

Wim Caspers

Stanislascollege, Delft, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examen vwo wiskunde B 2024

Misschien was het wel een heel goed wiskunde B-examen

Ook dit jaar bekeek Wim Caspers het vwo wiskunde B-examen en hij beschrijft hieronder zijn bevindingen. Het betreft het examen van het eerste tijdvak.

Afgelopen mei, ongeveer een kwartier na afloop van het wiskunde B-examen, verzekerde een van de kandidaten mij het huilen achter zich gelaten te hebben en in de fase van acceptatie te zijn beland. Om de

gruwelijkheid van het gevraagde te illustreren, liet een van haar medeleerlingen de laatste vraag van het examen zien, zie Figuur 1. Oude tijden herleven. Voor de oorlog waren wiskunde, mechanica en kosmo-

logie op school onlosmakelijk verbonden. Maar het bepalen van een zwaartepunt, is dat een helse opgave vandaag de dag?

Het maakt expliciet deel uit van het examenprogramma wiskunde B. Een paar maanden eerder is het waarschijnlijk behandeld in een meetkunde hoofdstuk van het lesboek. De opdracht om de afstand AZ te berekenen in het systeem getoond in Figuur 2, waarbij Z het zwaartepunt is, zou heel goed een inleidende opdracht in zo'n hoofdstuk kunnen zijn geweest.

Even verderop in het leerboek volgt er dan een handig recept om een zwaartepunt te bepalen met vectoren in twee dimensies:

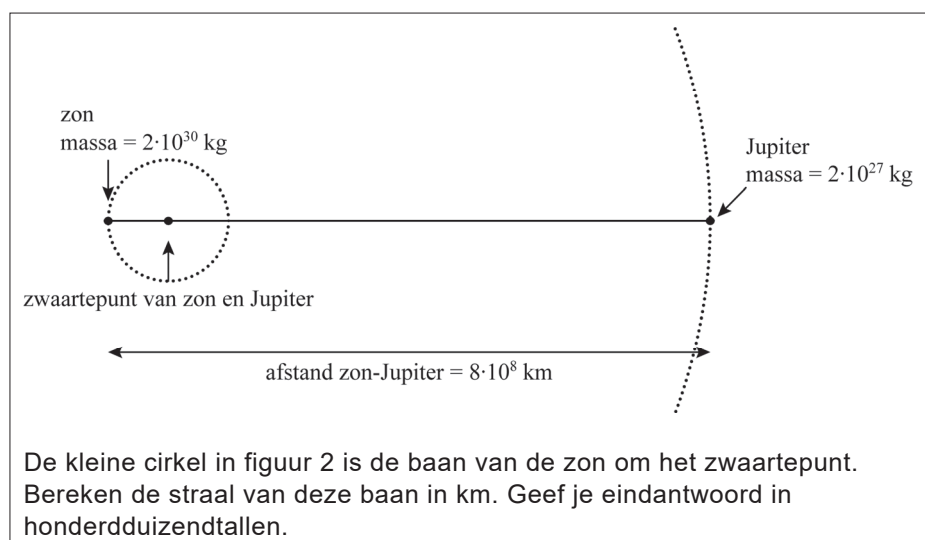
$$\vec{z} = \frac{1}{M} (m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{a}_n)$$

met

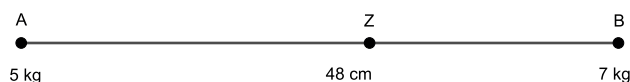
$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n,$$

waarbij alle letters betekenen wat je verwacht. Leiden de grote getallen te veel af om vraag 18 te identificeren als een basale zwaartepunt-som? En is het handige recept werkelijk begrepen, als de toepasbaarheid in dit geval niet wordt gezien?

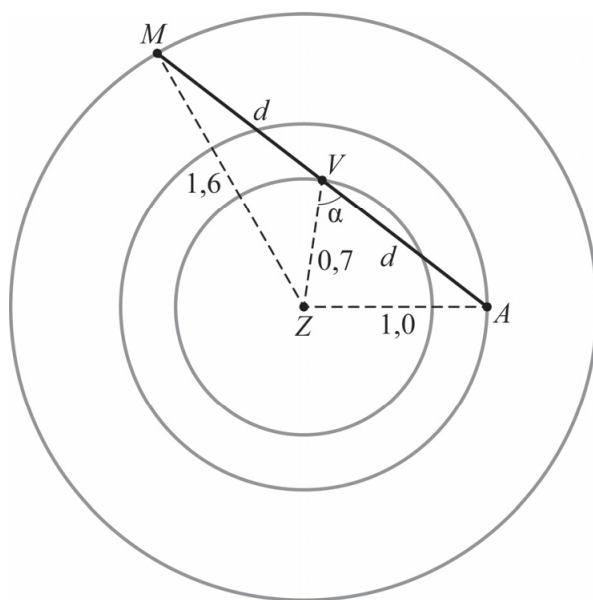
Iets dergelijks geldt voor vraag 16 uit het examen, waar Figuur 3 bij hoort. Afleidende bijkomstigheden in deze situatie zijn dat V de planeet Venus voorstelt, A is de aarde, M is Mars en de afstanden zijn



Figuur 1 Vraag 18 vwo-examen wiskunde B 2024 eerste tijdvak.



Figuur 2 Systeem met twee massa's en een zwaartepunt.



Figuur 3 Afbeelding bij vraag 16 en 17 vwo-examen wiskunde B 2024 eerste tijdvak.

in AE . Slecht vermomde wiskunde zou je zeggen, want het blijven driehoeken die we zien. De vraag is om aan te tonen dat

$$\frac{d^2 - 0,51}{\cos(\alpha)} = \frac{d^2 - 2,07}{\cos(180^\circ - \alpha)}$$

Op zoek dus naar een verband tussen zijden en hoeken in driehoeken. In het wiskunde B-programma zijn er twee met enige nadruk aan de orde gekomen: de sinusregel en de cosinusregel. De noemers in het aan te tonen verband dringen een, blijkt na wat omschrijven, vruchtbare keuze op. Sympathiek dat de examenmakers de noemers niet meteen als tegengesteld aan elkaar weg hadden gerekend. Dat was wel handig om te doen voor het beantwoorden van vraag 17: bereken d .

De drie vragen werden niet goed gemaakt in Nederland. Een kleine dertig procent van de punten werd behaald. Het beantwoorden van de vragen begint met het herkennen van de situatie of iets zelf bedenken. En het helpt als je eerder al eens begrepen hebt wat de cosinusregel vermag. Maar tegen de tijd dat deze vragen aan de orde kwamen, was het examen al ruim twee uur onderweg (als de kandidaat er al aan toekwam) en dat helpt natuurlijk niet. Hoe begon het examen?

Vraag 1 is overzichtelijk; een functie f wordt gegeven door $f(x) = x^5 - 3\sqrt{x}$, de grafiek staat erbij en punt $A(1, -2)$ ligt op de grafiek. De vraag is te bewijzen dat de grafiek van f in A stijgt. Een prettig begin van het examen en deze vraag is goed ge-

maakt. Wonderlijke bijkomstigheid is wel dat sommige leerlingen behalve de afgeleide, in een reflex ook de dubbele afgeleide meteen maar berekenden. Ze meenden misschien de veel geoefende sommen over toenemend en afnemend stijgen en dalen te herkennen.

Vraag 2 is ook een veel geoefend probleem. Gevraagd wordt de coördinaten van een punt P op de grafiek te vinden, waarbij het horizontale lijnstuk PQ , met punt Q ook op de grafiek van f , lengte $\frac{1}{2}$ heeft. In Nederland werd ongeveer zeventig procent van de te behalen punten van vraag 1 en 2 gescoord. Het is ook duidelijk hoe de problemen aan te pakken: bepaal $f'(x)$ respectievelijk los de vergelijking $f(p) = f(p + \frac{1}{2})$ op.

Dat is alweer wat minder bij vraag 6 het geval, zie Figuur 4. Hier moet toch even bedacht worden welke stappen er in welke volgorde handig zijn om uit te voeren. Een verschuiving van a naar rechts en b omhoog levert met de gegevens over g twee verge-

lijkingen met twee onbekenden op. Die tweede heeft maar één onbekende trouwens, dat scheelt. Bedenken dat het punt op de grafiek van f met helling -6 behulpzaam kan zijn is een ander veelbelovend begin van een oplossing. Hoe beperkt ook, in tegenstelling tot vraag 1 en 2, begint het oplossen met het kiezen van een strategie.

Hetzelfde geldt voor de meetkunde-vraag, vraag 11 (zie Figuur 5). Het is niet meteen duidelijk dat uiteindelijk twee cirkels worden gesneden.

De vragen waarbij de eerste te nemen stappen wel voor de hand liggen, vereisen op hun beurt enige algebraïsche doortastendheid. Ze bieden in meer of mindere mate de mogelijkheid tot ontsporen of in het uiterste geval vertwijfeld opgeven. Het differentiëren in vraag 4 van de uitdrukking

$$y = \left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2} \right) e^{at}$$

naar t is nauwkeurig boekhouden. Vraag 8 bevat een op te lossen vergelijking

$$2 \log(\sqrt{1+8^{p+1}}) - 2 \log(\sqrt{1+8^p}) = 3,$$

en vraag 9 leidt onvermijdelijk tot het oplossen van de vergelijking

$$4 \cos(t) + \cos(4t) = 4 \cos(t + \pi) + \cos(4(t + \pi)).$$

Maar wie niet geoefend is in het herschrijven van logaritmische of goniometrische formules, wordt snel verleid tot foutief manoeuvreren met exponenten of met al die verschillende vieren in de uitdrukking.

En dan zijn er nog de vragen waar de standaardaanpak op zijn minst leidt tot tijdsverlies. In vraag 13 en 14 gaat het over de functie f_a gegeven door

$$f_a(x) = \frac{ax^2 - 2}{x^2 + a}.$$

De horizontale asymptoot snijdt de y -as in punt S . Verder wordt gegeven dat de grafiek van f_a één top T heeft en dat deze op

De functie f wordt gegeven door $f(x) = (3x - 7)^2$.

De grafiek van f wordt naar rechts en omhoog verschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g .

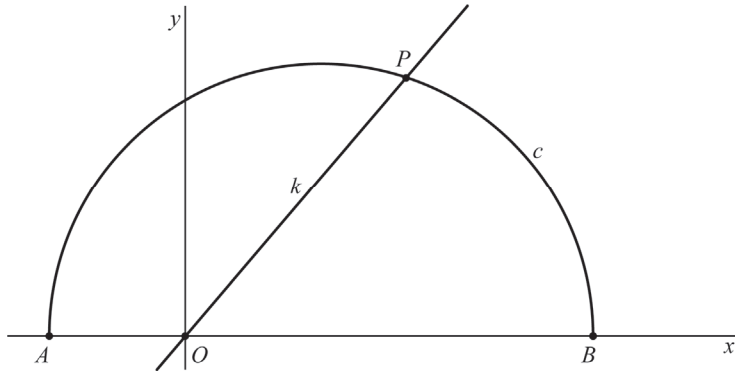
De grafiek van g gaat door het punt $A(5, 40)$. De helling van de raaklijn in A aan de grafiek van g is -6 .

Stel op exacte wijze een functievoorschrift van g op.

Figuur 4 Vraag 6 vwo-examen wiskunde B 2024 eerste tijdvak.

Gegeven zijn de punten $A(-1, 0)$ en $B(3, 0)$. Verder is gegeven de cirkel c met middellijn AB . De lijn k gaat door de oorsprong O en snijdt cirkel c in punt P . De afstand tussen O en P is gelijk is aan $2\frac{1}{2}$. In figuur 1 zijn lijn k en de bovenste helft van cirkel c getekend.

figuur 1



Bereken exact de x -coördinaat van P .

Figuur 5 Vraag 11 vwo-examen wiskunde B 2024 eerste tijdvak.

de y -as ligt. De vraag is te bepalen voor welke positieve waarde van a de lengte van lijnstuk ST minimaal is. Dit roept de volgende reflexen op: een formule opstellen waarmee ST wordt uitgedrukt in a om daarvan de afgeleide straks gelijk aan 0 te

stellen, de horizontale asymptoot bepalen met behulp van een limiet en een top bepalen door de afgeleide van f_a gelijk te stellen aan 0. Maar het is een stuk handiger te gebruiken dat de x -coördinaat van T gelijk aan 0 is, want T ligt op de y -as.

Alles overziend levert het examen voor kandidaten die het moeten hebben van opgaven die op te lossen zijn met standaardprocedures de nodige problemen op, zeker als de algebraïsche vaardigheden slechts partieel op orde zijn. Kandidaten die gewend zijn na te denken over de aanpak waarmee ze opgaven oplossen en de bruikbaarheid van de regels en procedures in weten te schatten, zullen zich meer op hun gemak gevoeld hebben. En daarmee was het misschien wel een heel goed examen wiskunde B.

In Nederland is het niet heel goed gemaakt. Het is nog niet helemaal te achterhalen, maar gemiddeld werd er ongeveer 51 procent van de te behalen punten gescoord. Het kan zijn dat het examen aan de lange kant was, op onderdelen wat ingewikkelder dan anders, maar het lijkt in de afgelopen jaren dat er in de examens wiskunde B steeds iets meer een beroep wordt gedaan op het probleemoplossend vermogen van kandidaten, in combinatie met doordacht inzetten van geleerde technieken. Als ik het zou moeten zeggen, dan bewegen onze leerlingen op het vwo, al dan niet als gevolg van de pandemie, nog niet allemaal mee in die richting. Daar moesten we maar eens iets aan gaan doen. $\leftarrow$