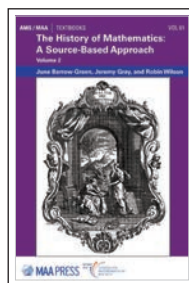


Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Secretariaat: Enna van Dijk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



June Barrow-Green, Jeremy Gray, Robin Wilson

The History of Mathematics: A Source-Based Approach, Volume 2

AMS/MAA Textbooks Vol. 61

MAA Press, 2022

xiv + 687 p., prijs \$ 89.00

ISBN 9781470443825

Een eerder deel ging over de periode tot 1600 (besproken door Luuk Hoevenaars, zie *NAW*, 5/21(2) (2020), 138–139); in dit tweede deel wordt de geschiedenis van de wiskunde tussen 1650 en 2000 besproken. In 21 hoofdstukken worden heel verschillende aspecten van de wiskunde besproken. Voor een inhoudsopgave, zie: <https://bookstore.ams.org/text-61>.

Uit de Introduction: “...this book addresses questions about the *history* of mathematics, not mathematical questions with a historical flavour... We are interested in understanding who did the mathematics and why? ... Historians produce arguments, based on their selections of evidence; their conclusions are not so much facts as opinions.”

In deze bespreking wordt niet een overzicht gegeven van alle onderwerpen die de revue passeren, maar ik geef een paar opmerkingen over de opzet, de mooie en sterke aspecten van dit boek en ik vermeld een paar kritische kanttekeningen. Wiskundigen in hun vak, persoonlijke omstandigheden, culturele en sociale omstandigheden uit de tijd worden besproken, en analyses van sommige wiskundige bewijzen worden gegeven. In 68 ‘Boxes’ (apart gezette teksten) worden bewijzen en uitleg gegeven. Verder zijn er veel afbeeldingen van wiskundigen en illustreren figuren de tekst. Alles bij elkaar een aantrekkelijke en informatieve bladspiegel.

Een mooi voorbeeld: in Box 20 op pagina 227 wordt het bewijs van Euler in 1734 van het ‘Bazel-probleem’ gegeven,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Er worden bijvoorbeeld vier bewijzen besproken die Gauss gaf in 1799 van de ‘hoofdstelling van de algebra’ (van elk polynoom over de complexe getallen zijn alle nulpunten complexe getallen, dat wil zeggen een dergelijke veelterm is te ontbinden in lineaire factoren), en één van die bewijzen wordt geanalyseerd (pp. 532–535). De bespreking van de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde in Hoofdstuk 14, pp. 373–412, vind ik mooi en helder. De historische lijnen worden duidelijk geschetst, veel details worden besproken. Hier mag de lezer zelf een mening vormen wie voor het eerst deze meetkunde beschreef (zie pagina 386). De beschrijvingen van Newton, Euler, Klein, Poincaré, Hilbert, zowel van hun werk als van persoonlijke omstandigheden zijn informatief en mooi.

Het boek sluit af met een (onvolledige) bespreking van de 23 problemen die Hilbert presenteerde op het ICM 1900. De boodschap van de auteurs is dat er een nieuwe tijd is aangebroken. De discussie tussen Hilbert en Minkowski of dit een goed onderwerp is voor een dergelijke voordracht wordt besproken. Voor verdere uitleg worden een paar referenties gegeven. Ik had graag wat meer tekst, complete vermelding van de problemen, wat er nu over bekend is, en meer verwijzingen gezien over deze mijlpaal in de wiskunde.

De auteurs beperken zich tot het bespreken van wiskundig materiaal uit de gekozen tijd, terwijl modernere ontwikkelingen meestal niet vermeld worden. Dat lijkt een bewuste en duidelijke keuze. Met deze keuze ben ik het niet eens. Het zou beter zijn om naast notatie en begrippen uit de besproken tijd ook een moderne en duidelijke beschrijving van het wiskundige materiaal te geven. Wiskundige uitleg laat op vele plekken in dit boek te wensen over.

Op de pagina's 417–419 wordt het 'principe de continuité' van Poncelet besproken; waar de uitleg en definitie van Poncelet toen niet erg duidelijk was, en tijdgenoten niet begrepen wat er bedoeld werd, blijft ook hier de uitleg in de lucht hangen. We weten nu dat Poncelet gelijk had, zijn formulering kan eenvoudig in moderne taal gegeven worden, en een bewijs is niet moeilijk. Een historische beschrijving zou dit ook op deze manier moeten geven, en op zijn minst, met een eenvoudige verwijzing, de lezer vertellen wat de status van dit principe is. Op pagina 423 wordt het 'porisme' van Poncelet besproken, 1822, dat noemen we nu de *sluitingsstelling* van Poncelet. Hier breekt het op dat de auteurs te weinig aandacht geven aan beschouwingen van meetkunde over $\mathbb{R}$ versus meetkunde over $\mathbb{C}$. Dit verdient een betere tekst in een historisch overzicht van meetkunde in de negentiende eeuw. De auteurs geven in dit geval, naar mijn smaak, onvoldoende verwijzingen, discussies en argumenten voor dit interessante aspect van meetkunde in de negentiende eeuw. Zoals het porisme besproken wordt, in een speciaal geval over $\mathbb{R}$, is het juist, onjuist indien beschreven over $\mathbb{C}$, terwijl een goede formulering in alle gevallen eenvoudig te geven is.

Op pagina 428 wordt de 'classificatie van kubische krommen' vermeld, met een vermelding van Newton (1667/1704), en met een verwijzing naar Euler (pagina 240, 'classified cubics in 16 species', op pagina 428 een verkeerde verwijzing naar 8.2). Uit de onduidelijke tekst van dit boek kan ik niet begrijpen wat de 'classificatie' inhoudt, waarom die van Newton incompleet was, en ook wordt er niet vermeld hoe dit door Plücker later werd opgelost. Een historische beschrijving van een wiskundig begrip vraagt om een heldere definitie; een moderne beschrijving van dit onderwerp zou op zijn plaats zijn geweest. Op pagina 237 vinden we een discussie van de 'stelling van Bézout': tel het aantal snijpunten van vlakke krommen van graad m respectievelijk n . Euler (in 1751) slaagde er niet in om een goede definitie te geven van 'snijpuntsmultipliciteit'. In 1779 gaf Bézout een andere benadering. Dit boek geeft dit weer (pagina 237) als: "All that it does is to establish that the resultant has degree mn , and so the curves meet in mn points." Ja, de eerste bewering is van Bézout afkomstig, de tweede beslist niet. Dit gaat over algebraïsche krommen over $\mathbb{R}$. Dat er veel minder snijpunten kunnen zijn was toen al bekend, en is eenvoudig in te zien (we weten nu precies 'waarom'). De auteurs zouden eenvoudig een correcte bewering kunnen geven: vermeld waar we een goede definitie van multipliciteiten vinden (niet moeilijk in moderne taal), en concludeer dat de bewering van Bézout impliceert dat over $\mathbb{C}$ er inderdaad mn snijpunten zijn, geteld met multipliciteiten: dat doet recht aan Bézout en geeft de lezer nu precieze informatie.

De tekst van dit boek geeft de lezer soms ruimte om tot een eigen oordeel te komen, maar ook worden 'feiten' vermeld waar een open vraag meer op zijn plaats zou zijn. Hier is één voorbeeld, pagina 523. We schrijven $\pi(x)$ voor het aantal priemgetallen kleiner dan $x \in \mathbb{R}$. De *priemgetalstelling* (Prime Number Theorem, PNT) zegt

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

bewezen door Hadamard en de la Vallée Poussin in 1896. In dit boek wordt (alleen) beweerd dat Gauss dit vermoedde in 1793 (pagina 523). Van historici mag je verwachten dat ze in een dergelijke situatie voldoende informatie geven, een vraag stellen en het vormen van een mening aan de lezer over laten. Gauss heeft aantallen priemgetallen onder bepaalde grenzen in 1793 uitgerekend (met een omvang en precisie die adembenemend is). In een brief aan Encke in 1849 documenteert Gauss een vermoeden, dat later de PNT zal zijn, en plaatst dit historisch in 1793. In 1798 publiceert Legendre zijn eerste druk van *Essai sur la théorie des nombres*, met daarin een vermoeden, met ondersteuning door tabellen, dat later een vorm van de PNT zal blijken te zijn. Het lijkt mij dat beide aspecten, vermoedens van Gauss en van Legendre, vermeld dienen te worden bij de voorgeschiedenis van de PNT, en ik zie geen duidelijke conclusie over de prioriteit van dit vermoeden.

Bij de bespreking van de Riemann-hypothese zie ik een verwarrende fout, pagina 524. De auteurs beweren dat de eerste niet-triviale nulpunten van $\zeta(-)$ zijn:

$$\frac{1}{2} \pm 14.1 \cdot \sqrt{-1}, \quad \frac{1}{2} \pm 21.01 \cdot \sqrt{-1}, \quad \frac{1}{2} \pm 30.4 \cdot \sqrt{-1}.$$

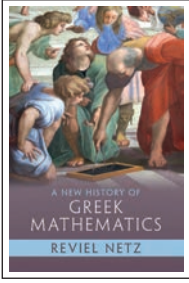
Hierbij dient vermeld te worden dat $\frac{1}{2} \pm 14.1 \cdot \sqrt{-1}$ een *benadering* is, en beslist niet de exacte waarde, dat vermoed wordt dat niet-triviale nulpunten van de vorm $\frac{1}{2} \pm \omega \cdot \sqrt{-1}$ zijn, maar dat het onbekend is of $\omega \in \mathbb{R}$ transcendent is of niet (een open probleem); bovendien is het tweede nulpunt $\approx \frac{1}{2} \pm 21.022 \cdot \sqrt{-1}$.

De auteurs beschrijven een gebeurtenis in 1854: "Gauss was examiner of a thesis by a brilliant young student at Göttingen, Bernhard Riemann. This thesis was part of Riemann's final examination in mathematics (the Habilitation, which earned him the right to lecture at German universities)." Ik ben verbaasd dat historici dit schrijven. Juiste informatie is eenvoudig te vinden. In 1851 promoveerde Riemann, met Gauss als promotor, op een proefschrift met als titel *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen GröÙe*. In 1853 had Riemann de voorbereidingen klaar voor zijn 'Habilitation': een artikel over Fourier-reeksen en drie onderwerpen voor een voordracht; Gauss koos daaruit: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*; door deze keuze werd de tekst van Riemann bewaard. Riemann gaf zijn voordracht op 10 juni 1854. Zowel het proefschrift als de tekst van deze voordracht van Riemann hebben een grote invloed gehad op ontwikkelingen in de wiskunde.

Ontwikkelingen van de algebraïsche meetkunde in de tweede helft van de negentiende eeuw komen er bekaaid vanaf. De grote invloed van Riemann, en bijvoorbeeld werk van Hurwitz, Klein, Brill, Noether en vele anderen worden niet vermeld.

In een eerdere boekbespreking, NAW 5/21(4) (2020), 280–282, vermeldde ik al wat ik leerde van de recent overleden Henk Bos: *trek geen conclusies die je niet kunt maken op grond van de geschreven tekst van de auteur*. In de historische beschrijvingen van wiskunde kunnen we ons beter beperken tot vragen in plaats van conclusies als het historische materiaal niet eenduidig is. Bij het lezen van het boek dat nu besproken wordt had ik in sommige gevallen liever vragen dan conclusies gezien.

Samenvattend: het is een boek met mooie beschrijvingen. Ondanks enkele hinderlijke fouten en onduidelijke beschrijvingen, en het ontbreken van belangrijke onderwerpen, kan een kritische lezer zien wat wiskundigen bewogen heeft in deze periode. Frans Oort



Reviel Netz

A New History of Greek Mathematics

Cambridge University Press, 2022

xvi + 523 p., prijs € 40,95

ISBN 9781108833844

Reviel Netz, een gerenommeerd Stanford hoogleraar schreef dit monumentale boek. Met dit adjectief neem ik niet een voorschotje op mijn bespreking, maar bedoel ik letterlijk dat het een monument is in die zin dat het een vrij compleet beeld probeert te schetsen van de oude Griekse wiskunde in de oude context. Gedrukt op zwaar papier hebben de ruim 500 pagina's tot een zwaarwegend (ruim 1 kg) boek geleid. Of dit boek een zwaarwichtig beeld schetst en of het in inhoudelijke zin een monument genoemd kan worden komt later in deze bespreking wel aan de orde. Voor een juist begrip is het van belang dat we eerst even naar de auteur kijken. Stanford hoogleraar, maar de verwachting dat we te maken hebben met een wiskundige, wordt in de persoonsbeschrijving en in de presentatie van de inhoud gelogenstraft. Hij is classicus van opleiding en professie en gespecialiseerd in de oude Griekse wijsbegeerte annex antieke geschiedenis en dito sociologie. Wel, zoals hij het zelf naar voren brengt, met een passie voor de wiskunde. De uiterst lovende recensies op de achterflap over ons boek van de twee vermaarde emeriti Sir Geoffrey Lloyd en Victor Katz voeren natuurlijk de spanning op. Dat doet ook het in de titel gebruikte epitheton 'new'. En je vraagt je dan gelijk af wat dit 'new' betekent: weer eens een nieuw boek of komt hij met nieuwe inzichten? Natuurlijk zijn er de afgelopen tientallen jaren vele boeken verschenen over deelonderwerpen van de Griekse wiskunde, maar het streven naar een compleet overzicht daarvan en een beschrijving van de doorwerking van de antieke tijd is sinds lang niet meer ondernomen. We moeten een honderdtal jaren terug, namelijk naar het boek *A History of Greek Mathematics* van Sir Thomas Heath. Gecombineerd met het genoemde 'new' wordt de spanning alleen maar groter. Dit alles neem je als recensent tot je, wanneer je vol verwachting aan het boek begint, redenen genoeg om je in het boek onder te dompelen.

Het boek begint traditioneel, zoals we gewend zijn, chronologisch komen de bekende periodes, denkers en schrijvers aan de orde. Wel in enigszins stroef Engels, waardoor het geheel wat archaïsch aandoet. Maar niet getreurd, gewoon doorzetten. Maar dan kom je toch een aantal zaken tegen waar de wenkbrauwen gaan fronsen. Wanneer hij aankomt bij Euclides vraagt hij zich af of Euclides wel echte wiskunde heeft bedreven of was hij 'slechts' een samenvatter was zonder echte bijdrage aan de fundamente van ons vak. Dit dilemma pakt hij door het boek heen telkens weer op en uiteindelijk is zijn conclusie negatief (!) ten aanzien van Euclides. De motivering van zijn standpunt komt echter het 'dat vind ik' niet te boven: mager, onder de maat en beslist niet overtuigend.

Wel is Netz goed op dreef wanneer hij zijn eigen vak laat spreken, onder andere bij de bespreking en beschrijving van de sociologie van bijvoorbeeld het oude Athene en de relatie met Alexandrië. Dan wordt zijn taal ineens stellig en wordt afgezien van wat

'hij vindt'. Cultuur was in de hoogtijdagen van het oude Griekenland vooral wijsbegeerte en geen wiskunde. En hij stelt zich dan de open-deur-vraag of wiskunde wel 'ironic and surprising' kan zijn, hetgeen hij beschouwt als kenmerken van de Hellenistische cultuur. Wat betreft Archimedes vindt hij het belangrijk (en uit de context van het verhaal maak ik op dat hij het verbazingwekkend vindt) dat Archimedes nooit oplossingen geeft van vraagstukken die hij anderen voorlegde. Alsof dit wel zo'n verbazing moet wekken! Bij Apollonius wordt de taal enthousiast: "...as brilliant, as surprising as Archimedes" door de "repeated application of the mechanism of proportion"; "...the typical way in which Apollonius asserted himself as a master: the bombardment of subtlety". Tamelijk bombastisch en weinig onderbouwd.

Netz worstelt ook met het beeld van wiskunde in relatie tot de natuurwetenschappen, de astronomie en de muziek. Weliswaar gebruikt hij te pas en te onpas de woorden 'mathematisering van de werkelijkheid', maar wanneer dat aan de orde is, vindt hij in verhandelingen die daarover gaan geen natuurkunde. En verhandelingen over proporties in de muziek zijn in zijn ogen verdacht: geen muziek, maar is het wel wiskunde? Kennelijk vindt hij dit erg belangrijk, want deze discussie komt door het hele boek voor. Is een Griekse astronoom nu natuurwetenschapper, of wiskundige? Waar maak je je druk over, waarom is dat belangrijk en moeten er zoveel woorden aan gewijd worden? Op diverse plaatsen maakt Netz een combinatie van astronomie en astrologie, terwijl hij niet echt duidelijk maakt waarom hij dergelijke onderwerpen daar en op die manier aan de orde stelt.

Plotseling worden tijdens een doorlopende tekst woorden als isomorfisme, topologisch en vectormodel gebruikt, terwijl daar in het geheel geen reden toe is. Maar het is erger: 'isomorfisme' staat niet in relatie tot een functioneel verband, 'topologisch' gebruikt hij in de betekenis van niet-kwantitatief, soms zelfs als 'waarschijnlijk' of 'ongeveer' en 'vector-model' gebruikt hij waar geen vector ter sprake komt. Zeer kwalijk! Hier wrekt zich zijn achtergrond als niet-wiskundige.

Het boek hinkt op tegenstrijdige gedachten. Soms denk je dat het geschreven is voor een doelgroep die net op de middelbare school zit, zoals bij de triviale uitleg van de samenstelling van ons zonnestelsel. Maar dan weer worden er slechts enkele woorden gewijd aan het begrip precessie met de veronderstelling dat de jonge onwetende het dan begrijpt. Dit komt niet op een enkele plaats voor maar systematisch. Uitleg van wiskundige onderwerpen gebeurt soms zorgvuldig, uitvoerig, vooral met gebruikmaking van de methodes uit de oudheid, soms wordt de uitleg achterwege gelaten, de ene keer met de motivering dat het 'gemakkelijk' is, de andere keer dat het te 'moeilijk' is. Een rationale achter die keus is niet te vinden in de tekst. Het is zelfs zo dat op diverse plaatsen in de tekst gewoon wiskundige onzin gedebiteerd wordt. De afhankelijkheid van oude astronomen van uitvoerige tabellen leidt bij hem tot de opmerking dat ook nu wetenschap afhankelijk is van onbegrepen inhouden: "Science is full of black boxes."

Een simpel voorbeeld waaruit blijkt dat Netz echt de plank mis slaat is het volgende: Tijdens een oorlog in de oude klassieke tijd verschanste men zich voor de aanvallers achter de muren van de eigen stad. Met ladders tegen de muren werden die beklommen en geprobeerd op die wijze de stad in te nemen. De aanvoerder van het aanvallende leger had enkele vuistregels die hij hanteerde bij het besluit hoe lang die ladders moesten zijn, wanneer de

ladder de helft van zijn lengte op de grond van de muur afstaat (dit laatste was de eerste vuistregel). Gemakkelijk is in te zien dat zo'n ladder dan ten minste zo'n 16% langer moest zijn dan de hoogte van de muur. Neem in plaats van 16% een lengtevermeerdering van 20%, want dat is op het rumoerige slagveld eenvoudig te hanteren en je hebt een tweede werkbare vuistregel. Maar wat schrijft Netz: de aanvoerder van het aanvallende leger gaat met de stelling van Pythagoras uitrekenen hoe lang de ladder precies moet zijn. Onbegrijpelijk dat een kenner van de klassieke oudheid dit naar voren brengt, alsof een aanvoerder in het heetst van de strijd die tijd kan nemen, afgezien nog van het feit hoe hij zo'n berekening snel moest uitvoeren.

De schrijver ruimt veel plaats in voor de Griekse astronomie, wel zo'n 120 pagina's lang. Op sommige punten verslikt hij zich, speciaal waar hij tot enkele filosofische bespiegelingen komt. Hij vindt de Griekse astronomen vooral instrumentalisten die gericht zijn op het voorspellen van hemelverschijnselen, maar "they are not a window into the hidden reality that lies behind those observables". Maar even verder noemt hij astronomen wel degelijk 'realisten' en vervolgens vindt hij Ptolemaeus geen kosmoloog. Warrig en rammelend, met een hoog gehalte aan 'dat vind ik'.

Zoals eerder gezegd ruimt hij ontzettend veel plaats in voor het onderscheid tussen astronomie en wiskunde, tussen muziek en wiskunde, tussen meetkunde en de fysische werkelijkheid. En komt hij tot uitspraken als "the *Almagest* is more 'necessary' than the *Elements*", wat dat noodzakelijke dan ook betekent. Op vele plaatsen in het boek claimt de schrijver dat hij de opvolger is van Heath. (Overigens zegt Katz dat in zijn review op de achterflap ook!) Bovendien stelt hij expliciet dat bij diverse wiskundige zaken alle schrijvers van de afgelopen honderd jaar conclusies verkeerd hebben getrokken en dat hij het bij het rechte eind heeft. Voortdurend schrijft Netz: "ik vind", "ik geloof", "wat ... als" en dergelijke, en dan komt er weer iets dat zogenaamd nieuw is, maar wat in de meeste gevallen ook al door anderen en met name ook al door Heath is aangetoond of weerlegd. Ik zou veel meer plaatsruimte moeten vragen wanneer ik alle fouten en missers zou opschrijven. Ik laat dat dus achterwege.

Wat in mijn ogen wel aardig is, is de beschrijving aan het eind van het boek waarbij Netz zijn eigen stiel oppakt en een wetenschapsfilosofische en sociologische beschrijving geeft van het oude Griekenland in relatie tot het oude Babylonië. Ook Omar Khayyam komt daar natuurlijk nog ter sprake. Ik zal mijn bespreking straks eindigen met een kwatrijn van hem dat Netz op pagina 465 citeert. Waar hij in dit deel van het boek de lijn doortrekt naar het begin van onze jaartelling, ja naar de Renaissancetijd in Europa en vervolgens zelfs naar de moderne tijd tot in onze jaren en eeuw toe, is zijn beschrijving veel te stellig zonder dat hij aangeeft waarom hij van mening is dat de Griekse wiskunde bepalend is geweest voor de latere ontwikkelingen tot nu toe. Alleen stellen dat dat zijn mening is zonder overtuigende bewijsvoering is onvoldoende. Bovendien maakt hij ten aanzien van de moderne ontwikkelingen in de wiskunde in relatie tot de oude Griekse wiskunde opmerkingen die iedere grond missen. Netz kan goed schrijven als het maar geen wiskunde betreft. Wel instructief is zijn beschrijving van de tijd (begin van onze jaartelling) van Pappus en daarna, waarin de geïsoleerde geleerde zich meer en meer ontwikkelde tot leraar. De combinatie wetenschap en onderwijs kwam hoe langer hoe meer in zicht. En niet uitsluitend voor mannen; Hypatia die

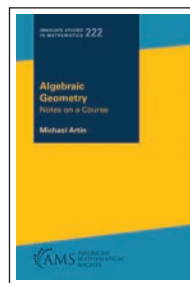
de school van haar vader voortzette, was lerares en geleerde: een lichtend voorbeeld vanuit vroege tijden. We herkennen de functie-combinatie geleerdheid-onderwijs uit de oudheid tot in de huidige tijd. Het boek besluit met een uitvoerige index van elf pagina's, die op zichzelf een heel nuttige functie kan vervullen.

Tot slot het beloofde kwatrijn van Khayyam (in het Engels):

My mind has never lacked learning,
Few mysteries remained unsolved;
I have meditated for seventy-two years night and day,
To learn that nothing has been learned at all.

Concluderend: Al lezend kreeg uw recensent vanaf het begin het onheimische gevoel dat de tekst niet door een wiskundige geschreven is. Dat kan verfrissend zijn om jouw eigen denkwijze te spiegelen aan die van een 'buitenstaander', maar dan moet je niet telkens het gevoel krijgen op het verkeerde been gezet te worden. Met talloze missers en hier en daar wiskundige onzin. En dat is in dit boek het geval. Ook de presentatie van typisch wiskundige zaken gaat uitermate stroef en bepaald niet op de wijze waarop wij wiskundigen getraind zijn. Dus: Is het boek een monument? Beslist niet. Geeft het zwaarwichtige kennis door? Neen. Hoe 'new' is het boek? Dat valt zwaar tegen. Hoe konden Lloyd en Katz zulke lovende woorden schrijven? Onbegrijpelijk. Vormt dit boek de opvolger van het boek van Heath? In genen dele. Onbegrijpelijk dat niet een aantal wiskunde-historici voorafgaand aan publicatie hun vingers hebben gelegd bij missers in de tekst en de schrijver hebben geadviseerd die te herstellen. Het boek is naar mijn mening ongeschikt om hieruit de oude Griekse wiskunde te gaan bestuderen: het leidt tot onjuiste conclusies.

Wim Kleijne



Michael Artin

Algebraic Geometry Notes on a Course

Graduate Studies in Mathematics 222
American Mathematical Society, 2022
x + 318 p., prijs \$ 85.00
ISBN 9781470471118

Omdat de jongere wiskundigen onder ons waarschijnlijk de schrijver van het boek niet kennen, zal ik alvorens het boek te bespreken de meermaals gelauwerde auteur (Steel Prize (2002), Wolf Prize (2013), National Medal of Science (2013)) introduceren. Michael ('Mike') Artin, die nu 89 is, is in Hamburg geboren als de zoon van de grote algebraïcus Emil Artin. In de jaren vijftig van de vorige eeuw kwam hij via zijn promotor Oscar Zariski in aanraking met de Italiaanse algebraïsche meetkunde die toen net door Zariski en André Weil van degelijkere fundamenteen voorzien was. Artin kwam op Harvard ook in aanraking met het werk van Alexander Grothendieck die net de schema-taal aan het ontwikkelen was en in het bijzonder de aandacht op de rol van nilpotenten vestigde die tot dan toe in de meetkunde genegeerd waren. Artin heeft een wezenlijke rol gespeeld in die toen spectaculaire nieuwe ontwikkelingen. Het is opmerkelijk dat hij op hoge leeftijd met kennelijk veel plezier en inzet zo'n zeven jaar een semester lang een inleidend college

algebraïsche meetkunde aan het Massachusetts Institute of Technology in Boston heeft gegeven.

Het is een moeilijke taak om in slechts één semester studenten een indruk te geven van de algebraïsche meetkunde, en zeker als je, zoals Artin, de bewijzen zo kort mogelijk wilt houden. Als compromis is voor deze colleges besloten om over de complexe getallen te werken, maar de presentatie is zodanig dat in een vervolgcursus schema's vrij makkelijk begrepen kunnen worden.

Het boek begint met vlakke krommen in het affiene en projectieve vlak. Hier worden onderwerpen zoals duale en biduale krommen behandeld, onder andere als voorbereiding voor de Plücker-formules. De klassieke aanpak om via resultanten en discriminanten snijmultipliciteiten voor krommen te berekenen wordt gebruikt om de stelling van Bézout af te leiden. Het is leuk te zien hoe een versie van Hensels lemma gebruikt wordt om de orde van verdwijnen van de resultante van twee polynomen met de meetkundige ligging van raaklijnen in verband te brengen.

Het tweede hoofdstuk gaat over affiene algebraïsche meetkunde en benut de nodige commutatieve algebra, waarvan de bekend veronderstelde begrippen en stellingen heel handzaam in het laatste hoofdstuk te vinden zijn. In dit (tweede) hoofdstuk wordt onder andere Hilberts Nullstellensatz afgeleid, morfismen komen aan de orde en localisaties worden besproken. De auteur geeft een mooi bewijs van de sterke Nullstellensatz dat van Rainig afkomstig is (jammer genoeg zonder verwijzing). Gezien de algebraïsche aard van dit hoofdstuk past het begrip *spectrum* goed in dit hoofdstuk, zij het dat dit alleen maximale idealen betreft; niet verwonderlijk in verband met de beperking tot variëteiten.

Het volgende hoofdstuk is een logisch vervolg: het gaat hier over projectieve variëteiten. Dit hoofdstuk eindigt met een korte behandeling van Graßman-variëteiten en met een korte toepassing voor oppervlakken die lijnen bevatten.

In het derde hoofdstuk komt het dimensiebegrip aan de orde nadat er over gehele uitbreidingen en de normalisatie is gesproken. Verder wordt Chevalley's eindigheidsstelling besproken (als X een variëteit is, Y een deelvariëteit van $X \times \mathbb{P}^N$, en de vezels

van de projectie $\pi: Y \times \mathbb{P}^N \rightarrow X$ zijn eindig, dan is π eindig), en een elegant bewijs, afkomstig van Schelter (zonder verwijzing). Het hoofdstuk eindigt met een mooie toepassing voor dubbele overdekkingen van het affiene en het projectieve vlak.

De Zariski-topologie gaat een beslissende rol spelen in hoofdstuk 5. Er wordt onder andere bewezen dat projectieve variëteiten proper zijn (dat wil zeggen het equivalent van compact in de complexe topologie).

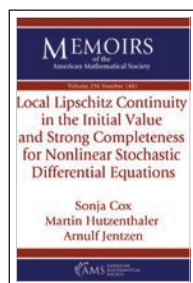
In de volgende drie hoofdstukken wordt er naar een schoven-theoretisch bewijs van de stelling van Riemann–Roch voor krommen toegewerkt. De route wordt verkort door een axiomatische invoering van cohomologie van schoven te geven met behulp van ad hoc gedefinieerde co-rand-afbeeldingen. Verderop wordt dan bewezen dat deze uniek zijn.

De auteur vindt, naar mijn mening terecht, dat er minstens één toepassing van Riemann–Roch gegeven moet worden. Hij geeft twee klassieke toepassingen, het bestaan van een optelling op elliptische krommen, en verder de overeenkomst van de verschillende noties van geslacht van een kromme. Minder klassiek is de stelling van Birkhoff–Grothendieck dat een vectorbundel op $\mathbb{P}^1$ splitst in lijnbundels. Het is verrassend dat de auteur daarvan een mooi kort bewijs opgenomen heeft.

Deze lezingen zijn op een bijzonder zorgvuldige en didactische wijze uitgewerkt. De student krijgt precieze instructies in het voorwoord. Hij vindt aan het einde van het boek een begrippenlijst, een lijst van notaties en een korte becommentarieerde literatuurlijst. Het is verbazingwekkend dat de auteur zoveel gevarieerd op elementaire wijze in zo'n 300 pagina's behandeld heeft. Ook verfrissend zijn de opmerkingen die hij her en der maakt, zoals op pagina 119: "Our conclusions are intuitively plausible, but to be sure about them, we need to study dimension carefully." Of, op pagina 271: "My father, Emil Artin, once said: 'One doesn't really understand differentials, but one can learn to work with them.'"

Kortom, dit boek is niet alleen een aanrader voor een eerste kennismaking met de algebraïsche meetkunde, ook de doorgewinterde meetkundige kan er veel plezier aan beleven. *Chris Peters*

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



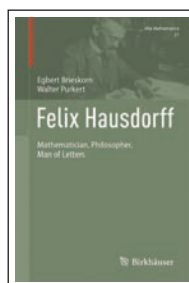
Sonja Cox, Martin Hutzenthaler, Arnulf Jentzen

Local Lipschitz Continuity in the Initial Value and Strong Completeness for Nonlinear Stochastic Differential Equations

AMS, 2024

ISBN 9781470467012

bookstore.ams.org/memo-296/1481



Egbert Brieskorn, Walter Purkert

Felix Hausdorff

Mathematician, Philosopher, Man of Letters

translated by David Rowe

Springer, 2024

ISBN 9783031521348

springer.com/9783031521348