden verschillende verschijnselen beschreven waar wiskundig modelleren gebruikt wordt. De toepassingen lopen uiteen van verkeersmodellen, COVID-19-modellen tot wiskunde voor materiaalkunde problemen. In hoofdstuk 5 met de titel ‘Can mathematics predict the future’ gaat de schrijver dieper in op de mogelijkheid om vanuit een wiskundig model voorspellingen te doen. Hierbij wordt een uitstapje gemaakt naar de chaostheorie, die duidelijke grenzen aangeeft voor voorspelbaarheid van bepaalde verschijnselen. Het is goed om te zien dat de schrijver ook de gevolgen van wiskundige modellen in de praktijk beschrijft en analyseert. Een voorbeeld hiervan is het effect van modellen op de maatregelen rond de COVID-19-pandemie.

Ik heb het boek met veel plezier gelezen. Het boek bevat een goede mix van serieuze wiskunde, afgewisseld met anekdotes uit de praktijk. Wiskundige formules worden gebruikt maar zijn tot een minimum beperkt. De schrijver is er goed in geslaagd om de wiskunde op een heldere manier uit te leggen. Volgens mij is het boek geschikt voor een breed publiek (waarbij basiswiskundekennis gewenst is): wiskundige wetenschappers, studenten, maar ook algemeen geïnteresseerden in wiskundige modellen, zullen het boek goed kunnen lezen. Een goede index en literatuurverwijzingen maken het boek prettig in gebruik. Een puntje van kritiek is de uitvoering. De kwaliteit van het papier zou beter moeten zijn voor een boek dat regelmatig uit de kast gehaald zal worden. Kortom dit boek is een aanrader.

Kees Vuik



Colin Adams

The Tiling Book

An Introduction to the Mathematical Theory of Tilings

American Mathematical Society, 2022

ix + 298 p., prijs \$59.00

ISBN 9781470468972

Betegelingen, opvullingen van het vlak met een eindig aantal vormen — (proto-)tegels —, die je mag verschuiven, draaien, spiegelen, en die dan precies moeten passen, zijn een bron van wiskundige vragen, liggen aan de basis van kristallografie, produceren prachtige plaatjes, en houden verband met een groot aantal stukken wiskunde, natuurkunde en scheikunde. Groepentheorie en algebra, meetkunde, Fourier-analyse, logica, combinatoriek, ergodentheorie, kanstheorie, statistische mechanica, er is voor elk wat wils te vinden.

In 1987 schreven Branko Gruenbaum en G. C. Shepard een encyclopedisch tekstboek (nu verkrijgbaar via Dover), dat bijna alles wat er toen bekend was bevatte. Een van de toen tamelijk recente ontwikkelingen betrof het bestaan en de eigenschappen van aperiodieke betegelingen. In de jaren zestig was er verrassenderwijs gevonden dat het mogelijk was een eindig aantal prototegels te vinden die alleen maar niet-periodieke betegelingen toelieten. Dit

resultaat van Berger weersprak een vermoeden van zijn leermeester, de logicus Hao Wang. Zijn constructie maakte gebruik van meer dan 20 000 prototegels. Daaropvolgend werden er constructies met steeds minder prototegels bedacht, tot Roger Penrose — tegenwoordig Sir Roger, en in het bezit van een Nobelprijs voor zijn werk aan zwarte gaten — het aantal terugbracht tot twee, die een soort 5-voudige rotatiesymmetrie leken te bevatten.

Martin Gardner adverteerde de Penrosebetegelingen in een prachtige column in 1977 in de *Scientific American*. Een wiskundig tekstboek met een goed overzicht over de wiskunde van aperiodiciteit, door Michael Baake en Uwe Grimm, verscheen zo'n tien jaar terug, bij Cambridge University Press.

Begin jaren tachtig vond de Israëlische kristallograaf Dan Shechtman materialen die een discreet diffractiespectrum met een 10-voudige rotatiesymmetrie vertoonden, iets waarvan elke rechtgeaarde kristallograaf wist dat het onmogelijk was. Toen hij zich daarvan niet liet overtuigen, verwijderde de directeur van het laboratorium deze stoorzender die zijn laboratorium tot schande strekte. Zijn quasikristallen werden met hoon en spot overladen (tweevoudig Nobelprijswinnaar Linus Pauling sprak: “Quasikristallen bestaan niet, er bestaan hoogstens quasiwetenschappers.”), maar Shechtmans koppigheid betaalde zich uit, hij kreeg zo'n dertig jaar later een Nobelprijs voor Scheikunde, en de kristallografen pasten later hun definitie aan van wat je een kristal mocht noemen.

In het boek van Adams is zowel een selectie als een update van de onderwerpen van Gruenbaum en Shepard te vinden. Het is gebaseerd op colleges die hij gaf; het bevat een aantal basisresultaten (bijvoorbeeld het bestaan van 17 kristalgroepen in twee dimensies, die de mogelijke symmetrieën van periodieke betegelingen beschrijven). Ook worden er een aantal open problemen genoemd.

Daarnaast is er een hoofdstuk over aperiodieke betegelingen. De verschillende constructies (substitutie, projectie) worden behandeld. Het belangrijkste open probleem daarbij (het bestaan van een ‘einstein’, een enkele prototegel die alleen maar aperiodieke betegelingen toelaat) wordt genoemd, maar het werd pas opgelost kort na het verschijnen van het boek (zie David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan, Chaim Goodman-Strauss, An aperiodic monotile, arXiv:2303.10798). De eerder ontdekte Socolar-Taylor tegel, die niet samenhangend is en daarom het probleem niet ‘echt’ oplost, wordt wel behandeld in het boek. Het is opmerkelijk dat zowel Taylor als Smith amateurs waren; betegelingen vormen een stuk wiskunde dat attractief is voor velen en waar een amateur nog steeds bijdragen kan leveren. Ook wordt er in een apart hoofdstuk ingegaan op generalisaties, analoge vragen in andere dimensies, op de bolsfeer, in het hyperbolisch vlak, en dergelijke.

Het boek is aantrekkelijk vormgegeven, met prachtige plaatjes, mooi en goed gebruik van kleur — definities, stellingen, open problemen, projecten hebben allemaal een eigen kleur bijvoorbeeld — en met een groot aantal illustraties van er soms onwaarschijnlijk uitzijnde tegels. Het niveau is niet al te ingewikkeld, er is een inleiding die bachelorstudenten voorziet van de nodige achtergrondkennis en het boek lijkt me heel bruikbaar om geheel of gedeeltelijk met studenten door te werken.

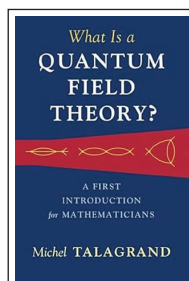
Wiskundig is het aantrekkelijk, met een nadruk op groepentheorie en meetkunde, en het boek is bovendien toegankelijk geschreven. Voor een caputcollege, een leesgroep of een werkgroep lijkt het me een aanrader, en voor bijna iedereen is er wel wat nieuws in te ontdekken.

Aernout van Enter

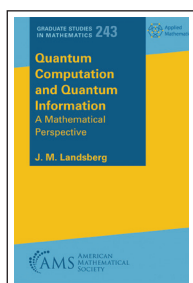
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



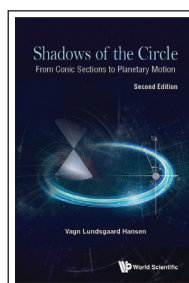
Dana Mackenzie, Leila Sloman
What's Happening in the Mathematical Sciences
 Volume 13
 AMS, 2024
 ISBN 9781470474904
bookstore.ams.org/happening-13



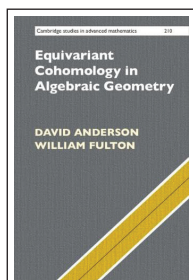
Michel Talagrand
What is a Quantum Field Theory?
 A First Introduction for Mathematicians
 Cambridge University Press, 2022
 ISBN 9781316510278
cambridge.org/9781316510278



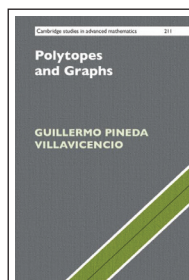
J. M. Landsberg
Quantum Computation and Quantum Information
 A Mathematical Perspective
 AMS, 2024
 ISBN 9781470475574
bookstore.ams.org/gsm-243



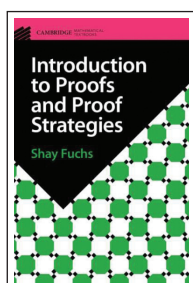
Vagn Lundsgaard Hansen
Shadows of the Circle
 From Conic Sections to Planetary Motion
 (2nd Edition)
 World Scientific, 2024
 ISBN 9789811260926
worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/12981



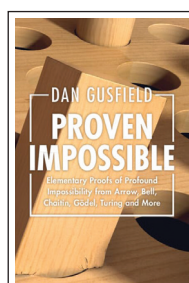
David Anderson, William Fulton
Equivariant Cohomology in Algebraic Geometry
 Cambridge University Press, 2024
 ISBN 9781009349987
cambridge.org/9781009349987



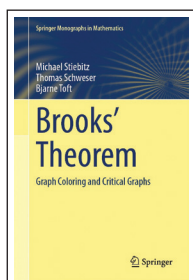
Guillermo Pineda Villavicencio
Polytopes and Graphs
 Cambridge University Press, 2024
 ISBN 9781009257817
cambridge.org/9781009257817



Shay Fuchs
Introduction to Proofs and Proof Strategies
 Cambridge University Press, 2023
 ISBN 9781009096287
cambridge.org/9781009096287



Dan Gusfield
Proven Impossible
 Cambridge University Press, 2024
 ISBN 9781009349451
doi.org/10.1017/9781009349451



Michael Stiebitz, Thomas Schweser, Bjarne Toft
Brooks' Theorem
 Graph Coloring and Critical Graphs
 Springer, 2024
 ISBN 9783031500640
springer.com/9783031500640



Franz Lemmermeyer
4000 Jahre Zahlentheorie
 Geschichte – Kulturen – Menschen
 I. Von Babel bis Abel
 Springer, 2023
 ISBN 9783662681107
springer.com/9783662681107