Jaap Top
Bernoulli Instituut voor Wiskunde, Informatica en Kunstmatige Intelligentie, Rijksuniversiteit Groningen
j.top@rug.nl

Onderzoek

Het Bas/Serra-oppervlak

Het omslag van dit nummer van *Nieuw Archief voor Wiskunde* wordt opgesierd door een fraaie weergave van een oppervlak. Met een vergelijkbaar plaatje werd recent de bijeenkomst 'An Expedition into Arithmetic Geometry' aangekondigd, een workshop in het Lorentz Center die plaatsvond van 30 mei tot en met 2 juni 2023, met als ondertitel 'A Celebration of Bas Edixhoven's Mathematics'. De week werd afgesloten met een goedbezocht en op een breed wiskundig publiek gericht herdenkingssymposium. Het ging die vrijdagmiddag over een thema waar Bas veel belangstelling voor toonde, namelijk verbanden tussen wiskunde en kunst. Tussen april 2014 (het Nederlands Mathematisch Congres in Delft) en mei 2019 (een Algant Alumni Netwerk symposium in Benasque, Spanje) gaf Bas diverse voordrachten over een door hemzelf onderzocht fascinerend voorbeeld van zo'n verband, namelijk de 'getordeerde ellipsen' van de als kunstenaar tot de minimalisten gerekende Amerikaan Richard Serra.

Het tot dusver meest concrete gevolg van deze belangstelling van Bas is te vinden in virtueel museum Tesseract [1], een initiatief van de stichting Ars et Mathesis. Tussen de namen en digitale werken (concreet is in een virtueel museum niet hetzelfde als tastbaar) van bijvoorbeeld Koos Verhoeff, Rinus Roelofs en vele anderen, staat daar ineens Bas Edixhoven. Zijn plaatjes *Serra Twins* 1 t/m 8 tonen verschillende gezichtspunten op drie ontwerpen, zie Figuur 1.

Tijdens het symposium op 2 juni mocht ik aandacht vragen voor dit onderwerp. Daarbij werd het publiek aangemoedigd het als werk van Bas verder te verspreiden, bijvoorbeeld in meetkundecolleges. Een link naar de gebruikte slides is te vinden in [2], en wellicht kan de huidige tekst hiervoor van dienst zijn.

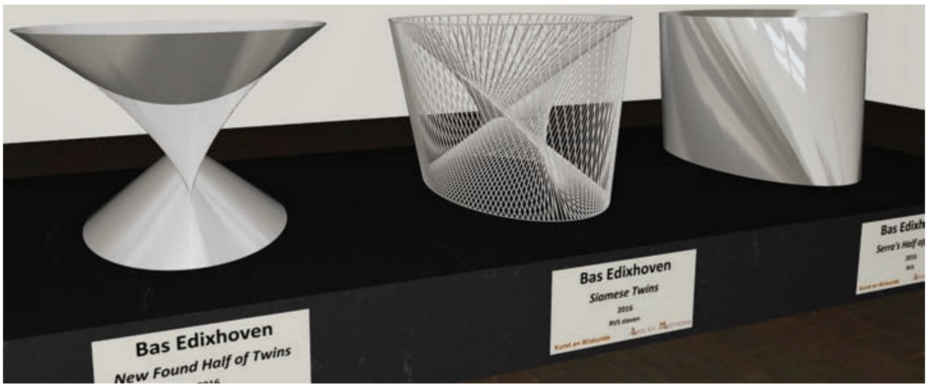
De getordeerde ellips

De serie *The Matter of Time* bestaat uit acht enorme uit staalplaten (zogeheten cortenstaal) gemaakte vormen. Ze staan tentoongesteld in het Guggenheim Museum in Bilbao [3] en ze zijn in de periode 1994–2005 ontworpen door Richard Serra. Een van de ontwerpen (de kleinste...) draagt de naam *Getordeerde ellips*, zie Figuur 2.

Het gevaarte is 427 cm hoog en de stalen plaat is 5 cm dik. De onderrand en de bovenrand bestaan uit identieke ellipsen, en die zijn ten opzichte van elkaar een kwartslag gedraaid. Door om het kunstwerk heen te lopen, is te zien dat overal het zijcontour, dus de manier waarop het uiterste zichtbare punt op de onder-ellips wordt 'verbonden' aan het uiterste zichtbare punt op de boven-ellips, een rechte lijn is. Serra zelf beschreef het ontwerp op een mechanische manier: denk aan een as, met aan beide einden een ellipsvormig wiel waarbij de beide gelijke wiel-ellipsen 90° ten opzichte van elkaar gedraaid zijn. Laat deze as met wielen over de grond rollen. Daarbij raakt hij op ieder moment de grond in twee punten, een op elke ellips. De lijnstukken tussen zulke tweetallen vormen samen de getordeerde ellips.

In Siegen (Duitsland) vond Serra het bedrijf Pickhan dat de enorme staalplaten voor hem kon maken. Overigens werden zijn getordeerde ellipsen al vanaf 1996 getoond in het Solomon R. Guggenheim Museum in New York. De Duitse TV-film *Richard Serra: Thinking on Your Feet* uit 2005 van Maria Anna Tappeiner geeft een boeiend verslag van de ontstaansgeschiedenis van *The Matter of Time*.

De beschrijving uitgaande van een as met twee (in parallelle vlakken draaiende) wielen eraan, levert een goede manier om de getordeerde ellips wiskundig beter te begrijpen. Dat begint met de observatie dat als onze as met wielen de grond raakt, dan gebeurt dat in twee punten (op elke



Figuur 1 Serra Twins van Bas Edixhoven in virtueel museum Tesseract.

Figuur 2 *Getordeerde ellips* van Richard Serra.

ellips één), en de raaklijnen aan de ellipsen in deze punten lopen evenwijdig. Voor Bas was deze eenvoudige constatering een reden om dieper te gaan nadenken, want hij zag direct dat het een verband met elliptische krommen opleverde. Ook begreep hij, omdat er bij elk punt op de ene ellips niet *één* maar *twee* punten op de andere ellips zijn die tot evenwijdige raaklijnen aanleiding geven, dat Serra's getordeerde ellips in zekere zin de helft van een tweeling is. Dit is zonder expliciete formules te beredeneren en zo deed Bas het ook. Om alles zo concreet mogelijk te maken rekenen we hier wel verder met een concreet voorbeeld.

Meetkunde

In de xyz-ruimte nemen we als de 'vloer' waar de onderste ellips C_1 ligt, het vlak $z = -1$. De ellips C_2 aan de bovenkant leggen we in het vlak $z = 1$. Als ellipsen, een kwartslag gedraaid ten opzichte van elkaar, nemen we

$$\begin{aligned} C_2 &: \; x^2 + 2y^2 = 1, \;\; z = 1, \\ C_1 &: \; 2x^2 + y^2 = 1, \;\; z = -1. \end{aligned}$$

De richting van de raaklijn aan C_1 in $P_1 := (x_1, y_1, -1) \in C_1$ is

$$\begin{pmatrix} -y_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en $P_2 := (x_2, y_2, 1) \in C_2$ levert raakrichting

$$\begin{pmatrix} 2y_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Evenwijdig zijn van beide raaklijnen betekent $4x_1y_2 = x_2y_1$. De lijn door P_1 en P_2 wordt geparametriseerd door

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schrijf E voor de kromme in de 4-dimensionale ruimte gegeven door

$$E: \begin{cases} x_2^2 + 2y_2^2 = 1, \\ 2x_1^2 + y_1^2 = 1, \\ 4x_1y_2 - x_2y_1 = 0. \end{cases}$$

De projecties $E \to C_j$ (vergeet twee van de coördinaten) beelden in het algemeen twee punten naar eenzelfde beeld, overeenkomstig met de observatie dat er bij een punt op de ene ellips twee punten op de andere zijn met evenwijdige raaklijnen. Dus per constructie levert

$$\begin{aligned} & E \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3: \\ & (x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als beeld van $E(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ niet alleen iets als Serra's getordeerde ellips op, maar nog meer.

Dit is goed te omschrijven door E anders te bezien. Dat kan bijvoorbeeld door de ellips gegeven door $x^2 + 2y^2 = 1$ te parametriseren: $(-1, 0)$ is een punt hierop, en elke lijn $y = t(x+1)$ snijdt de ellips in een uniek ander punt $(\frac{1-2t^2}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2})$. Hetzelfde voor de andere ellips levert daarvoor de parametrisatie $(\frac{2u}{1+2u^2}, \frac{1-2u^2}{1+2u^2})$. In plaats van de variabelen x_1, y_1, x_2, y_2 voor E, kunnen dan t en u gebruikt worden. Het wordt allemaal nog eenvoudiger als u wordt vervangen door $v = (4t^2 - 2)u - 8t$. Dat levert voor E in de t, v-coördinaten de vergelijking

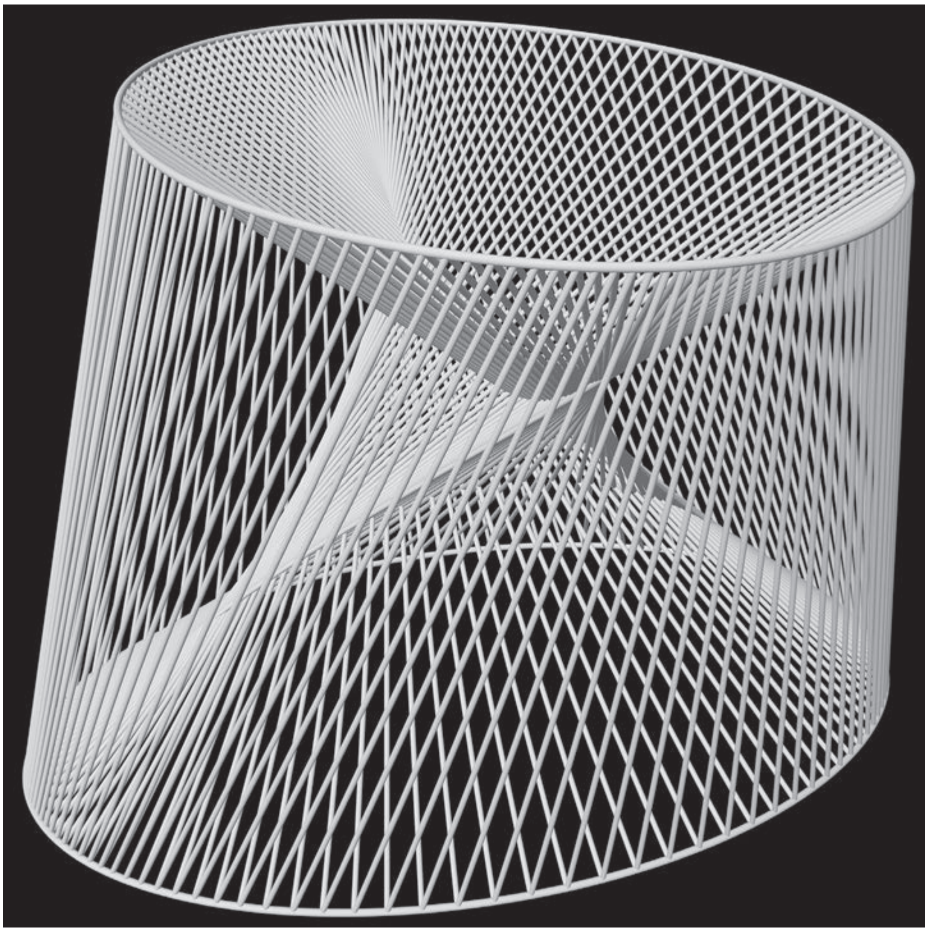
$$v^2 = 8t^4 + 56t^2 + 2.$$

Zo blijkt allereerst dat E *irreducibel* is, dat wil zeggen het is niet de vereniging van twee beide als nulpunten van veeltermen beschreven krommen. Toch bestaat de verzameling $E(\mathbb{R})$ van reële punten op E uit twee disjuncte componenten, namelijk punten $(t, v) \in \mathbb{R}^2$ met $v \geq \sqrt{2}$ en punten met $v \leq -\sqrt{2}$. Noemen we die componenten $E(\mathbb{R})^+$ en $E(\mathbb{R})^-$, dan is Serra's getordeerde ellips het stuk tussen de vlakken $z = \pm 1$ in $\mathbb{R}^3$ in het beeld van $E(\mathbb{R})^- \times \mathbb{R}$ onder de boven gegeven afbeelding $E \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$.

Het beeld van $E \times \mathbb{C}$ is een irreducibel oppervlak, en de reële punten ervan vormen gezamenlijk een soort Siamese tweeling. Al is het een wat ongebruikelijke combinatie van een voor- en een achternaam, 'Bas/Serra-oppervlak' klinkt goed en doet recht aan de personen achter beide delen van wat er in $\mathbb{R}^3$ van te zien is.

Referenties

1 https://www.arsetmathesis.nl/virtueel-museum-tesseract
2 https://www.math.rug.nl/~top/lectures/LinesBetweenMathandArt.pdf
3 https://www.guggenheim.org/artwork/17143



Figuur 3 Het Bas/Serra-oppervlak. Impressie door Walt van Ballegooijen.