

Rob van Oord

Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 30ste Nationale Wiskunde Dagen

Maak wiskunde zichtbaar, dat is uitdagend en mooi!

Het waren op 5 en 6 april al weer de 30ste Nationale Wiskunde Dagen, in de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout. Jaarlijks wordt dit grootse evenement georganiseerd door het Freudenthal Instituut, dat telkens met behulp van de programma commissie een groot scala aan sprekers weet te regelen om belangeloos een workshop of lezing te verzorgen. Rob van Oord was er weer bij en doet verslag.

In het programmaboekje kon je dit jaar kiezen uit rond de zestig workshops. Naast de workshop ‘Verborgene berichten’, in blok 2, waarbij Marjan Botke en ik de deelnemers aan het werk zetten om zelf flexagons te maken, kon ik dus nog in drie blokken een keuze maken. In blok 1 werd dat de ‘Ode aan Escher in het graan’, in blok 3 ging ik ‘Piekeren over Pi’ en in blok 4 probeerde ik te volgen hoe goedgegumste kabouters na enig nadenken de kleur van hun muts konden raden. Volgens de spreker Alex van den Brandhof is bij het oplossen van raadsels met oneindig veel kabouters het zogeheten *keuzeaxioma* nodig. Alex schreef twintig van deze raadsels in een boek: *De Kabouterformule* (zie Figuur 1). Je kon in de pauze een gesigneerd exemplaar kopen.

Kabouters

Wat mij wel leuk lijkt, is om in de klas met een aantal leerlingen een paar van die raadsels uit *De Kabouterformule* te spelen. Neem vier leerlingen. Ze staan/zitten achter elkaar zodat ze alleen de mutsen van degenen die voor hen zitten kunnen zien. Jij zet vervolgens twee rode en twee blauwe mutsen op de hoofden van die leerlingen. Je geeft ze alleen mee dat er twee rode

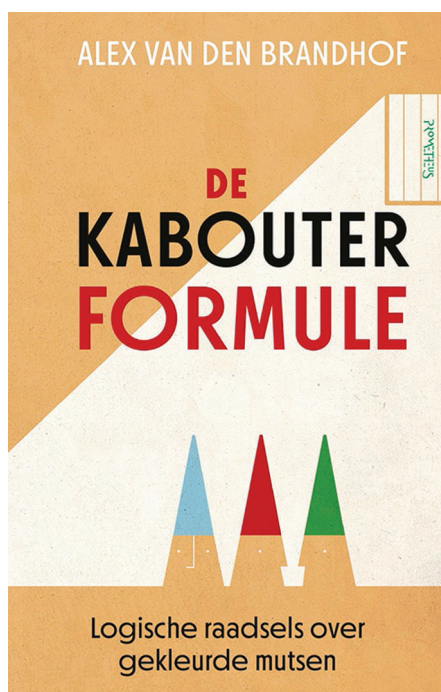
en twee blauwe mutsen zijn uitgedeeld. Ze mogen van hun stoel af als een van de vier de kleur van zijn muts kan zeggen. De eerste leerling zit geblinddoekt achteraan in de rij. Hij kan geen van de andere mutsen

zien. De tweede ziet alleen de kleuren van de derde en vierde muts. De derde ziet alleen de kleur van de vierde, en de vierde ziet helemaal geen mutsen. Speel verschillende situaties. Bij $1234 = RBRB$ ziet de eerste niets (geblinddoekt). De tweede ziet RB nog voor zich en weet dan niet wat de kleur van zijn muts is. De tweede houdt zich stil, wat betekent dat hij twee verschillende kleuren voor zich ziet. De derde weet dan dat hij een andere kleur muts heeft dan degene die nog voor hem zit. Dus hij weet als eerste de kleur van zijn muts: R in dit geval.

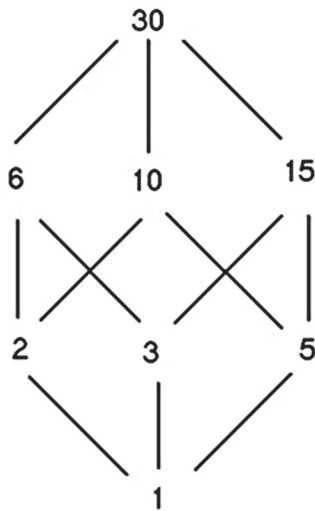
Verbinden

Eugenia Cheng opende de NWD door een zelf gecomponeerd pianostuk te spelen. Ze is wiskundige en concertpianist. Op de Universiteit van Sheffield werd ze niet gewaardeerd. Ze voelde zich ongelukkig en nam ontslag. Ze debuteerde met een boek: *How to Bake Pi?* (2015). Ze wilde daarmee methodes en principes van wiskunde illustreren. Ze laat zien dat wiskunde helpt om de wereld te begrijpen. Een boodschap is dat je met je leerlingen niet moet beginnen met het uitleggen van een som, maar probeer eerst je in te leven wat de leerlingen op dat moment bezighoudt. Deze boodschap is ook op mijn lijf geschreven.

Je kunt de getallen 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 en 30 vanuit een rij, ook in een schema zetten met, van onder naar boven, verbindingsstreepjes bij ‘is deler van’. Dit schema kun

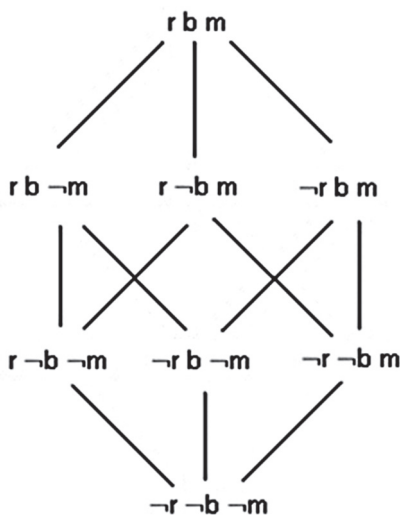


Figuur 1 *De Kabouterformule* van Alex van den Brandhof



Figuur 2

je vervolgens ruimtelijk opvatten, met de verbindingslijntjes als ribben van een kubus. Zie Figuur 2. Je kunt dit abstraheren naar letters en vervolgens naar drie bevoorrechte begrippen, rijk (**r**), blank (**b**) en man (**m**). Daarmee kun je bewust worden van de plaats in de maatschappij, zeker als je ook de ontkenkende begrippen in het schema erbij zet: $\neg r$, $\neg b$, $\neg m$. Zie Figuur 2. Het lijkt nu op een indeling van mensen in de maatschappij. Daarin zou een rijke blanke man als hoogste op de ladder staan. Je kunt nu een discussie opzetten met de vraag aan de leerling over de plek die hij/zij in dit schema inneemt. Ze raadt ons aan niet te denken in competitie met anderen, maar vooral te proberen te begrijpen hoe anderen zich voelen. Probeer te verbinden. Kortom, een mooie start van de NWD waar zoveel mooie mensen bij elkaar zijn.

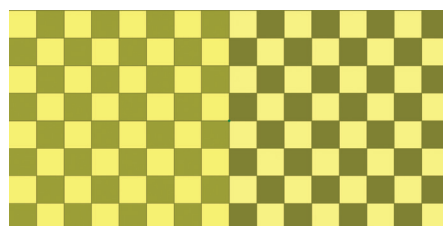


Figuur 3

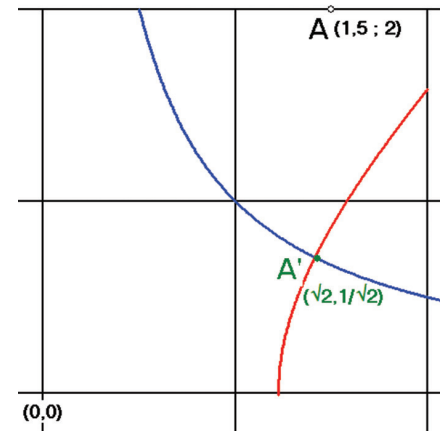
In het graan en op het strand

In 2018 was Leeuwarden de culturele hoofdstad van Europa. Ik logeerde toen in de voorjaarsvakantie een paar dagen in het Stadhouders Hof, een voormalig paleis van de Nassaus. Wat ik toen niet wist is dat op acht verschillende akkerlanden door verschillende kunstenaars paaltjes in de grond geslagen werden. Deze paaltjes markeerden de contouren van acht *landscape art*-projecten. Acht kunstenaars dienden een ontwerp in als ode aan Escher, geboren in Leeuwarden, die in het graan gemaaid zouden worden. Op dat moment was er nog geen graan gegroeid. Ik was dus benieuwd naar het verhaal van ontwerper Hans Kuiper en wiskundige Klaas Lakeman over deze graantekeningen. Klaas schreef er al over in *Pythagoras* (jaargang 58(6), juni 2019, pp.18–21). Een van de kunstwerken die in het graan werd uitgezet, werd gevormd door twee tegen elkaar geplaatste vervormde schaakborden. Een ontwerp van Hans Kuiper, die nu helaas ziek was. Ik geef een uitleg van de manier waarop de schaakborden vervormd werden tot het patroon dat in het graan werd gezet.

Neem je $(0,0)$ als middelpunt van de figuur, dan zijn de hoekpunten van alle (128) vierkantjes van $\frac{1}{2}$ bij $\frac{1}{2}$ op te vatten als punten in een assenstelsel van $(-4, -2)$ t/m $(4, 2)$. De beide schaakbordpatronen worden nu vervormd met een afbeelding van de (hoek)punten in poolcoördinaten geschreven: $x = r \cos(t)$; $y = r \sin(t)$ naar $u = \sqrt{r} \cos(\frac{1}{2}t)$; $v = \sqrt{r} \sin(\frac{1}{2}t)$. Je moet daarbij bedenken dat het rechter schaakbord wordt opengeknijpt van $(0,0)$ tot $(2,0)$. Het punt $(2,0)$ wordt nu naar $(0,0)$ geschoven en twee randen van het opengeknijpte lijnstuk worden van het punt $(0,0)$ naar $(0, \sqrt{2})$ en naar $(0, -\sqrt{2})$ verplaatst. Hoe ik aan die $\sqrt{2}$ kom zie je zo. Navenant ook wordt ook het linker bord opengeknijpt. Hoe kun je de nieuwe hoekpunten vinden? Er geldt $x^2 + y^2 = r^2$, maar ook $x = u^2 - v^2$ en $y = 2uv$. Immers, door gebruik te maken van de 'dubbele-hoek-formules' zie je dat



Figuur 4 Twee schaakbordpatronen tegen elkaar.



Figuur 5

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= r \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) - r \sin^2\left(\frac{1}{2}t\right) \\ &= r(\cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)) \\ &= r \cos(t) = x \end{aligned}$$

en

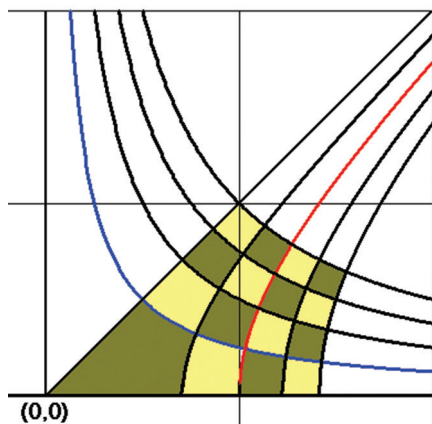
$$\begin{aligned} 2uv &= 2(\sqrt{r} \cos(\frac{1}{2}t))(\sqrt{r} \sin(\frac{1}{2}t)) \\ &= r \cdot (2 \sin(\frac{1}{2}t) \cos(\frac{1}{2}t)) \\ &= r \sin(t) = y. \end{aligned}$$

Verder geldt ook nog dat $u^2 + v^2 = r$, want

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= r \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) + r \sin^2\left(\frac{1}{2}t\right) \\ &= r(\cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)) = r. \end{aligned}$$

Je kunt nu berekenen waar het punt $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ terecht komt. $x^2 + y^2 = r^2$ geeft $r^2 = \frac{9}{4} + \frac{16}{4} = \frac{25}{4}$, dus $r = \frac{5}{2}$. Nu geeft $x = \frac{3}{2} = u^2 - v^2$ en $u^2 + v^2 = r = \frac{5}{2}$ na optellen van deze vergelijkingen $2u^2 = 4$, dus $u^2 = 2$, dus $u = \sqrt{2}$. Uit $y = 2 = 2uv$ volgt dat $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Punt $(\frac{3}{2}, 2)$ komt dus op punt $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ terecht.

Je kunt dit punt ook construeren in een uv -assenstelsel door het snijpunt van de hyperbolen $2 = 2uv$ ofwel $v = \frac{1}{u}$ en $\frac{3}{2} = u^2 - v^2$ ofwel $v = \sqrt{u^2 - \frac{3}{2}}$ te (laten) tekenen. Zie Figuur 5. Het beeldpunt van $(2,0)$ wordt bepaald door $u^2 - v^2 = 2$ en $2uv = 0$. Dus moet $v = 0$ zijn en $u = \sqrt{2}$. Vanwege symmetrie zijn (zoals ik eerder vermeld heb) de randpunten op de verticale v -as dus $(0, \sqrt{2})$ en $(0, -\sqrt{2})$. Om de nieuwe hoekpunten van de verschillende vierkantjes van het graanpatroon te vinden, kun je de nodige hyperbolen tekenen. Hiermee kun je zien hoe het patroon van het figuur in het graan eruit gaat zien. Zie Figuur 6. Het mooie is dat de hyperbolen onderling loodrecht snijden. Zo lijken de vervormde vierkantjes ook met deze eigenschap op het origineel. Om te zien waarom dit zo is ga ik uit van een origineel punt (a,b) . Dit wordt



Figuur 6

omgezet naar punt (u, v) als snijpunt van twee hyperbolen. Druk a en b uit in u en v . Herschrijf deze formules tot hyperbolen in het uv -stelsel.

Uit $a = u^2 - v^2$ volgt hyperbool $v = \sqrt{u^2 - a}$, en uit $b = 2uv$ volgt hyperbool $v = \frac{b}{2u}$. Met behulp van differentiëren kunnen we nu de hellingen berekenen van beide hyperbolen in het snijpunt dat door (a, b) bepaald wordt:

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 - a}} = \frac{u}{\sqrt{u^2 - a}}$$

wordt (met $u^2 - a = v^2$)

$$\frac{dv}{du} = \frac{u}{v},$$

en

$$\frac{dv}{du} = \frac{-b}{2u^2}$$

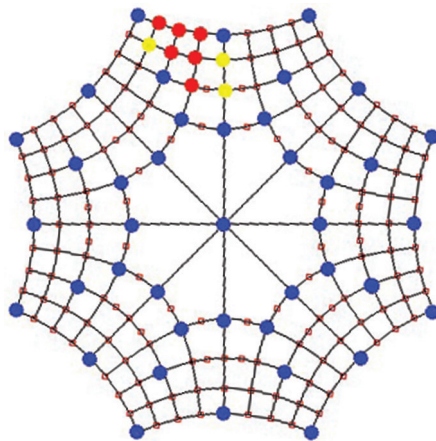
wordt (met $b = 2uv$)

$$\frac{dv}{du} = \frac{-v}{u}.$$

Zie daar (vermenigvuldigen van beide hellingen):

$$\frac{u}{v} \cdot \frac{-v}{u} = -1.$$

Dus de hyperbolen snijden elkaar loodrecht.



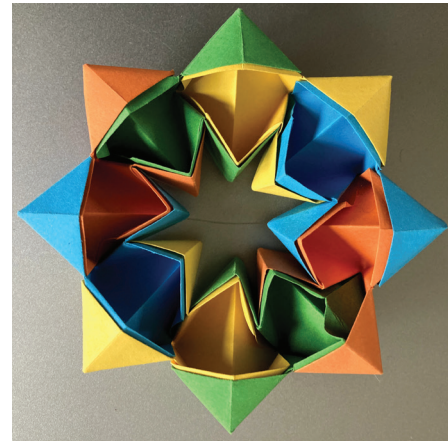
Figuur 7 Plekken van de paaltjes.

Voor het uitzetten van de hoekpunten van het graanpatroon waren uiteindelijk per schaakbord $81 + 4 = 85$ paaltjes nodig. Voor de twee schaakborden tegen elkaar zijn dus $2 \times 85 - 9 = 161$ paaltjes geslagen. Zie Figuur 7. Ik wens de lezer veel plezier met het maken van dit mooie patroon. Wie weet is je gazon groot genoeg om dit mooie figuur er een keer in uit te zetten en te maaien. Of je laat bij mooi weer een klas dit patroon op het schoolplein tekenen.

Tijdens deze NWD was er ook de mogelijkheid om in de workshop 'Sand drawing' van Simon Beck op vrijdag te zien hoe je met een grafisch pakket een fractaalpatroon kunt ontwerpen. Mijn vrienden Adri en Anja volgden deze workshop en togen zaterdagochtend vroeg naar het strand om met de deelnemers het ontworpen patroon in het zand uit te zetten. Het proces van het tekenen van het patroon werd met een drone gefilmd. Op internet vind je een aantal filmpjes van deze zandtekeningen: <https://nos.nl/video/2515970-zandtekening>.

Flexagons

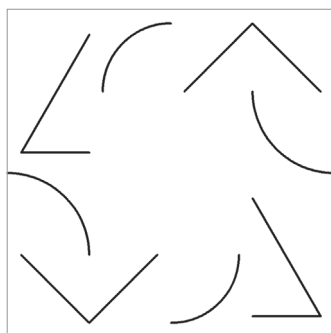
In blok 2 kwamen ruim vijftig collega's naar onze workshop. We gingen aan de slag met het maken van flexagons. Als je



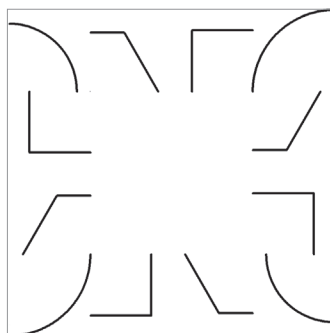
Figuur 8 Gevouwen 3D-flexagon.

op internet googelt naar *flexagon* dan zijn er tal van filmpjes waarin je kunt zien hoe je een flexagon kunt maken en wat je ermee kan doen. Het idee voor het maken van flexagons heb ik uit een boekje dat in 2020 bij de *Wageningse Methode* is uitgegeven. Ik ontwierp hiermee mijn kerstkaart voor 2023, en maakte er 140, in twee versies. Bij het afdrukken moet je er wel goed op letten dat de voorkant en achterkant op de juiste manier op elkaar vallen. Eerst werd er geoefend met het maken van een hexa-tetra-flexagon. De deelnemers kregen een papier waarop de zes 'verborgen' figuren al waren afgedrukt. Zie Figuur 9 en 10. Na het knippen en op de juiste manier in elkaar vouwen zijn er twee grote vierkanten (met op elk een verschillend figuur) zichtbaar, die beide bestaan uit vier even grote kleine vierkanten (met op elk een deel van het gehele figuur). Na dubbelvouwen en doordraaien kun je dan nog vier andere grote vierkanten vinden met daarop figuren die uit vier kleinere vierkanten zijn samengesteld. Zie Figuur 11 en 12.

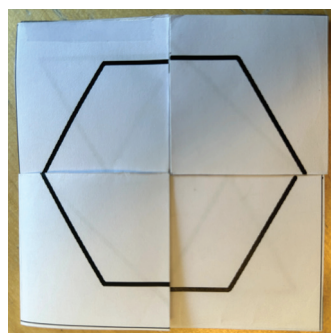
Het commentaar op de workshop was dat er niet veel wiskundige achtergrond bij te pas kwam. Dat klopt wel. Ik heb zelf ook niet kunnen ontdekken welke wiskundige



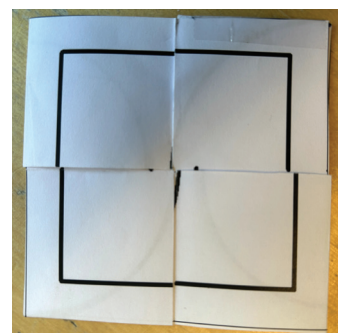
Figuur 9 Flexagon voorkant.



Figuur 10 Flexagon achterkant.



Figuur 11



Figuur 12

achtergrond er is waarmee je die flexagons kunt maken. Op internet zijn wel verschillende filmpjes te vinden die laten zien hoe je ze kunt maken. Maar een wiskundige theorie die laat zien hoeveel verschillende flexagons er zijn en hoe je ze kunt beredeneren heb ik niet gevonden. Het lijkt erop dat in 1939 Arthur Stone als een van de eersten met stroken papier in de weer ging en daarmee enkele flexagons heeft ontdekt. Martin Gardner zorgde met zijn puzzelboeken voor een grotere bekendheid van dit fenomeen.

Top 2000

Zaterdagavond stond in het teken van de Top 2000. Leo Blokhuis trakteerde het publiek op tal van mooie feiten over de Top 2000. Tom Goris had in november gevraagd om een lied van Jan Beuving in te sturen. Samen met Elmer Sterken van de RUG maakten de heren er een zeer vermakelijke avond van. Na de spelletjestafel waar ik weer een nieuw spel leerde, en een uurtje op de dansvloer, ging ik moe en voldaan naar bed.

Voor alle sprekers was er het boek *Ruitjesblues*, gesigneerd door Jan. En voor alle deelnemers was er vanwege het jubileum (feest voor iedereen) een zwarte mok. Maar als je die vult met heet water (thee) dan verschijnen er een aantal standaardformules met bijbehorende grafieken op een witte achtergrond. Dat zal Peter Kop deugd doen. Hij pleit met zijn promotie voor veel meer aandacht voor grafieken bij formules, voor een beter inzicht in de wiskunde achter de functies.

Voor de Funrun, die ik bijna gemist had omdat de wekker niet afging, was er nu de keuze uit twee kleuren: oranje of blauw met opschrift *WISKUNDE IN BEWEGING*. Samen met Hans van Lint, die het hem toch maar weer flikte, kwam ik als laatste over de finish. Maar mijn pakket T-shirts zal nooit meer compleet worden. Ik heb de oranje versie gekozen.

Piekeren over Pi

Al jaren pleit ik voor een feestje met de klas op 14 maart (3-14). Zie ook mijn blogs op de website van de NVvW. Ik gebruik dan Zebra-boekje 6 (Pi) om verschillende benaderingen van pi te laten onderzoeken. De eerste vraag van Berend Ringeling was hoeveel decimalen van pi ieder van ons weet op te noemen. Toevallig was er een dame die zo de eerste 100 decimalen kon opnoemen. Vond ze ooit leuk om uit het hoofd te leren. Maar hoe krijg je op een snelle manier veel decimalen van pi?

Leibniz had al een benadering die terug te voeren is op de Taylorreeks-ontwikkeling van $f(x) = \arctan(x)$:

$$f(x) = \frac{f(0) \cdot x^0}{0!} + \frac{f'(x) \cdot x^1}{1!} + \frac{f''(x) \cdot x^2}{2!} + \dots$$

geeft met

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \dots,$$

dat

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

met $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ krijg je de formule van Leibniz voor een hééél langzame benadering van π :

$$4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right).$$

Om snelle benaderingen van π te vinden is het handig als je hoek π (of zo je wilt $\frac{\pi}{4}$) kunt uitdrukken in twee hoeken. Bijvoorbeeld $\frac{\pi}{4} = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$, zoals Euler (een geniale wiskundige) al opmerkte (in 1736). Er geldt $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ en $\tan(\beta) = \frac{1}{2}$, dus $\alpha = \arctan(\frac{1}{3})$ en $\beta = \arctan(\frac{1}{2})$. Zie Figuur 13. Dan vul je $\frac{1}{2}$ respectievelijk $\frac{1}{3}$ in de Taylorreeks van de arctan (eenvoudig rekenwerk voor een computer) voor een snellere benadering van $\frac{\pi}{4}$. Door de figuur uit te breiden met nog drie vierkantjes is te zien dat $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ($= 45^\circ$) (Figuur 14). Er zijn drie (gele) congruente driehoeken te zien. Daaruit volgt dat $AF = EF$ en $\angle AFE = \pi - \beta - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \frac{1}{2}\pi$ ($= 90^\circ$). Dus is $\triangle AEF$ een

45° - 90° - 45° -driehoek. Bij hoekpunt A geldt nu $\alpha + \frac{1}{4}\pi + \beta = \frac{1}{2}\pi$, dus geldt $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$. Nog even ter controle:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1, \end{aligned}$$

dus $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ($= 45^\circ$). Het klopt.

Machin vond een veel betere hoekensom: $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$. Daarmee kreeg hij de formule

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{4}{5^{2n+1}} - \frac{1}{239^{2n+1}} \right),$$

waarin de fout met π ongeveer $\frac{1}{5^{2N}}$ is, in de praktijk krijgen we er per stap 1 of 2 decimalen bij.

Ik nodig de lezer uit om op de website van de NWD 2024 te kijken naar de presentatie van Berend. Daar staat het bewijs van de genoemde hoekensom. Er wordt gebruikgemaakt van formules van $\tan(\alpha + \beta)$ en in het bijzonder $\tan(2\alpha)$. Een van de betere hoekensommen voor $\frac{\pi}{4}$ is:

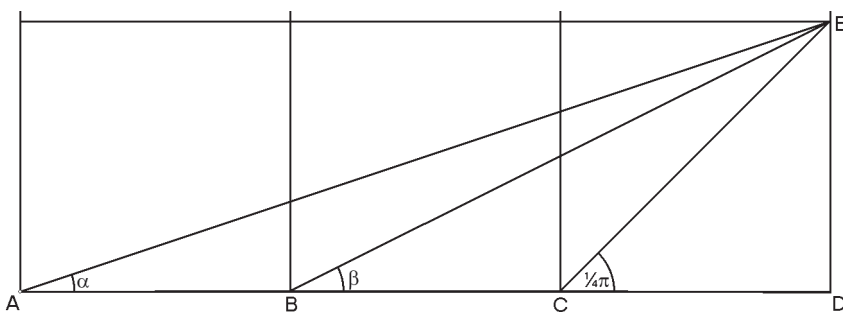
$$\begin{aligned} 12 \arctan\left(\frac{1}{49}\right) + 32 \arctan\left(\frac{1}{57}\right) \\ - 5 \arctan\left(\frac{1}{239}\right) + 12 \arctan\left(\frac{1}{110443}\right), \end{aligned}$$

in 1982 gevonden door Takano.

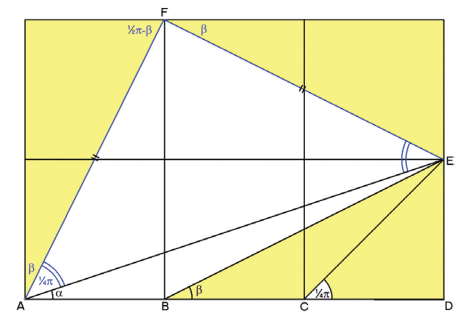
Getal en heelaal

De slotlezing werd gegeven door Marcel Vonk over de rol van 'Getal naar Heelaal', waarin hij betoogde dat wiskunde en natuurkunde onlosmakelijk met elkaar verbonden zijn. Er is een Sitter-ruimte-tijdmodel van het heelaal. Daarin breidt het heelaal zich exponentieel uit. Hij noemde Juan Maldacena, met zijn bijdragen aan de snaartheorie en quantumveldentheorie. Maar dit verhaal ging mij een beetje boven de muts.

Bij de lunch nog veel vrienden van de NWD gesproken. Tot volgend jaar! ☺



Figuur 13



Figuur 14