

Flora M. Spieksma

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
spieksma@math.leidenuniv.nl



Flora Spieksma

Uitsnede schilderij Trudy Kramer

Oratie

Optimalisering: hoe fundamenteeler hoe beter

Op 1 juni 2021 werd Flora ('Floske') Spieksma benoemd tot hoogleraar mathematische besliskunde aan de Universiteit Leiden. Dit artikel is een weergave van haar oratie, die vanwege corona uitgesteld was tot 1 september 2023.

Zotteklap

Tijdens de voorbereiding van deze oratie kreeg ik veel bezorgde reacties van genodigden over het onderwerp van deze rede. Dit is natuurlijk zeer begrijpelijk. In ieder willekeurig wiskundeartikel bent u binnen twee regels het spoor volledig bijster. Weest gerust. Dat overkomt mij net zo bij het opslaan van een willekeurig artikel van een analyse- of algebra-collega: ik kom alleen een paar regels verder dan u! Erasmus geeft u wellicht een psychisch steuntje bij monde van de Zotheid [3, XXXII]:

“De wetenschappen zijn immers... de bitterste vijand van het menselijk geslacht... uitgedacht tot verderf der mensheid... Want het primitieve geslacht, dat in het gouden tijdperk de aarde bevolkte, leefde instinctief, alleen volgens de aanwijzingen van de natuur en had geen wetenschap van node”

Mark Kac, een Poolse wiskundige die in 1963 Lorentz hoogleraar in Leiden was, beaamt dit in zekere zin in zijn autobiografie [7, pp. 1–2]:

“In the summer of 1930... I had been stricken by an acute attack of a disease which at irregular intervals afflicts all mathematicians.... I became obsessed by a problem. The symptoms are familiar and easily recognized, especially by the victims' wives, since they consist in a marked increase in antisocial behavior. Loss of sleep and appetite is also frequent. In my case the symptoms were especially pronounced; so much so, in fact, that my family was beginning to worry”

Wetenschappelijk onderzoek en in het bijzonder wiskundig onderzoek lijkt dus een verderfelijke en ziekmakende bezigheid.

Maar... houdt de Zotheid ons niet enigszins voor de mal? Zaten in dat ‘gouden tijdperk’ mensen tevreden naakt in de kou te kauwen op wat verzamelde vruchten en op een met de handen gevangen rauwe vis? Dat gelooft u zelf niet! Mensen hebben toch altijd de drang gehad hun leven te willen veraangenamen en te verlichten door de wereld om zich heen beter proberen te begrijpen en te controleren. Het gevolg van deze begripsdrang is dat u veel meer

wiskundige bagage hebt dan u dacht, en uw hele leven veel meer door wiskunde beheerst wordt dan u zich mogelijk realiseert!

Denkt u alleen al aan het decimale stelsel. Op school hebt u geleerd, dat het getal 2023 van achter naar voren gelezen moet worden als $3 \times 1 + 2 \times 10 + 0 \times 100 + 2 \times 1000$, oftewel als $3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$. Van achteren naar voren neemt de macht van 10 waarmee vermenigvuldigd wordt met 1 toe.

Dit stelsel heeft twee bijzonderheden. Ten eerste is het een zogenaamd positioneel systeem. Dat wil zeggen, dat de positie van een cijfer in een getal zijn bijdrage aan de waarde van dat getal bepaalt. Ten tweede, als een macht van 10 niet ‘mee mag doen’ in de berekening, schrijven we een ‘0’ op de desbetreffende plaats. Positionele systemen, zonder gebruik van de 0, bestonden al in de Oudheid. Maar pas met de introductie van de 0 als tiende cijfer was tegen 900 in India [1, p. 239] ons decimale stelsel ‘klaar’. De overgang van het Romeinse cijfersysteem naar het decimale stelsel heeft echter tot in de zestiende eeuw geduurd!

Een belangrijke rol hierbij is door Leonardo Pisano oftewel Fibonacci, gespeeld. In zijn *Liber Abaci* uit 1202 propageert hij niet alleen het decimale stelsel als een superieur getalsysteem, maar be-

handelt hij ook de bekende algoritmes als ‘onder elkaar vermenigvuldigen’, ‘optellen met onthouden’ en ‘staartdelen’, die een direct gevolg zijn van de decimale schrijfwijze van het getallenstelsel [13, Chapter 13]. Voor de duidelijkheid: het woord ‘algoritme’ betekent ‘rekenmethode’ of ‘rekenrecept’.

Hierdoor heeft het *Liber Abaci* een niet te onderschatten invloed gehad op met name het handelsrekenen! U moet er toch niet aan denken om honderd getallen foutloos op te tellen of twee grote getallen te vermenigvuldigen in Romeinse cijfers? En als u dat toch probeert, denkt u dan niet stiekem decimaal?

De vervolgstap naar het moderne binaire stelsel lijkt klein, maar blijkt pas in de zestiende–zeventiende eeuw bedacht en door Leibniz in zijn artikel van 1703 [9] uitgewerkt. Denk u dus vooral wel binair, want anders hadden onze huidige computers niet bestaan en ook uw huidige ver-Smarte leven niet! Een eeuwige tijd voor een ‘return on investment without bounds’ van wiskundig denken... mag dat tegenwoordig nog?

In de dertiende eeuw zouden decimaal stelsel, optellen met onthouden en onder elkaar vermenigvuldigen voor u als 6 à 8-jarige angstaanjagende kost zijn geweest. Nu is het zo geïntegreerd in uw dagelijkse leven, dat u er niet eens meer over nadenkt.

Ik heb niet voor niets toepassingen binnen het handelsrekenen genoemd. Mijn leerstoel, de ‘mathematische besliskunde’, is onderdeel van zogenaamde toegepaste wiskunde. De mathematische besliskunde is een betrekkelijk jong boompje in het wiskundebos, met twee uitlopers: de discrete besliskunde over ‘kans’-loze problemen en de stochastische besliskunde over ‘kans’-rijke problemen.

Als eerste zal ik wat over de geschiedenis van deze leerstoel vertellen. Vervolgens zal ik met behulp van enkele voorbeelden de discrete en stochastische uitlopers toelichten. Aan de hand van deze voorbeelden zal ik daarna mijn oratie-titel proberen te verklaren. Ten slotte zal ik nog ingaan op mijn visie en hoop voor de toekomst van de besliskunde in Leiden.

Mathematische besliskunde in Leiden

De toegepaste wiskunde in Leiden is opgezet door Guus Zoutendijk. In 1964 kwam hij naar Leiden als hoogleraar numerieke

wiskunde, voorganger dus van onze rector. Hij heeft vervolgens de leerstoelen mathematische statistiek (met hoogleraar Willem van Zwet), waarschijnlijkheidsrekening (met de latere hoogleraar Jaap Fabius), en informatica (met hoogleraar en Himalaya-beklimmer Alexander Verrijn Stuart) weten in te stellen. De naam ‘informatica’ is overigens door Zoutendijk bedacht [8], geheel in de geest van Simon Stevin, de bedenker van (onder andere) het woord ‘wiskunde’.

In 1971 veranderde hij van leerstoel en werd hij zowel hoogleraar mathematische besliskunde als Eerste Kamerlid voor de VVD, tot hij in 1975 naar Delta Lloyd vertrok. In 1976 werd hij opgevolgd door Arie Hordijk, die in 2005 met emeritaat ging. De leerstoel bleef vacant tot de komst van interim WD en mijn oudste wetenschappelijke broertje Frank van der Duijn Schouten per 1 oktober 2020. Na zijn vertrek negen maanden later, ben ik hem op deze leerstoel opgevolgd.

Zoutendijk had daarnaast in 1969 een pas afgestudeerde student als medewerker weten aan te trekken: Lodewijk Kallenberg. Besliskundig Nederland kent hem als hoogleraar-directeur van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde, dat hij van 1993 tot zijn emeritaat in 2010 geleid heeft. Al jaren draait het Landelijk Netwerk mee met mastercursussen binnen het nationale wiskunde-masterprogramma Mastermath. De wiskundige en besliskundige B.V. Nederland heeft hiermee een uniek aanbod aan master-onderwijs dat zijn weerga in de wereld niet kent! Helaas lijkt de enthousiaste interesse van zeer goede studenten hiervoor uit andere EU-landen tegenwoordig actief ontmoedigd te worden. Te veel werk voor de collega’s. Hoezo? Zulke studenten zijn de ‘krenten in de pap’, en die colleges worden toch gegeven.

Kallenberg is in 2010 met emeritaat gegaan en gelukkig is daar in 2019 Odysseas Kanavetas bijgekomen, omdat ik opleidingsdirecteur (afgekort: OD) was geworden.

Ik heb mijn hele academische leven in Leiden gesleten op een half jaar Berkeley na, en wel sinds het ontstaansjaar van het roemruchte witte-mannenschilderij van Rein Dool! Na mijn promotie ben ik dus niet uit Leiden vertrokken, wat tegenwoordig het gebruik is.

De reden hiervoor is verwant aan de titel van mijn oratie. Besliskunde-onderwijs

en onderzoek binnen een theoretisch wiskunde-instituut. Ik voel me zelf onprettig als ik de fundamenteen van de theorie die ik gebruik niet begrijp. In mijn eerste jaar begreep ik niets van kansrekening. Ik heb bij wijze van spreken nog nachtmerries van een kanssometje over hoeveel mensen in de lift van een flatgebouw gemiddeld per verdieping uitstappen. Het was een totaal mysterie voor mij waarom *mijn* redenering fout en de gegeven redenering correct was, en dat maakt een mens onzeker. Twee jaar later met de kennis van het vak maattheorie [4, p. 104, opgave 11] was dat sommetje een trivialiteit, wat een opluchting! Het probleem was blijkbaar het ontbreken van een heldere systematiek om de gestelde vraag te structureren en vervolgens te vertalen naar een wiskundige formulering. Wellicht hielp tegen die tijd ook de toegenomen omvang van mijn intussen opgebouwde ‘trukendoos’...

Voorbeelden uit de besliskunde

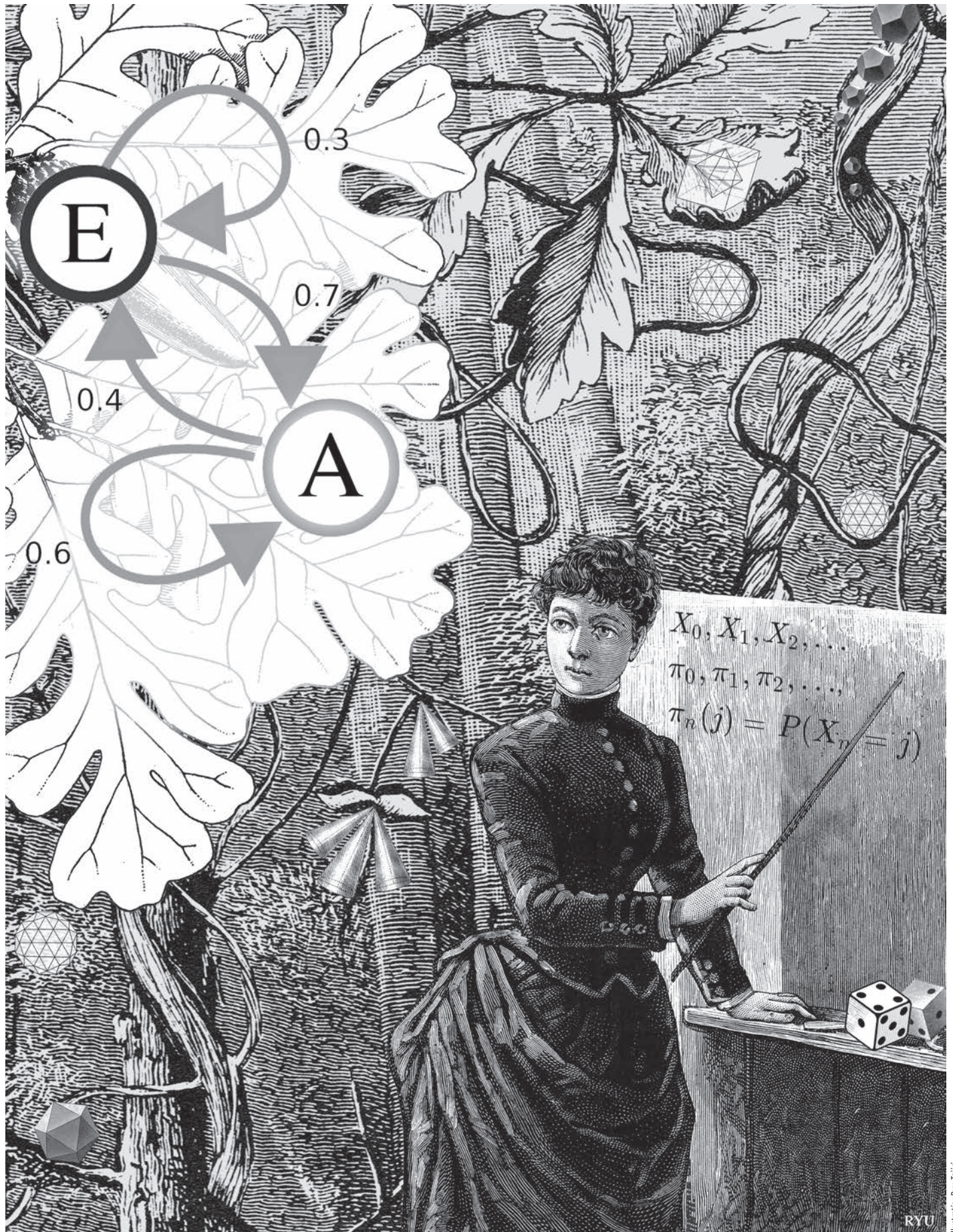
Discrete besliskunde: ‘Kans’-loze voorbeelden

Het eerste ‘kans’-loze voorbeeld is het bachelorproject, genaamd ‘Het bachelorseminarium als toewijzingsprobleem’. De resultaten hiervan worden op ons instituut dankbaar gebruikt.

Het bachelorseminarium als toewijzingsprobleem [11]. Bij onze bacheloropleiding is het bachelor-afstudeerproject via een seminarium ingericht. Hiervoor leveren docenten bij de organisatie een aantal mogelijke projecten in. De studenten mogen vervolgens een voorkeurslijstje van maximaal vijf projecten kiezen.

De organisator moet vervolgens een toewijzing van projecten aan studenten zó maken dat zoveel mogelijk studenten een zo hoog mogelijke voorkeur toegewezen krijgen. Hij heeft dit jarenlang met de hand gedaan en mopperde op de hoeveelheid werk die dit kostte. Waarom dus niet een bachelorproject formuleren over de toewijzing van de bachelorprojecten? Zo gezegd zo gedaan. Ik geloof dat dat het populairste project van dat jaar was!

Toen de hiervoor uitverkoren studente naar de toewijzing van dat jaar keek, zag ze binnen een paar minuten al een betere oplossing. Te proberen om met de hand de beste oplossing te vinden leidt dus niet gegarandeerd tot succes!



Het toewijzingsprobleem is een klassiek probleem waarvoor een algoritme bekend is, dat in de praktijk snel werkt. Dat algoritme zou in principe als uitkomst ook halve projecten aan driekwart student kunnen toekennen. Afronden van zo'n soort oplossing kan een héél slecht resultaat geven, maar het bijzondere van het toewijzingsprobleem is dat dát niet kan gebeuren. Dat kun je bewijzen en onze studenten hebben ook geleerd hoe.

Dit kwam ons goed van pas! Eigenlijk wilden we niet precies de standaardvorm van dit toewijzingsprobleem oplossen. Waarom niet? Als docent vind ik het prima om een lijstje van nieuwe en oude niet-gebruikte projecten in te leveren, zodat de studenten meer keuzemogelijkheden hebben. Maar dat wil natuurlijk niet zeggen dat ik tijd heb om alle projecten van het lijstje te begeleiden. Het moest dus mogelijk zijn voor docenten om een maximum te kunnen opgeven voor het aantal te begeleiden projecten. De vraag was dus of de navenante aanpassing van het algoritme nu wél uitkomsten zou kunnen hebben in de vorm van het toewijzen van een half project aan vijf-achtste student. Door de kennis van de onderliggende wiskunde van dit algoritme, konden we laten zien dat ook in dit geval zulke uitkomsten niet kunnen voorkomen.

Voor al die ouders en kinderen die geleden hebben onder de lotingen voor een middelbare school in Amsterdam, Haarlem,...: de toewijzing van scholen aan potentiële scholieren zou op een analoge manier aangepakt kunnen worden!

Een komische noot: één van mijn bachelor-scriptanten vertelde mij onlangs zelf-voldaan, dat hij en de mede-fans van besliskunde in de bachelorgroep meteen met elkaar gingen onderhandelen over hoe zij het best hun prioriteitenlijstjes konden invullen, zó dat ieder van hen een favoriet project zou krijgen. Inzet van speltheorie, waarover ze in mijn colleges ook het één en ander hadden geleerd. Meer weten is beter en kennis is de kunst!

Het volgende 'kans'-loze probleem komt uit een heel recent project binnen de 'Mathematics and Science Communication and Society' master.

Het enigma achter de Enigma[2]. Als u de film *The Imitation Game* hebt gezien, dan weet u dat de Enigma de machine was die de Duitsers in de tweede wereldoorlog ge-

bruikten voor het coderen van de communicatie met hun gevechtseenheden. Iedere gevechtseenheid had zelf ook een Enigma voor het decoderen van de geseinde gecodeerde berichten. De oorspronkelijke boodschap werd op de Enigma in het commando-centrum gecodeerd, en vervolgens via Morse overgeseind naar bijvoorbeeld een onderzeeër. Op de plaatselijke Enigma werd de gecodeerde boodschap vervolgens ingetypt, waarna de oorspronkelijke boodschap weer tevoorschijn kwam.

U weet dan vast ook dat de Enigma gekraakt is, grotendeels zelfs al voor 1940. U weet misschien niet, dat dit een Gesamtprojekt is geweest van een aantal landen, waaraan niet alleen de Britten, maar met name ook de Polen een cruciale bijdrage hebben geleverd.

Ik zal kort de werking van de Enigma schetsen. Op het oog is het een typemachine, met een extra bord met 26 lampjes, elk met een verschillende letter. Als je bijvoorbeeld een *A* typt, en het lampje met de letter *D* licht op, dan betekent dit dat *A* wordt gecodeerd als een *D*. Er loopt dus een elektrische stroom van de letter *A* naar lampje *D*.

De letter *D* wordt vervolgens overgeseind, en op de Enigma op de onderzeeër ingetypt, waarna lampje *A* oplicht. Dat betekent dat als letter *A* als een *D* wordt gecodeerd, dan wordt letter *D* als een *A* gecodeerd.

Omdat letters dus in paren worden gecodeerd, is het aantal mogelijke coderingen van het alfabet 'slechts'

$$25 \times 23 \times 21 \times \dots \times 3 \times 1 = \frac{26!}{2^{13}13!} \approx 8 \text{ biljoen,}$$

onoplosbaar toch? Dit is niet alles! Het elektrische circuit en daarmee de codering van de Enigma kan worden ingesteld. Bovendien verandert het na elke type-aanslag. Dit is een van de redenen dat het elektrische circuit van zo'n Enigma bij het begin van een codering bekend moet zijn bij de ontvangers. Anders zou decodering onmogelijk zijn. Een extra complicatie voor de krakers, maar... ook voor het beveiligen van de communicatie hierover tussen zender en ontvanger! Veilige communicatie is een zwakke schakel door het stereotype menselijke gedrag om verordonneerde inspanning te minimaliseren! Verandert ook ú niet uw wachtwoord minimaal als u dat te vaak moet doen? Dit heeft het succes-

vol kraken van de Enigma mede mogelijk gemaakt.

Mijn studente heeft een Python-programmaatje van 500 regels geschreven om de werking van de Enigma in de computer na te spelen. Dat hielp haar om uit de verspreide literatuur te begrijpen hoe de machine werkt. Daarna hebben we een formule opgesteld voor de codering van het alfabet afhankelijk van het 'start' elektrische circuit en van het aantal reeds gedane type-aanslagen.

Wat heb je hieraan? Niet alleen een simpeler en korter programma. Het fundamentele aspect is, dat het nu kinderspel is om de formules voor andere alfabetten te bepalen. Het 'patroon' van de codering is door het opstellen van een wiskundige formule geconcretiseerd. Uit de formule volgt dan ook direct na hoeveel type-aanslagen dezelfde codering van het alfabet weer 'terugkomt' ($25 \times 26 = 650$). Het is daarmee bijvoorbeeld ook mogelijk om destijds ontwikkelde kraakmethodes te doorgronden en het effect op de kraakbaarheid van de Enigma ten gevolge van fancy coderingsopties. Een leuk scriptie-onderwerp!

Er is nog een reden waarom ik dit voorbeeld heb gekozen. Volgens sommige mensen was de werking van de Enigma allang bekend en begrepen, en beschreven in onder andere de biografie van Alan Turing door Hodges [5], waarop *The Imitation Game* is gebaseerd. Deze beschrijving is echter nog ver af van een wiskundige formule. De daarvoor belangrijke finesses kun je uit de beschrijvingen in de literatuur niet gemakkelijk opmaken. Erger nog, ondanks het feit dat de werking van de Enigma al geprogrammeerd was, moesten wij nog behoorlijk wat denkstappen zetten om een expliciete formule tevoorschijn te toveren. Een impliciet gevolg is dat de notie 'begrip' niet universeel is. Dit compliceert het doen van interdisciplinair onderzoek, het kost een enorme tijdsinvestering en reduceert met kans één je kans op bevordering tot nul!

Stochastische besliskunde: 'Kans'-rijke voorbeelden

Meer dan de helft van de scripties die ik sinds 2010 heb begeleid betreft onderwerpen uit de discrete dus 'kans'-loze besliskunde. Mijn specialisatie daarentegen behoort tot de 'kans'-rijke, dat wil zeggen stochastische besliskunde. Over stochastiek oftewel kansrekening heeft de

beroemde kansrekenaar ‘Mathemagicus’ Persi Diaconis het volgende gezegd [16, p. vii]:

“Our brains are just not wired to do probability problems very well.”

Steven Tijms spreekt in [16] over de ‘tegen-intuïtieve logica van toeval’. Dit is geruststellend voor een beginnende wiskunde-student, maar maakt het belang van een gedegen theoretische basis des te groter.

Wat zijn de ‘dikste’ wortels van het genoemde kwaad van des-intuïtie? Ik zal dit illustreren aan de hand van de gokkers-valkuil in rood/zwart-roulette.

Gokkers-valkuil in rood/zwart-roulette [15, 16]. Stel we gaan een avondje gokken in het casino van Monte Carlo. Om het simpel te houden, zetten we alleen op rood of zwart in. U weet dat er 18 zwarte, 18 rode en 1 groen vakje (voor de bank) zijn, in het totaal 37 vakjes. Als we op zwart inzetten, en het balletje valt op zwart, dan hebben we gewonnen, en krijgen we onze inzet dubbel uitgekeerd (onze winst is dus gelijk aan de inzet). Als het balletje niet op zwart valt, dan zijn we onze inzet kwijt! Omdat er 18 zwarte vakjes zijn, is de winstkans $18/37$, en de verlieskans $1 - (18/37) = 19/37$. Als we op rood inzetten, krijgen we precies het tegenovergestelde resultaat. De winst- en de verlieskansen zijn echter precies dezelfde als bij inzetten op zwart, en de verlieskans is altijd groter dan de winstkans.

De gokkers-valkuil is precies wat er in Monte Carlo in 1913 aan de orde was: het balletje bleef en bleef maar op zwart vallen, 1, 2, 3, ... keer, het hield maar niet op! De spelers raken er steeds harder van overtuigd dat het volgende balletje toch echt op rood gaat vallen, *de kans moet immers steeds groter worden dat dat gebeurt*. De inzetten op rood stijgen en stijgen, vermogens worden verloren... pas bij de 27ste keer valt het balletje op rood.

De spelers hebben zich als lemmingen linea recta in de valkuil gestort! Immers, de roulette heeft geen geheugen en onthoudt echt niet, waarop ze het balletje de vorige keren heeft laten vallen. De winstkansen voor op rood dan wel op zwart inzetten zijn dezelfde. Dus is elk rijtje van 26 mogelijke uitslagen waarbij het balletje alleen op rode en zwarte vakjes valt even waarschijnlijk. Het rijtje ‘26 keer zwart’ gebeurt met dezelfde kans als het rijtje

‘26 keer afgewisseld zwart en rood’, en die is $(18/37)^{26} < (1/2)^{26} \approx 1/64.000.000$.

Wellicht denkt u nu aan de wet van de grote aantallen. Wat zegt deze in ons geval? Als je dagen lang achter elkaar door zou spelen, dan benadert het percentage zwart en rood in het rijtje successievelijke roulette-uitslagen (als we de groene uitslagen niet meetellen) steeds meer de 50%, voor bijna alle rijtjes! Is dit niet tegenstrijdig?

De finesse zit hem in dat ‘bijna alle’: van alle mogelijke rijtjes van 26 zwarte en rode roulette-uitslagen, is er maar eentje met alleen zwart, of met alleen rood. Er zijn er 26 met precies één rode en 25 zwart, en omgekeerd, en er zijn er precies 325 met 2 zwarte en 24 rode. Maar van de in totaal $2^{26} \approx 64.000.000$ zwart-rood rijtjes, zijn er (met behulp van Stirlings formule) rond de 10.500.000 met precies evenveel zwart als rood. In de wereld van rijtjes van 26 zwarte en rode roulette-uitslagen zijn verreweg de meeste voor ongeveer de helft zwart en voor ongeveer de helft rood. De overige rijtjes worden steeds zeldzamer in aantal ten opzichte van het woud van rijtjes met gemiddeld de helft rood en zwart, naarmate de rijtjes langer worden.

Is het dan onwaarschijnlijk dat het balletje 26 keer achter elkaar op zwart valt in een casino ergens op de wereld? In honderd jaar, met 9000 casino’s die het hele jaar 24/7 open zijn, en waar rood-zwart roulette wordt gespeeld, is die kans vrijwel één. Dit is een voorbeeld van de *wet van de reuze grote aantallen*, geïntroduceerd door Diaconis en Mosteller [15, p. 79]. Misschien zouden de Intelligent Designers deze ook eens in aanmerking kunnen nemen?

Een ander bekend valkuilerig voorbeeld is: hoe groot is de kans dat een staatsloterijwinnaar een tweede keer de staatsloterij wint? Hoe groot is de kans dat iemand in Nederland in een bepaalde tijdsperiode twee keer de staatsloterij wint, zoals mijn eigen betovergrootvader plus-minus 150 jaar geleden... Een leuk puzzeltje voor thuis?

Het volgende voorbeeld van een bekende gokstrategie is gerelateerd aan de wet van de reuze grote aantallen.

Is er een winnende strategie in rood/zwart-roulette? Op internet kunt u de zogenaamde martingaal-strategie als gokstrategie in rood/zwart-roulette aangeprezen vinden:

- begin met 10 (euro) in te zetten;
- elke keer dat u wint, zet u 10 in;
- als u verliest, verdubbelt u de inzet. U blijft uw inzet verdubbelen tot de eerste keer dat u wint.

Stel dat u drie keer achter elkaar verliest, en de vierde keer wint. Dan hebt u achtereenvolgens 10, 20, en 40 ingezet en dus in het totaal $10 + 20 + 40 = 70$ verloren. De vierde keer zet u 80 in, die u wint. Uw winst is dus $80 - 70 = 10$.

Zo’n rij verliezende inzetten, afgesloten met een winnende inzet noemen we een ‘reeks’. Dan is uw winst na elke reeks 10 euro. Omdat er met kans 1 een winnende zet komt, wint u dus altijd! Is er dan een winnende strategie?

De Nederlandse gok-advieswebsite Meneer Casino [10] zegt over rood/zwart-gokken met een startkapitaal van €10.000, waarbij de gokker steeds op rood inzet:

“Maar er komt 100% zeker een moment dat het balletje verkeerd rolt. Tien keer achter elkaar rood komt vaker voor dan je denkt. En als dat moment komt, ben je alle winsten die je met het systeem hebt gemaakt kwijt. Meneer Casino raadt de martingale-strategie dan ook af. En pas op: in de algemene voorwaarden van online casino Bingoal staat dat het casino je account kan sluiten en je geld in beslag kan nemen als je de martingale gebruikt, omdat deze strategie ‘fraude’ zou zijn.”

Jammer, maar bovenal een misleidende uitspraak. Voor de tiende inzet hebt u niet genoeg geld meer om te verdubbelen, en na het tiende verlies bent u plat gezegd platzák!

Nog sterker: u lijdt gemiddeld genomen op *elke reeks* verlies. De kans dat u achter elkaar 10 verliezende inzetten doet is weliswaar *piepklein* ($\pm 13/10.000$), maar dan verliest u ook het *grote* kapitaal van €10.000. De grotere kans om te eindigen met de winst van €10 binnen 10 zetten weegt daar niet tegenop, analoog aan de wet van de reuze grote aantallen. Een eenvoudig sommetje laat zelfs zien dat het gemiddelde verlies per reeks groter wordt naarmate de gokker met een groter startkapitaal begint!

Onze intuïtie laat ons ook in de volgende situatie in de steek.

Bijna één pot nat: gokmodel en wachtrij. Door rood/zwart-roulette te spelen, fluctueert ons kapitaal als een kansproces. We zetten nu steeds €1 in. Met kans 18/37 neemt het kapitaal met één toe, en met kans 19/37 neemt het met één af. De roulette heeft geen geheugen, en dus hangen die kansen niet af van hoe vaak we al gegokt hebben, of hoe het huidige kapitaal tot stand is gekomen. Zo'n proces heet een 'Markov-keten', vernoemd naar de bedenker ervan, de Russische wiskundige Andrej Markov (1856–1922). Markov-ketens spelen een centrale rol in mijn onderzoek.

Vrijwel dezelfde Markov-keten kan een model voor de fluctuatie van de lengte van de rij voor een kassa of scanpunt bij de supermarkt zijn: als er per minuut met kans 18/37 een nieuwe klant in de rij aankomt, en met kans 19/37 een klant klaar is met afrekenen, dan krijgen we hetzelfde kansproces als voor de fluctuatie van het kapitaal in het gokmodel. Er is wel een verschil wanneer de rij leeg is, of de gokker blut: in het wachtrijmodel komt er dan weer met kans 18/37 in de volgende minuut een klant aan bij de kassa. De gokker daarentegen is en blijft blut, en daardoor blijft zijn kapitaal 0.

Bij deze kansen is het gemiddelde aantal klanten bij de kassa gelijk aan 18. Dat is veel, en niet echt goed management van de supermarkt. De *variabiliteit* van het kansproces gooit roet in het eten. Om dit te begrijpen gebruiken we dat de gemiddelde tijd tussen opeenvolgende klant-aankomsten gelijk is aan 37/18 en de gemiddelde duur die de cassière nodig heeft om een klant te helpen is 37/19. Als nu precies om de 37/18 minuut een klant aan zou komen, en de bediening precies 37/19 minuut zou duren, dan zou een klant onmiddellijk geholpen worden en nooit hoeven wachten. Kans-effecten kunnen dramatische gevolgen hebben. En die dramatische gevolgen zijn erger naarmate de gemiddelde tussen-aankomsttijden en bedieningsduren minder verschillen! Intuïtief zou u dit niet verwachten, maar het is precies hetzelfde fenomeen, als waardoor files ontstaan.

Ter afsluiting de beantwoording van een standaardvraag.

Moet u altijd in de kortste rij gaan staan? De supermarkt besluit om een extra kassa (of scanpunt) te openen met een precies even efficiënte cassière. Het kansproces

dat het aantal klanten in de rijen voor de kassa's beschrijft is onderhevig aan beslissingen, namelijk aan welke rij een aankomende klant wordt toegewezen. Een strategie is een toewijzingsregel van aankomende klanten, afhankelijk van de klantenaantallen bij de twee kassa's. Een optimale strategie is de regel die de gemiddelde verblijfsduur van klanten in hun rij minimaliseert. Dit is een voorbeeld van een Markov-beslissingsketen.

Van nature kiezen klanten bij aankomst bij de kassa's degene met de kortste rij! Als sinds 1977 is bekend dat dit ook optimaal is. Hmm, hoe vaak heb ik u net als Bob den Uyl [17] in *Een zwerfend bestaan* niet horen roepen dat u altijd in de foute rij staat als u de kortste hebt gekozen? Dat klopt: twee cassières zijn zelden precies even efficiënt. Het is niet bekend wat dan de optimale strategie is, maar in elk geval niet het kiezen van de kortste rij. De laatste jaren heb ik met promovendi enige technieken ontwikkeld, waarmee we hopen dit probleem voor mijn afscheids-oratie op te lossen!

Een wis en zeker fundament?

Ik heb geprobeerd u op een reisje door mijn wis-wereld mee te nemen. Aan de hand van deze ervaringen zal ik u proberen te overtuigen waarom fundamenteeler beter zou zijn, wat ik daarmee bedoel en waarom ik me daar druk over maak.

Ik heb u al verteld dat ik toegepast wiskundige ben. Recent kwam mij de column 'Wiskundig de ware' van collega Ionica Smeets in *de Volkskrant* [14] onder ogen. Daarin staat dat een 'toegepast wiskundige' iemand is, die binnen een beperkte tijdsduur de beste benadering berekent van een optimale strategie voor een gegeven praktisch probleem. Een toegepast wiskundige is slechts een veredelde rekenaar? Een van mijn studenten geeft in zijn master-scriptie een bondige karakterisatie van toegepaste wiskunde, waarvan ik denk dat die beter past bij onze onderzoekspraktijk [6]:

"In my view Applied Mathematics is about describing real life situations in the language of mathematics. Using this description we can provide insights in the effects of the decisions that can be made."

Toegepast wiskundig onderzoek begint dus met het beschrijven van een probleem in wiskundige taal.

- Zo'n wiskundige beschrijving moet een duidelijke aannames over het probleem bevatten, en een inzichtelijke motivatie voor de keuze ervan. Het is geen goede praktijk om voorwaardes op te leggen omwille van het gemak, of voorwaardes die niet of met grote moeite verifieerbaar zijn. Daarentegen is abstractie om de abstractie overkill.
- Voor het verwerven van een scherp inzicht is het van belang om de onderliggende wiskundige theorie grondig te beheersen. Je moet heel precies weten waarom wat waar is, en waar de rek in zit! De veelvuldige onzorgvuldigheden in de literatuur vereisen alleen maar gebruik te maken van uitspraken die je zelf ook geverifieerd hebt of waarvan je weet dat ze correct zijn. Prachtige vergeten pareltjes uit oudere literatuur kunnen je hierbij helpen.

In de besproken voorbeelden heb ik de zegeningen van fundamenteel onderzoek proberen te illustreren. Ik zal ze hieronder samenvatten.

Toewijzingsprobleem: illustreert het belang van de wiskundige achtergronden voor het verkrijgen van inzicht in de complexiteit van een probleem bij het introduceren van extra eisen.

Enigma: laat zien dat de beschrijving van een probleem in wiskundige taal de structuur van het probleem aan het licht brengt. Dat geeft inzicht in de eigenschappen van het probleem. Programmeren vereist niet het gedetailleerde begrip nodig voor een wiskundige beschrijving! Dat laatste vereist een gedegen wiskundige training.

Gok- en wachtrijmodellen: laten het belang van een abstracte scholing inzake stochastische problemen zien. Onze intuïtie laat ons op meerdere manieren in de steek, waardoor in de media misleidende informatie wordt gegeven. De beloning van een mathematische formulering van een probleem is dat op het oog niet verwante problemen in essentie hetzelfde kunnen zijn.

Daarnaast is mijn ervaring uit colleges en scriptiebegeleidingen dat de theorievorming op het gebied van abstracte stochastische processen, in het bijzonder Markov-processen, niet altijd eenduidig en inzichtelijk is. De beginner wordt overspoeld door een woud aan technische

condities waarvan het merendeel overbodig is voor de basisstellingen. Dit obstrueert begrip meer dan dat het daartoe bijdraagt. Ditzelfde geldt voor de combinatorische speltheorie. Daar speelt bovendien nog een rol dat de argumenten dusdanig verbaal zijn, dat de verificatie van de correctheid ervan moeizamer is dan de complexiteit van het argument lijkt te rechtvaardigen.

Onderwijs en onderzoek: nu en later

Het Leidse besliskunde-onderzoek was en is vooral gericht op de reeds genoemde Markov-ketens en Markov-beslissingsketens. In stochastisch besliskundig Nederland was dit de laatste drie decennia van de vorige eeuw een van de actiefste onderzoeksgebieden. Met de komst van Michel Mandjes hebben we er in Leiden iemand bijgekregen met een grote faam op dit gebied! Welkom! Het interessante van het Leidse besliskunde-onderwijs is dat er in 2010, toen ik als éénpersoons, éénvrouwsclubje overbleef, een prachtig door Kallenberg ontwikkeld besliskunde-bachelorprogramma lag, waarin de fundamenteen werden behandeld van alle besliskunde-vakken die in ons nationale wiskunde masterprogramma werden en worden gegeven.

Het is een populaire richting: ruim 10% van alle bachelor- en master-afstudeerprojecten gaat door besliskunde-handen! Meer dan de helft is 'kans'-loos, dus niet ons onderzoeksveld. Met mijn emeritaat over twee jaar dreigt deze laatste richting te verdwijnen, tenzij er een geschikte opvolger gevonden kan/mag worden. Een stochastische collega kan namelijk een extra vakgebied er niet 'zo maar eventjes' bij doen. Elementaire colleges geven, allé, scripties begeleiden vergt toch iets meer inspanning en kennis van zaken.

Natuurlijk is niets voor de eeuwigheid, behalve de volgorde van de letters van het alfabet en het decimale stelsel. Het is echter wel van belang om een zo 'breed' mogelijk wiskundeprogramma te blijven aanbieden: talent voor discrete besliskunde is niet hetzelfde als talent voor de stochastische kant. Een student moet zijn eigen 'niche' kunnen vinden.

Heel verrassend is een oud-student van mij volgens een van mijn collega's een 'rising star' in het rooster-softwarebureau waar hij werkt, maar hij was geen opvallende student in de stochastische besliskunde. Daarentegen had ik tien jaar

geleden een wis- en natuurkundestudent die bewust een stage had gekozen op het gebied van de veranderende structuur van ons energienetwerk door de overgang naar schone energie. Hij wist een onderhoudsstrategie van de elektriciteitskabels te ontwikkelen voor het Westland, waardoor de 'return on investment'-tijd hierin omlaag is gegaan [6]. Dit is een stochastisch probleem. Discrete problemen waren hoege-naamd niet aan hem besteed, en hij werkt al jaren aan problemen rond het energienetwerk bij TNO.

Wat betreft onderzoek zijn er op dit moment maatschappelijk uitdagende problemen. Markov-beslissingsketens zijn een onderdeel van 'Reinforcement Learning', dat weer tot de Machine Learning (afgekort: ML) behoort. ML is "een vorm van Kunstmatige Intelligentie (AI) die gericht is op het bouwen van systemen die van de verwerkte data kunnen leren of data gebruiken om beter te presteren" [12]. Aangezwengeld door het succes van AlphaGo, het op AI gebaseerde programma dat voor het eerst de mens in Go versloeg, is het een enorme hype geworden. Theoretisch onderzoek naar het waarom, wanneer en hoe goed ML-algoritmes werken, is moeilijk en blijft achter bij het gebruik ervan. Een van mijn statistiekcollega's heeft onderzoek gedaan, waaruit gebleken is dat er gebrek is aan goede validatie en calibratie van ML-modellen. Daarom ligt hier een uitdagend en relevant fundamenteel probleem, zeker als je denkt aan mogelijk grote investeringen op grond van resultaten van ML-algoritmes.

Een andere uitdagende richting betreft de wachttijdtheorie. Lange tijd werd er alleen maar uitgegaan van 'brave' klanten. Nu zult u vast naar een andere rij overlopen wanneer u denkt dat deze sneller is, of u gooit de hoorn op de haak als u te lang in een telefonische wachtrij zit. Als u dat doet, bent u een 'strategische klant'. In de besliskundegroep wordt momenteel onderzoek gedaan aan modellen waarin klanten strategisch gedrag mogen vertonen. Dit introduceert een speltheoretisch element in de modellen.

Ik zou zelf in de toekomst graag problemen rond het verschil tussen 'sociaal optimum' en 'individueel optimum' bestuderen. Hoe zou je prikkels kunnen introduceren opdat het individuele optimum ook sociaal optimaal is? Evenmin nieuw, maar het lijkt alsof er in de huidige maatschappij

meer gestuurd wordt op individuele optima dan op sociale. Voor een individu is het optimaal om van alles over internet te bestellen en gratis terug te kunnen sturen, waarna de teruggestuurde producten worden vernietigd. Duurzaamtechnisch en sociaal is dat zeker niet optimaal!

Call centers hanteren vaak de 80-20 regel als gewenst minimaal serviceniveau, dat wil zeggen dat minstens 80% van de klanten binnen hooguit 20 seconden in gesprek moet komen met een medewerker. Zou u klanten die al langer dan die 20 seconden in de rij staan niet genadeloos lekker laten blijven wachten? Voor u is dat beter, als u beoordeeld wordt op het halen van het vereiste service niveau. Het gevolg is dat zo'n klant beter kan ophangen en opnieuw bellen.

In mijn werkzame leven ben ik regelmatig actief geweest in bestuurlijke kringen. Ik moest mijn weg zoeken als landelijk eerste vrouwelijke wiskunde OD en als eerste vrouwelijke WD in de Leidse Faculteit W&N, ook al was dat interim. Waar een man een stevig standpunt mag hebben, wordt een vrouw met een eigen mening als agressief of onprofessioneel weggezet door een hogere bestuurder, en zij moet dat maar braaf slikken. Het ligt mij nog zwaar op de maag dat ik samen met mijn vrouwelijke kompaan in het managementteam anderhalf jaar geleden ben afgezet, en niet wegens slecht functioneren. Het was soms een toer om inspiratie te vinden, hoe met bepaalde situaties om te gaan.

Een inspirerend voorbeeld was professor Willem van Zwet. Als decaan van de Faculteit W&N moest hij rond 1980 een reorganisatie doorvoeren waarbij drie van mijn wiskundedocenten werden ontslagen. Een daarvan kon rechter worden, voor de twee anderen heeft hij zich persoonlijk ingezet om een andere baan te vinden binnen hun expertiseveld en hun interesse. Dat is hem, maar natuurlijk, gelukt. Exemplarische nazorg avant la lettre en hoe je als bestuurder met je verantwoordelijkheden om zou kunnen gaan. Altijd bereid om met iedereen de discussie aan te gaan en te luisteren. Voor mij een bestuurlijk rolmodel. Het zou fijn zijn om af en toe een blik op zijn portret aan de muur te kunnen werpen, en ook van anderen aan wie ik fijne herinneringen heb. Ik mis onze oude-witte-mannenportretten.

Mogelijk is de verwijdering van deze portretten een individueel optimum voor

sommige collega's en studenten. Ik zou een sociaal optimum willen voorstellen: dat van de omgekeerde beeldenstorm. Geen verwijdering, maar toevoeging van portretten van alumni 'waar wij trots op zijn', zoals

- Tatjana van Aardenne-Ehrenfest, voor de oorlog als wiskundige in Leiden gepromoveerd, maar als huisvrouw mocht ze geen baan hebben. Van Zwet sprak altijd met veel enthousiasme over haar messcherpe vragen tijdens colloquia, waar iedereen voor rilde.
- Ronald Venetiaan, oud-student wiskunde in Leiden en vijftien jaar president van Suriname.
- Zijn dochter Shanti Venetiaan, oud-studente wiskunde in Leiden, doctor in de wiskunde in Suriname, huidige rector van de Anton de Kom Universiteit en hoogleraar wiskundige statistiek, en in alle drie de eerste vrouw in onafhankelijk Suriname.

We zouden als universiteit onze Indische, Surinaamse en Caribische alumni die naar

Nederland zijn gekomen om te studeren uit onze annalen kunnen de-anonimiseren, zoals sultan Henkie, onafhankelijkheidsstrijder en later sultan van Djokja, wiens corpsbul met veel bombarie in het paleis van Djokja pronkt, en die vele anderen die aan onze universiteit gestudeerd hebben en iets voor hun eigen landen betekend hebben.

Vivat academia. Ik heb gezegd.

Dankwoord

Laatst werd mij gevraagd of ik 'trots was als vrouw'? Dat zegt me niets. Maar ik ben ontzettend dankbaar jegens al die mensen die mij gesteund en gehoord hebben. Het is een bijzondere eer voor mij om opvolger te zijn van gerenommeerde wetenschappers als Arie Hordijk en Frank van der Duijn Schouten. Ik dank ook mijn collega's binnen en buiten Nederland voor hun steun en vertrouwen. Peter Stevenhagen, voor al het enthousiasme waarmee hij als opleidings- en wetenschappelijk directeur mij in mijn carrière stimuleerde. Onder de smoes dat "ik mij hiermee op de kaart kon zetten", heeft

hij mij het bewerkelijke Mastermath-college 'Stochastic Processes' weten aan te smeren, waar ik veel plezier van hebt gehad. Als hij in het najaar 2019 geen project 'Vrouwen op het MI' was gestart, was ik zeker nooit hoogleraar geworden. Dank voor de oneindige creatieve energie, waarmee hij altijd overal kansen ziet en grijpt. Ik hoop dat we daar nog lang de vruchten van mogen plukken! Frank van der Duijn Schouten versterkte het MT van Mieke en mij in oktober 2020 als interim-WD. Wij moesten eerst elkaars kat uit de boom kijken, maar het vertrouwen kwam met respect. Hij heeft mijn benoeming tot stand weten te brengen! Wat een eer om zo'n superbestuurder in actie te zien: in coronatijd geheel open zijn conclusies over de problematiek op het MI kunnen trekken op basis van vele gesprekken, zonder een individuele vooropgestelde mening. Gianne Derks, nadat ik tweemaal kortstondig WD ben geweest van het Mathematische Instituut heeft zij de eer de eerste vrouwelijke WD-MI te zijn met een complete bestuurstermijn. Uit een mailing van haar concludeer ik dat zij een mijns inziens vermeend onveiligheidsprobleem dat door drie decanen in drie jaar steeds in een impasse was geraakt, grotendeels heeft laten verdampen. Is dit weer een geval van besturen dat beter verloopt als hier niet alleen mannen bij betrokken zijn? Ik wens haar alle succes toe als directeur van het Mathematisch Instituut.

Referenties

- 1 C. B. Boyer en U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, Wiley, 1989, tweede druk.
- 2 I. Dekkers, *The Enigma Behind the Enigma Machine*, Masterscriptie, UL, 2023.
- 3 D. Erasmus, *De Lof der Zotheid*, vertaling van A. Dirkzwager en A. C. Nielson, Paris, 1960.
- 4 J. Fabius en W. R. van Zwet, *Grondbegrippen van de Waarschijnlijkheidsrekening*, Mathematisch Centrum, 1980, derde druk.
- 5 A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, Princeton University Press, 2014.
- 6 N. Jansen, *Reduction of Return on Investment Time and Failures in the Distribution Grid by Measuring Temperature and Current on Cable Joints*, Masterscriptie, UL, 2014.
- 7 M. Kac, *Enigmas of Chance. An Autobiography*, University of California Press, 1987.
- 8 L. C. M. Kallenberg, U kunt wel gaan, Afscheidsrede, 2010.
- 9 G. W. von Leibniz, Explication de l'Arithmétique Binaire, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1703, pp. 85–89.
- 10 Meneer Casino, Online casino tips, <https://meneercasino.com/online-casino-tips/roulette-strategie-systemen>.
- 11 J. Mourits, *Het bachelorseminarium als toewijzingsprobleem*, Bachelorscriptie, UL, 2019.
- 12 Oracle, What is machine learning? <https://www.oracle.com/nl/artificial-intelligence/machine-learning/what-is-machine-learning>.
- 13 L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer, 2002.
- 14 I. Smeets, Wiskundig de Ware, column 'Ionica antwoordt met wiskunde', *de Volkskrant*, 23 juli 2023.
- 15 H. Tijms, *Suprises in Probability – Seventeen Short Stories*, CRC Press, 2019.
- 16 S. Tijms, *Chance, Logic and Intuition – An Introduction to the Counter-Intuitive Logic of Chance*, World Scientific, 2021.
- 17 B. den Uyl, *Een zwerfend bestaan*, Querido, 1977.
- 18 W. Winston, Optimality of the Shortest Line Discipline, *Journal of Applied Probability* 14 (1977), 181–189.