

Edward Berengoltz

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
edikabb@xs4all.nl

Geschiedenis

De omzwervingen van Fourier

Vorig jaar was het 200 jaar geleden dat Joseph Fourier zijn meesterwerk over de warmtevergelijking publiceerde, dat de basis vormde voor Fourieranalyse [3]. Ter ere van deze verjaardag brengt Edward Berengoltz verslag van de opmerkelijke levensloop van deze revolutionaire Fransman en laat hij ook zien dat het wiskundige pad dat Fourier tot zijn reeksen leidde heel wat omslachtiger was dan wat we nu in onze tekstboeken lezen.

Het is hartje zomer in de snikhete Egyptische woestijn; de temperatuur kan overdag meer dan 40 graden worden. In deze hel arriveert op 13 messidor in het jaar VI (1 juli 1798) het Franse leger van Generaal Napoleon Bonaparte. Bijna veertigduizend man — militairen, burgers en bevrijde galeislaven — alsmede een duizendtal paarden en tweehonderd veldkanonnen is nu landinwaarts door het verzengende zandlandschap op weg naar Alexandrië en Caïro. De soldaten, die niet eens van veldflessen waren voorzien, waren veteranen in de strijd maar geenszins voorbereid op de hitte. Ze kookten in hun strakke legeruniformen, de rantsoenen waren na één dag op, de luchtspiegelingen waren een foltering en sommigen werden blind door de reflectie van de zon in het gloeiend hete zand. De koelere nachten boden weinig soelaas vanwege de Mammelukse rovers die achterblijvers bestraffen met afranselingen, sodomie en moord. Een Britse zeemacht zou hun spoedig de weg terug versperren; de Fransen moesten door. De situatie leek uitzichtloos: vele soldaten pleegden uit wanhoop zelfmoord [10, Hoofdstuk 15].

Ongetwijfeld zullen verreweg de meesten zich niet hebben verwonderd over hoe dat nu werkte, die brandende lucht en dat schroeiende zand. “Zut alors, wat ís warmte eigenlijk?”, dacht niemand. Althans, bijna niemand.



Gravure van Fourier op latere leeftijd

Naast soldaten waren namelijk ook geleerden mee om Egypte te ontdekken. Een van hen was Jean-Baptiste Joseph Fourier. Zijn werk is tot op de dag van vandaag van enorme waarde. In de inleiding van zijn magnum opus *Théorie analytique de la chaleur* schrijft hij: “L’étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.” [3, p.xiii] Inderdaad liet zijn werkwijze zich kenmerken door nauwkeurig, diepgaand onderzoek en inspiratie uit de werkelijkheid; geen woestijn, hoe ondraaglijk ook, zou hem belemmeren.

We zullen Fouriers leven, zijn geografische en wiskundige omzwervingen, van guillotines tot piramides, volgen en plaatsen in hun historische context. Daarna duiken we dieper in zijn afleiding van wat nu de Fourierreeks heet — en komen erachter dat deze totaal anders was dan hoe we er nu tegenaan kijken! Franse citaten uit contemporaine bronnen worden in de oude spelling gegeven of vertaald.

Jeugd en revolutie

Joseph Fourier werd geboren in 1768 te Auxerre, ten zuidoosten van Parijs. Beide ouders overleden toen hij negen jaar oud was, maar dankzij een dame van aanzien die zijn talent opmerkte en doorgaf aan de lokale bisschop kon hij in 1780 aantreden bij de *École Royale Militaire*, een academie

onder toezicht van Benedictijnse monniken. Met een ‘ongebruikelijke ijver’ (aldus [8]) stortte hij zich op de wetenschap, en de wiskunde in het bijzonder. Hij ontpopte zich tot briljante leerling en fervent wiskundige.

Bij zijn afstuderen stond Fourier voor een keuze: *l’église et l’épée* — het klooster of het leger [2, p. 104]. Hij ambieerde een militaire carrière als ingenieur of artillerist. In een voor de wiskunde gelukkige wending werd hem, ondanks aanbeveling van de grote Legendre, echter toegang tot de *armée* ontzegd: hij was van te lage komaf, “al ware hij een tweede Newton” qua intelligentie. Ook het leven van een monnik was hem niet beschoren, bleek na twee jaar bij de abdij in Saint-Benoît-sur-Loire. Hij keerde onverrichter zake terug naar Auxerre en werd in het pregnante jaartal 1789 lector wiskunde aan de Benedictijner school. Naast wiskunde gaf hij lezingen in de retoriek, geschiedenis en filosofie. Het wierp zijn vruchten af: aan het eind van het jaar produceerde Fourier een resultaat over oplossingen van algebraïsche vergelijkingen dat werd voorgedragen voor de Académie des Sciences in Parijs [8]. Zijn welsprekendheid en vredelievendheid zouden hem later zowel ellende als succes bezorgen.

Tezelfdertijd stond Frankrijk op zijn kop. Aanvankelijk had Fourier sympathie jegens de Franse Revolutie en hij wenste een Europa verlost van absolutistische koningen en weerspannige geestelijken. Hij trad toe tot het lokale revolutionaire comité in Auxerre. Maar aan het begin der jaren negentig kwamen de Jakobijnen aan de macht en ontketenden de Terreur. Fourier was tegen het geweld — terugtrekken was echter niet meer mogelijk. Hij trachtte daarom zekere terdoodveroordeelden te beschermen en meerdere partijen te vriend te houden. Het werd hem spoedig te heet onder de voeten. Zo wendde hij zijn retorische vaardigheden in Orléans aan ter verdediging van een mederevolutionair. Dit zou hem letterlijk de kop hebben gekost, werde hij niet onverwachts gered [9].

In de zomer van 1794 werd Fourier gearresteerd en vastgezet. Zijn appél aan Robespierre werd afgewezen — hem wachtte de guillotine. Het tijdstip was echter fortuinlijk: zijn tribunaal werd voorgegaan door de val der Jakobijnen. De *Convention nationale* voltrok op 10 thermidor (28 juli) de executie van Robespierre. *Citoyen* Fourier



Fouriers redding: de onthoofding van Robespierre, met boven de guillotine de Frygische muts der Jakobijnen. Detail van het wandtapijt *Yngre enevælde* van Bjørn Nørgaard in Paleis Christiansborg in Kopenhagen.

kon een zucht van opluchting slaken: hij werd vrijgelaten.

Een ambitieus programma

Hoewel de Terreur tegen haar einde liep, was de ellende niet plotsklaps weg. De Revolutie had de instellingen van het *ancien régime* te gronde gericht. Er heerste een machtsvacuüm; onderwijs en infrastructuur verkeerden in slechte staat. Het lot van Lodewijk XVI en Marie-Antoinette had Europa bovendien diep geschokt en verbolgen. (Keizerin Catharina de Grote van Rusland sprak van de Franse ‘infectie’ die zich oostwaarts zou verspreiden en van ‘vergift, waanzin’.) Dat buurlanden Groot-Brittannië, Pruisen en Oostenrijk nu Frankrijk met argusogen gadesloegen is zacht uitgedrukt. Maar ja, er was een nijpend tekort aan legerofficieren en technische vaklui. Wat nu?

De oplossing kwam in december 1794 in de vorm van de École Polytechnique (aanvankelijk École Centrale des Travaux Publics). Dit instituut werd opgericht om ingenieurs, zowel militair als civiel, op te leiden. De meetkundige Gaspard Monge (1746–1818), een hooggeplaatste revolutionair, was een van zijn wiskundige aarts-

vaders. De beroemde Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) werd *professeur* analyse en mechanica. Een vernieuwend verschil was dat tussen docenten (*instituteurs*) en examinatoren (*examineurs*), die tevens studenten rekruteerden. Pierre-Simon Laplace (1749–1827) was bijvoorbeeld *examineur* voor analyse, maar zou nooit lesgeven aan de École [5].¹

Wiskunde besloeg een belangrijk deel van het curriculum. (Zie ook Figuur 234.1 in [4, p. 96].) Lagranges analyselessen dekten differentiaal- en integraalrekening à la Leibniz. (Twintig jaar later zou Cauchy de *professeur* analyse worden en de theorie van limieten gebruiken om deze onderwerpen te verenigen; zijn stijl werd echter unaniem gehaat.)² Meetkunde was in handen van Monge, die zijn stokpaardje beschrijvende meetkunde doceerde en veelvuldig gebruikmaakte van tekeningen en diagrammen. Lagrange daarentegen hanteerde uitsluitend formules [5].

Fourier mocht studeren aan de École Normale (een school die begin 1794 kortstondig draaide om nieuwe docenten op te leiden) en presteerde uitstekend. Spoedig werd hij beloond met een uitnodiging om wiskunde te onderwijzen als *répétiteur* (assistent aan een *professeur*) aan de École Polytechnique. Hij las bijvoorbeeld differentiaal- en integraalrekening in de stijl van Lagrange en Laplace, maar ook de theorie van algebraïsche en transcendente functies, exponenten en logaritmen [1, p. 245]. Twee jaar lang werkte Fourier als docent. In 1797 werd hij zelfs Lagranges opvolger als *professeur* analyse en mechanica.

Hij ontwikkelde een vriendschap met Monge die hem meer dan carrière opleverde; in juni 1795 was hij opnieuw gearresteerd — een nasleep van de Jakobijnse affaire — maar snel weer vrijgelaten. Men denkt dat de optredens van Monge en collegae hier cruciaal waren.

À l’Égypte!

Het gesterkte leger van de Franse Republiek was intussen druk bezig. Een zekere goede vriend van Monge was een rijzende ster: deze Generaal Bonaparte veroverde Noord-Italië en versloeg Oostenrijk in 1797. Delen van Oostenrijks en Italiaans grondgebied werden Franse vazalstaten en ook werden de Oostenrijkse Nederlanden en de Bataafse Republiek Franse satellieten. Het *Directoire* vreesde Bonapartes succes en autoriteit en wilde van hem af. Met politie-

ke manoeuvres lukte het hem de directeuren ervan te overtuigen een expeditie naar Egypte goed te keuren.

Tijdens Bonapartes veldtochten in Noord-Italië was zijn vriend Monge (samen met andere geleerden) namelijk al lid geweest van een commissie die zou helpen bepalen welke kunstwerken, boeken, et cetera, zouden worden meegenomen naar Parijs. (Schrijnend detail: een aantal kunstenaars, onder wie de grote Jacques-Louis David, was tegen deze operatie.) Tijdens beider tijd in Italië merkte Monge bovendien op dat er zóveel bekend was over de Griekse en Romeinse beschavingen, en maar bar weinig over de Egyptische. Hij stelde thans voor om een commissie mee te sturen op de expeditie om over Egypte te leren.

Niet alleen zou Bonaparte kennis van Egypte naar Frankrijk halen, maar hij zou een agent der Verlichting worden en het door de Turken 'ontaarde' Egypte naar zijn Hellenistische hoogtij herstellen.

Het plan: versla de Mammelukken³ en organiseer (lees: beschaaf) Egypte. Dat wil zeggen: ontdoe het van zijn Ottomaanse juk om nadien bij Frankrijk in te lijven. Het invasieplan werd strikt geheim gehouden.

Slechts het *Directoire* en de kring rondom Bonaparte zelf waren op de hoogte. Een zo'n vertrouweling was Monge [10, Hoofdstuk 14].

Bonaparte besloot inderdaad een commissie illustere kunstenaars, geleerden en technici — de zogeheten *savants* — samen te stellen, naar Monges idee. Zij werden heimelijk gerekruteerd zonder dat de bestemming werd onthuld. Velen weigerden (David, bijvoorbeeld) en ook Monge, die zichzelf te oud (ruim 50) vond en comfortabel in Italië vertoefde, stemde slechts met grote tegenzin in. Vervolgens slaagde Monge erin om zijn discipel Fourier te werven.

De Franse vloot vertrok op 19 mei 1798. Monge was inmiddels opgebloeid en vergeleek zichzelf met een Argonaut, en Bonaparte met Jason die niet het gulden vlies maar de 'toorts der verlichting' naar een eeuwenlang 'in duisternis gehuld land' zou brengen [10, Hoofdstuk 14–15].

De vermetele *savants* zouden Egypte zowel letterlijk als figuurlijk op de kaart zetten en de fascinatie voor het land aanwakkeren in Europa. Een van hun beroemdste vondsten is bijvoorbeeld de Steen van Rosetta. Het Institut d'Égypte werd na de woestijntocht op 22 augustus opgericht

in een paleis in Caïro om de wetenschappelijke en archeologische onderzoeken te sturen. Monge werd voorzitter en Fourier permanente secretaris. Beiden behoorden uiteraard tot de wiskundeafdeling; idem Bonaparte zelf, die in Parijs reeds over wiskunde had gepraat met Monge en Lagrange.⁴ Naast wetenschap zochten de *savants* oplossingen voor praktische problemen (zoals bier brouwen en ovens bouwen) en vraagstukken van meer zonderlinge aard (bijvoorbeeld betreffende de dadelpalm, krokodillengentaliën, prostitutie, magie, de struisvogel, en — jawel — zand). Monge raakte gefascineerd door luchtspiegelingen en vond een verklaring voor hen dankzij zijn meetkundekennis. Kunstenaars en archeologen trokken met Bonaparte langs de Nijl: hij om de Mammelukken te achtervolgen, zij om alles onderweg te documenteren.

Fourier publiceerde ampel in de wetenschappelijke uitgaven van het instituut, de *Mémoires sur l'Égypte* en de *Décade égyptienne*. Naast wiskundige artikelen schreef hij over onder andere de uitgravingen van graftomben, het watertoevoeren van de Nijl, irrigatie en oasen. Bovendien stuurde hij zelf sommige expedities aan [4, Hoofdstuk 9.1.1]. Al zijn onderzoek werd



Napoleons legermacht in Egypte op 21 juli 1798. Diorama in het Musée de l'Armée in Parijs.

gekaracteriseerd door een nauwlettende en vastberaden werkwijze. Wanneer hij iets wilde beschrijven, moest de onderste steen boven geraken, getuige bijvoorbeeld het volgende citaat in zijn bijdrage *Sur les Oasis* aan [7, p. 311]. Hij schrijft: “De Griekse en Middeleeuwse schrijvers hebben zulke soorten eilanden beschreven met een nauwkeurigheid die wellicht voldoende had kunnen schijnen, ware het niet dat talrijke commentaren zekere onduidelijkheid in de tekst hebben opgeworpen [*répandu*]. Krachtens deze discussies heeft dit onderwerp voldoende onzekerheid blootgesteld dat het noodzakelijk geworden is om haar te verdrijven.” In het vervolg geeft hij exacte lengte- en breedtegraden van de drie door Strabo beschreven oases in Libië en hij gaat in op de tegenspraken tussen een commentaar op de Arabische wijsgeer Aboe'l-Feda en de werken van Herodotus en Ptolemaeus. Als dat geen ‘étude approfondie’ is, eet ik mijn kniebroek op.

Naast het uitvoeren van zulk precies werk en het bundelen van alle resultaten van de leden van het Instituut was Fourier ook diplomaat. Hij was de officiële Franse vertegenwoordiger bij de *divan* van Caïro en bemiddelde vaak tussen de Egyptenaren en Fransen. Zijn retoriek en beleefdheid kwamen hier uitstekend van pas.

Terugkeer naar Frankrijk

Het helse klimaat en akelige ziektes daar gelaten was de expeditie op militair gebied *aanvankelijk* succesvol: Alexandrië en Caïro werden ingenomen en de Mammelukken teruggedreven. In augustus ontdekte de Britse Admiraal Nelson de Franse vloot echter — en reduceerde haar tot gruzelementen, tot ontsteltenis van de meeste Fransen. Daarna kwam de Ottomaanse Sultan met een oorlogsverklaring en in Caïro brak een opstand uit. De Franse expeditie bevond zich in een hachelijk parket.

Begin 1799 trok Bonaparte richting Syrië met zijn leger om de thans gebundelde krachten van Turkije, Engeland en Rusland te bevechten. Binnen enkele maanden keerde hij, zijn mannen verslagen of geveld door de pest, nochtans terug van de veldtocht, welke [10] omschrijft als een *unmitigated disaster*. Vergezeld door zo'n 500 man (onder wie de meeste generaals en *savants*, Monge inclusief) keerde Bonaparte in augustus terug naar Frankrijk. Ondanks het militaire falen was hij immens populair dankzij een sterk propaganda-apparaat.



Foto: Musée St.-Germain, Auxerre

Portret van Fourier als préfet d'Isère

Dat jaar pleegde hij de coup waarmee het *Directoire* viel en hij *premier consul* werd.

Onderwijl had Fourier een expeditie in Opper-Egypte geleid. Eensklaps waren zowel Bonaparte en Monge weg, zodat hij nu de hoogste civiele autoriteit droeg.⁵ De situatie verslechterde: Caïro kwam weer in Turks bezit. Fourier voerde de vredesbesprekingen in een gevaarlijk stadsdeel; een verdwaalde kogel verbrijzelde eens de koffiekkan die hij in zijn hand hield. Pas twee jaar later, tegen het einde van 1801, keerden Fourier en de overblijfselen van de expeditie terug naar Frankrijk — weliswaar met bootladingen aan kennis, maar Egypte was weer in Ottomaanse handen. Bij de terugtocht werd hun boot door de Britten aangehouden, maar met enige moeite lukte het Fourier dezen te overtuigen om hen te laten gaan (wel moesten de Fransen de Steen van Rosetta overhandigen) [6, p. 74]. Hij ging in Parijs verder met de publicaties van vele stukken over Egypte maar hem zou de overdadige lof voor de expeditie later verweten worden als Napoleontische propaganda [8].

Fouriers wens was om zijn baan aan de *École Polytechnique* voort te zetten. Maar de *premier consul* had spoedig andere plannen.

Citoyen Fourier werd in januari 1802 aangesteld als prefect van het *département* Isère. Er is enig debat of dit een bevel van Napoleon was of dat Fourier eventueel had kunnen weigeren. Mogelijk voelde hij zich voldoende verzekerd van zijn positie aan de *École* om er te blijven

doceren, zoals hij wilde. (Parijs was immers een productievere plek dan het verre Isère qua wiskunde.) De brief van onder anderen Monge aan Napoleon om Fourier in Parijs te houden was echter aan dovemansoren gericht [2, pp. 173–174]. Aan de andere kant, Napoleon sprak over Fouriers ‘expectations’ omtrent de positie. Niet alleen klinkt dit niet als een expliciet bevel, maar bovendien suggereert de formulering dat Fourier, na zijn hoge ambten in Egypte, wellicht zelf iets als een prefectuur verlangde. Hoe dan ook ging hij akkoord. De precieze motieven zullen ongewis blijven, zie [6, Hoofdstuk 4.2]. Dat gezegd hebbende, hij zou in latere jaren via brieven naar Parijs proberen om zijn positie te ontbinden, zonder succes [2, p. 249].

Ook als prefect paste Fourier zijn diplomatieke en retorische vaardigheden toe om mensen en werken in goede banen te leiden en geschillen te beslechten. Hij kweet zich met verve. Zijn belangrijkste projecten waren de drooglegging van het grote moeras van Bourgoin voor akkerland en de aanleg van een grote weg tussen Grenoble en Turijn. Fourier was in 1804 aanwezig bij de kroning van Keizer Napoleon I, die hem in 1808 zelfs tot *Baron de l'Empire* heeft benoemd [8].

Hij ging intussen door met het voorbereiden van publicaties namens het Instituut d'Égypte. Het zeer omvangrijke werk *Description de l'Égypte* kwam vanaf 1809 in delen ter perse, hoewel Fourier stellig weigerde om er salaris voor te ontvangen [6, p. 98]. Daarnaast gebruikte hij zijn positie om twee broers uit Grenoble de archeologie in te sturen; eentje zou zijn biograaf worden, de ander zou de Steen van Rosetta ontcijferen [4, p. 585].

Het begin van de warmteleer

Los van dit alles leverde Fourier noeste arbeid omtrent zijn warmteoverdrachtstheorie zodra hij er tijd voor had. Terwijl Napoleon in 1807 bij Tilsit zijn Corsicaanse gebrabbel mat met het vlekkeloze Frans van Keizer Alexander I van Rusland, legde Fourier de laatste hand aan zijn artikel. In december kwam de *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* voor een viermanscomité (bestaande uit Laplace, Lagrange, Lacroix en Monge) in Parijs, waar deze met scheve ogen werd gelezen.

Fourier bestudeerde verschillende aspecten van de warmteleer: straling, afkoeling,

opwarming, enzovoort — alles geïnspireerd door processen uit de echte wereld. Hij gebruikte de techniek van goniometrische reeksen om de *warmtevergelijking* op te lossen, een zekere partiële differentiaalvergelijking van de tweede orde. Deze techniek was niet geheel nieuw, maar gebaseerd op soortgelijk werk van Euler. Fourier heeft haar echter op briljante wijze veralgemeend en breder toegepast. Deze Fourieranalyse avant la lettre was zelfs zo boud dat Laplace en Lagrange — alleszins vriendelijk jegens Fourier — zich niet lieten overtuigen van de methode.

Op de *afleiding* van de warmtevergelijking en haar afhankelijkheid van de afkoelingswet van Newton (1701) kwam ook kritiek, en wel van Jean-Baptiste Biot (1774–1862)⁶ en Siméon Denis Poisson (1781–1840) [9]. Fourier bleef namelijk lang vasthouden aan Newtons wet, die een lineair verband tussen warmteoverdracht en temperatuurverschil postuleert, terwijl Biot uit experimenten een kubisch verband had afgeleid bij hoge temperaturen [4, Hoofdstuk 12.2.2].

Hij zond zijn werk, eind 1811 voltooid, in bij een wiskundewedstrijd over warmtestroming in vaste stoffen. (Mogelijk nadat hij Laplace had verzocht zo'n wedstrijd op te zetten, zie [6, pp.103–104].) Fourier won — van één andere deelnemer — maar Laplace, Lagrange en Legendre hadden alsnog hun twijfels. De *mémoire* werd niet gepubliceerd, maar vormde wel de basis voor zijn latere [3].

De oorsprong van Fouriers interesse in de warmteleer is niet geheel duidelijk. Zeker is dat zijn gezondheid aanzienlijk was verslechterd na terugkeer uit Egypte, met reuma tot gevolg. Hij kon niet gewennen aan het veel koudere klimaat in Isère en zou zich altijd zeer warm kleden. In zijn huis draaide de kachel overuren. Hoezeer dit zijn academische interesse ook beïnvloed hebbe, vast staat dat het concept van warmte in zijn dagelijks leven geworteld was.

De meest gebruikelijke warmtetheorie van die tijd beschreef een vloeistofachtige substantie, de *calor*, die door lichamen of gassen kon 'stromen' van warm naar koud totdat een thermisch evenwicht ontstond. De mysterieuze, massalozes *calor* zou worden aangetrokken door moleculen en kon niet worden gecreëerd of vernietigd. De precieze werking ervan was echter een raadsel. Daarnaast bestond een meer kinematische golftheorie, die warmtefenome-

nen beschreef via de bewegingen van deeltjes [4, p.587].

Fourier was agnost in deze discussie. Hij poogde vooral warmte te beschrijven aan de hand van *wiskunde*, ongeacht de fysieke leest waarop de warmte geschoeid was. In zijn inleiding [3, p.18] schrijft hij bijvoorbeeld: "We zouden slechts onzekere veronderstellingen kunnen vormen over de aard van warmte, maar de kennis van de wiskundige wetten waaraan haar effecten onderworpen zijn, is onafhankelijk van iedere aanname." Hij vervolgt dat het om deze reden noodzakelijk is om alle definities en beginselen duidelijk uiteen te zetten alvorens aan het rekenen te slaan — zoals een goede wiskundige betaamt. Later [3, p.39] herhaalt hij dat de genoemde wetten rigoureus kunnen worden afgeleid: "Indépendamment de toute explication physique." De epigraaf die hij kiest voor Hoofdstuk I — het platonische citaat "et ignem regnunt numeri"⁷ — is een toonbeeld voor Fouriers werkwijze: natuurkundige verschijnselen verklaren aan de hand van wiskunde. Dit vertoont overeenkomsten met Newton, die een eeuw eerder de zwaartekracht op soortgelijke wijze had benaderd.

Terwijl Fourier zo noest werkte aan de warmteleer vanuit zijn *département*, werd Keizer Napoleons leger juist geveld door een gebrek aan warmte na zijn dramatische invasie van Rusland.

Tussen wal en schip

In oktober 1814 wordt Napoleon in de Slag der Volkeren bij Leipzig verslagen door de Zesde Coalitie. Na de winter valt Parijs; de Bourbonmonarchie wordt hersteld en de keizer verbannen. Fourier behoudt zijn prefectuur, nu in dienst van de koning. Op weg naar Elba zou Napoleon door Grenoble gaan; Fourier liet de route veranderen om een ongemakkelijke ontmoeting te voorkomen. Toen Napoleon terugkeerde uit ballingschap, moest Fourier, openlijk koningsgezind, de stad ontvluchten, hopen op het beste.

Napoleon was toornig over Fouriers optreden maar nam hem opnieuw in dienst, nu als prefect van het *département de Rhône*. Spoedig kreeg Fourier orders om monarchisten te 'zuiveren'; hij nam ontslag en verhuisde naar Parijs met een pensioen van 6000 frank van Napoleon.⁸ Dit werd alleen nooit uitbetaald omdat de keizer definitief werd verslagen bij Waterloo. De monarchie werd op 8 juli 1815 opnieuw hersteld en ontzegde Fourier al diens gelden, ook die horende bij zijn baronie, in verband met zijn diensten onder Napoleon. Berooid en werkloos wilde Fourier terugkeren naar het onderzoeksleven. Opnieuw had hij geluk: de prefect van de Seine, een mede-*savant*, stelde hem aan als directeur van het Bureau de Statistique aldaar [9].

In 1816 werd Fourier verkozen als lid van de Académie des Sciences in Parijs — maar Lodewijk XVIII stak ook hier een stokje voor. Pas een jaar later gaf de koning alsnog toe. Tevens begon Fouriers reputatie te verbeteren: in de komende jaren werd hij lid van de Royal Society en de wetenschappelijke academie van St. Petersburg en sloot vriendschappen met onder anderen Ørsted en de jonge Dirichlet en Abel. Hoewel Fourier nooit is getrouwd, genoot hij graag het gezelschap van intelligente dames en hij raakte goed bevriend met de briljante Sophie Germain [6, Hoofdstuk 6.5]. Biot en Poisson bleven Fourier tot en met diens dood echter vijandig gezind en Galois zou hem er postuum van beschuldigen diens inzending naar de Académie opzettelijk te zijn verloren, hetgeen hoogstwaarschijnlijk onwaar was. Hij sprak graag met vrienden en bekenden en verhaalde veel over zijn reis naar Egypte. Dit deed hij zoals alles met een wiskundige nauwkeurigheid in plaats van de gebeurtenissen aan te dikken. Hij bleef ook doorgaan met de



Buste van Fourier in Musée de l'Ancient Évêché te Grenoble



Foto: Stadsarchieven van Auxerre.

Dit standbeeld (Faillot, 1849) van Fourier in Auxerre werd door de nazi's omgesmolten voor wapens tijdens de Tweede Wereldoorlog.

publicatie van de *Description de l'Égypte*, nu sans verwijzingen naar Napoleon [8].

Het hoogtepunt van Fouriers carrière was wellicht 1822. Hij betrad de prestigieuze post van *secrétaire perpétuel* van de Académie en zijn boek [3] over de warmteleer werd gepubliceerd. Het oogstte veel lof en zou de basis van de moderne Fourieranalyse vormen. Laten wij dit werk nader onder de loep nemen.

Fouriers analyse

Alvorens Fouriers concrete wiskunde te beschouwen, is het aardig om op te merken dat de moderne notatie voor 'de integraal over het interval $[a, b]$ ' aan hem te danken is. Leibniz' notatie \int , een gestileerde lange s , voor integralen en primitieven was algemeen in gebruik in Fouriers tijd. (In smallere regels werd soms ook een gewone hoofdletter S geschreven.) Zijn vernieuwing was de notatie

$$\int_a^b$$

met grenzen. Hij had deze al in eerdere artikelen gebruikt maar introduceerde haar pas echt in 1822 [3, p.252]. Ze sloeg meteen aan bij onder anderen Cauchy, en zelfs Poisson moest toegeven dat de notatie *très-commode* was.

Ook de 'methode van Fourier' voor differentiaalvergelijkingen, ook bekend als scheiding van variabelen, speelt een belangrijke rol in zijn werk. Hij heeft deze wel-

iswaar niet bedacht, maar haar toegepast op een partiële differentiaalvergelijking zonder enige aannames op de functies die in de gestelde oplossing voorkomen — en dít was vernieuwend.

We zullen, omwille van de toegankelijkheid van het bronmateriaal, [3] hanteren. Qua inhoud lijkt dit grotendeels op Fouriers *mémoire* uit 1807. (De lezer volge desgewenst [4, Hoofdstuk 9.2.]) Zoals eerder genoemd, vangt hij aan met een lange inleiding waarin hij het probleem schetst en definities en conventies vaststelt.

In Hoofdstuk II behandelt Fourier de warmtevergelijking voor enkele specifieke gevallen (bollen, annuli, et cetera) en vervolgens voor het inwendige van een willekeurig homogeen lichaam. In art. 140-2 (p. 131 e.v.) geeft hij een aantal stellingen, waaruit hij concludeert dat de temperatuur v als functie van de ruimtelijke coördinaten x, y, z en de tijd t voldoet aan de vergelijking

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C \cdot D} \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right), \quad (W)$$

waarbij K, C en D fysische constanten zijn zoals de warmtecapaciteit van het lichaam. Dit heet per definitie de warmtevergelijking. Het bewijs volgt uit de eerdere resultaten over warmtestroming in 'infinitesimale versies' van meetkundige objecten in een kleine omgeving van het punt (x, y, z) . Op de volgende pagina's benadrukt Fourier dat een oplossing $v(x, y, z, t)$ bovendien afhangt van de opgelegde begintoestand op $t = 0$.

De precieze (analytisch meetkundige) afleiding van de warmtevergelijking laten we achterwege. Wel merken we op dat Fourier een *lineair* verband tussen warmtestroming en temperatuursverschil aanneemt, conform Newtons wetten. Specifieker, de functie

$$-K\omega \frac{dv(x, y, z, t)}{dz}$$

geeft de hoeveelheid warmte die tijdens een infinitesimaal stukje tijd dt door een infinitesimaal oppervlakje ω loodrecht op de z -as stroomt naar een punt (x, y, z) wiens temperatuur 0 is op tijdstip t . (De begintemperatuurwaarde 0 is verder niet van belang.) In art. 31 (pp.22-23) noemt Fourier expliciet deze newtonse aanname, waar Biot en Poisson zoveel kritiek op hadden. In de inhoudsopgave (p.604), en alleen daar, voegt hij echter toe dat zij niet

redelijkerwijs kan kloppen *pour certaines limites de température*.

Variabelen scheiden en reeksen afleiden

In het volgende hoofdstuk poogt Fourier de vergelijking (W) op te lossen. Hij neemt een gevulde dikke plaat, oneindig lang in de x - en z -richtingen, ingesloten tussen twee evenwijdige vlakken B en C . Loodrecht hierop laat hij een derde vlak A de plaat in tweeën delen. De onderkanten van B en C heten B' en C' , respectievelijk. De bovenste helft van de plaat (ingesloten door vlakken A, B en C) heeft begintemperatuur 0 en de onderste helft (ingesloten door A, B' en C') is een warmtebron van constante temperatuur 1 (een arbitrair getal). Alles hierbuiten, inclusief de zijvlakken zelf, heeft constante temperatuur 0 . (Hij vergelijkt de situatie met een door ijsblokken omgeven massa boven een kokendwaterbad.) Noem de horizontale richting y en de verticale x , zodat $A = \{x = 0\}$ en de plaat dikte π heeft. Zie de tekening op de volgende pagina.

We willen weten hoe de warmte vanuit het bad door de 'deksel' A de bovenste helft in stroomt. Hiertoe verdelen we de plaat langs de z -richting in oneindig veel vlakken als boven. De warmtevergelijking (W) voor de evenwichtstoestand (dat wil zeggen tijdsafhankelijk) in een dergelijk vlak is

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0. \quad (1)$$

Hierbij moet $v(x, y)$ voldoen aan

$$v(x, \pm \frac{\pi}{2}) = 0 \quad \text{voor alle } x \geq 0 \quad (2a)$$

en

$$v(0, y) = 1 \quad \text{voor alle } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \quad (2b)$$

Nu lost Fourier deze vergelijking op door variabelen te scheiden (art. 167): hij *veronderstelt* dat v een product is van de vorm

$$v(x, y) = F(x) \cdot f(y)$$

voor nader te bepalen functies F en f ; de verantwoording volgt later. Deze aanname invullen in vergelijking (1) geeft dat

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{f''(y)}{f(y)} = 0,$$

waarbij de accentjes afgeleiden weergeven naar de respectievelijke variabelen x dan wel y . Daar de twee breuken ieder van een andere variabele afhangen, moeten ze ge-

lijk zijn aan een *constante*, die Fourier m^2 noemt, oftewel,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = m^2 = -\frac{f''(y)}{f(y)}.$$

De oplossingen hiervan lezen we eenvoudigweg af, namelijk

$$F(x) = e^{-mx} \text{ en } f(y) = \cos my.$$

De verantwoording hiervan is als volgt. A priori is elke functie $f(y) = a \cos(my) + b \sin(my)$ een oplossing, maar vergelijking (2a) noopt $b = 0$. Verder kunnen we aanvankelijk $F(x) = ce^{-mx} + de^{mx}$ zetten, maar voor grote x en $m > 0$ moet de temperatuur klein worden (de warmte komt immers uit A), zodat $d = 0$. (Of andersom als $m < 0$.) De constanten a en c zijn voor later zorg. Uit vergelijking (2b) en het feit dat $m > 0$ zien we dat noodzakelijkerwijs $m \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

We zien bovendien dat iedere lineaire combinatie

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-(2i-1)x} \cos((2i-1)y)$$

eveneens voldoet aan (1), (2a) en (2b) mits

$$a_1 \cos y + a_2 \cos 3y + a_3 \cos 5y + \dots = 1$$

$$\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

We hebben dus precies een Fourierreeks voor $v(0, -)$ als functie van y gevonden!

“We zouden kunnen betwijfelen of zo’n functie bestaat”, aldus Fourier, “maar deze vraag wordt uitbundig verhelderd in het vervolg.”

Hierop volgt een vanuit onze moderne optiek vrij zonderlinge rekenpartij. Men neme alle afgeleides van even orde naar y van bovenstaande vorm van (2b). Dit geeft oneindig veel vergelijkingen, die gelden op heel A (zonder rand), in het bijzonder voor $y = 0$. We hebben dus een (oneindig) lineair stelsel

$$\begin{cases} 1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots, \\ 0 = a_1 + 3^2 a_2 + 5^2 a_3 + 7^2 a_4 + \dots, \\ 0 = a_1 + 3^4 a_2 + 5^4 a_3 + 7^4 a_4 + \dots, \\ \vdots \end{cases}$$

Lineaire algebra in de zin van matrices bestond echter niet. Fourier doet het volgende: hij kapt dit stelsel af op de eerste n vergelijkingen in n onbekenden en begint eerst a_1 op te lossen. Enig gereken geeft voor $n = 7$ (p.169 e.v.) bijvoorbeeld dat

$$a_1(13^2 - 1^2)(11^2 - 1^2) \dots (3^2 - 1^2) = 13^2 \cdot 11^2 \cdot \dots \cdot 3^2.$$

Omdat $(x^2 - 1^2) = (x - 1)(x + 1)$, volgt dat

$$a_1 = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14}.$$

Het is nu duidelijk hoe dit resultaat moet worden uitgebreid als n nadert naar ∞ . Het zo verkregen oneindige product herkent

hij met de Stelling van Wallis als $\frac{4}{\pi}$. Door, mutatis mutandis, de andere coëfficiënten evenzo te behandelen, concludeert hij uiteindelijk dat

$$a_i = \frac{4}{\pi} \cdot (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1}.$$

Wij herkennen deze waarden als de coëfficiënten in de Fourierontwikkeling van een blok golf met waarde 1. En nu komt het volstrekt briljante inzicht van Fourier!

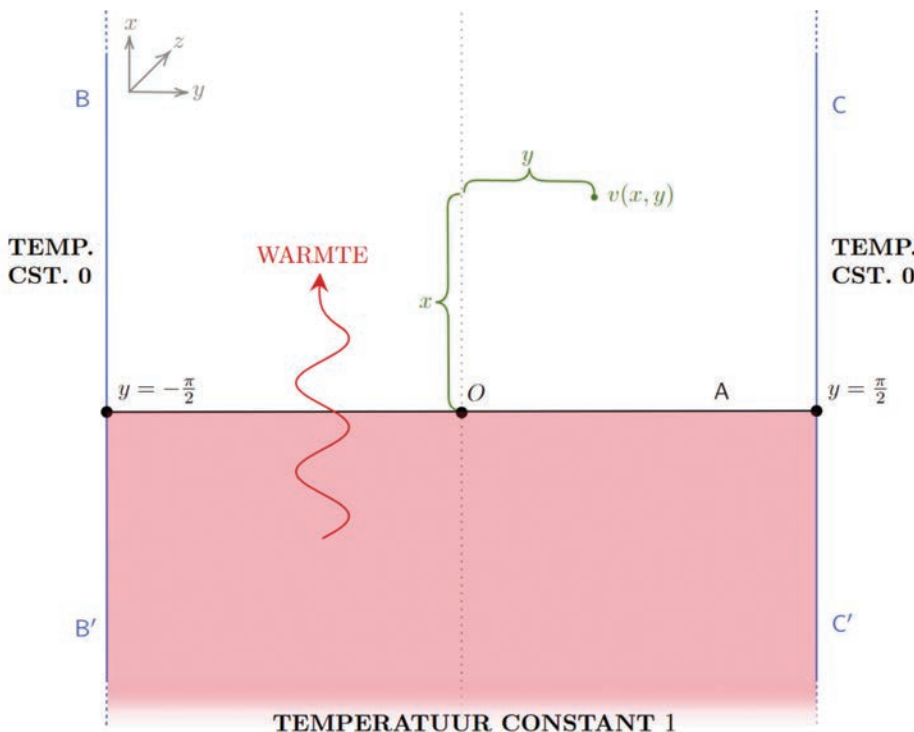
De ‘dekseltemperatuur’ op A moest voldoen aan $v(0, y) = 1$ voor alle $|y| < \frac{\pi}{2}$ (en 0 op de rand). Dit is precies de blok golf wier Fouriercoëfficiënten we zojuist hebben gezien. Stel nu, vervolgt Fourier, dat we een *willekeurige* functie $\varphi(y)$ nemen in plaats van 1. Als we hetzelfde trucje proberen toe te passen, krijgen we links in het oneindige stelsel niet $(1, 0, 0, 0, \dots)$ maar de coëfficiënten van de Taylorontwikkeling van φ rond $y = 0$. Fouriers methode is nu dus om de a_i (oftewel, de Fouriercoëfficiënten) uit te drukken in termen van de Taylorcoëfficiënten van φ . Dit is een lange berekening vol integralen en differentialen. Het eindresultaat, dat hij met recht “très-remarquable” noemt, is de vergelijking (p. 256)

$$\begin{aligned} \pi \varphi(x) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) d\alpha \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sin ix \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \sin i\alpha d\alpha \\ &+ \cos ix \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \cos i\alpha d\alpha, \end{aligned}$$

“welke dient om een willekeurige functie te ontwikkelen als reeks gevormd uit sinussen en cosinussen van meerdere frequenties.”

Merk op dat Fourier *tientallen pagina’s* nodig heeft om tot deze formule te komen. Vanuit ons perspectief is dit potsierlijk; wij stellen bovenstaande uitdrukking met integralen in enkele regels op. Maar dat is juist dankzij de arbeid van Fourier, die dit resultaat op baanbrekende wijze verkregen heeft, hetzij met omzwingingen — twee eeuwen geleden, zelfs nog vóór de formalisering van de analyse.

Het is evenwel niet gemakkelijk om door honderd pagina’s aan berekeningen te ploeteren. De Lord Kelvin zou Fouriers werk een ‘wiskundig gedicht’ hebben genoemd. Het moge duidelijk zijn dat dit dan geen limerickje betreft, maar een Home-risch epos!



Situatieschets van de auteur gebaseerd op Figuur 7 uit [3].

Fin

Helaas was Fouriers gezondheid sinds Egypte nooit goed geweest. Naast reuma en koude-intolerantie leed hij aan een hartkwaal die in 1830 aanzienlijk verergerde. Hij valt op 4 mei van een trap, waarna zijn situatie snel bergafwaarts gaat; op 16 mei krijgt hij een toeval. Terwijl hij in bed met de arts praat, begint hij plotseling te roepen dat hij op sterven is en maant de arts aan vlug azijn te halen. Hij overlijdt diezelfde dag, 62 jaar oud, aan een hartaanval [8]. Er wordt geld ingezameld voor een herdenking (tot weiniger verbazing dragen Biot en Poisson niet bij) en net als zijn mentor Monge wordt hij begraven op de *Cimetière du Père-Lachaise* in Parijs.⁹ Hoewel Fouriers warmtetheorie

en de wiskundige gevolgen daarvan ongetwijfeld zijn belangrijkste nalatenschap zijn, heeft hij nog veel meer betekend. Qua wiskunde bracht hij ook in de algebra en statistiek (een in die tijd nog onontgonnen vakgebied) resultaten voort. Naast de concrete werken over de warmteleer, vormen zijn werkwijze en filosofie een hoeksteen van wat nu mathematische fysica heet. Hij heeft een nieuwe generatie geleerden opgeleid, belangrijk administratief en diplomatiek werk als bestuurder in Frankrijk en Egypte verricht en natuurlijk bijgedragen aan de egyptologie en archeologie.

Fourier was ongetwijfeld een van de grootste geleerden van zijn tijd. Dat ‘tweede Newton’ was misschien zo gek nog niet. ❖

Nawoord

De auteur wil dr. Viktor Blåsjö en dr. Raf Bocklandt hartelijk bedanken voor hun waardevolle assistentie bij, de behulpzame feedback op en natuurlijk de gelegenheid tot het schrijven van dit artikel. Aan de geïnteresseerde lezer raad ik de volgende bronnen aan voor meer informatie. De eerste zes hoofdstukken van [6] vormen een aardige biografie van Fourier; voor zijn specifiek wiskundige werken (en algemener die uit negentiende-eeuws Frankrijk) kan echter beter [4] worden geraadpleegd. De boeken [1] (in het Frans) en [5] (in het Engels) zijn omvangrijke werken over de *École Polytechnique*. Ten slotte is [10] een uitstekende biografie van Napoleon, zijn expeditie naar Egypte inclusief. Een andere biografie, die zich specifiek richt op Napoleons betrekkingen tot de wetenschap en de *savants*, is [2] (dank aan dr. Gerard Alberts voor deze verwijzing).

Noten

- 1 Voor een beknopte tijdlijn van de *École* tussen 1794 en 1816, zie [2, pp. 200–201]. Voor een lijst studenten en staf, zie [5, pp. 235–236].
- 2 Na afloop van zijn 65ste lezing uit een reeks van 50 (!) op 12 april 1821 zou Cauchy vrolijk verder orenen over een nieuw onderwerp — waarop de studenten pardoes de zaal verlieten [5, p. 242].

- 3 De formidabele krijgerslaven die onder andere Egypte bestuurden namens de Ottomaanse Sultan.
- 4 Voor een volledig overzicht van de afdelingen, zie [2, p. 94].
- 5 Toen duidelijk werd dat Monge zou vertrekken, volgde een ontzette Fourier hem zelfs de straat op [6, p. 72].
- 6 Biots wrok had mogelijk voorkomen kunnen

worden; in zijn *mémoire* baseert Fourier een zekere berekening op Biots eerdere resultaten zonder dit te erkennen.

- 7 Ook het vuur beheersen de getallen.
- 8 Fouriers motieven hieromtrent zijn niet geheel zeker, zie [6, p. 112].
- 9 Monge zou later naar de crypten van het Panthéon worden verplaatst, waar ook Lagrange ligt.

Referenties

- 1 B. Belhoste, *La formation d'une technocratie. L'École Polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Belin, 2003.
- 2 J. Fischer, *Napoleon und die Naturwissenschaften*, Franz Steiner Verlag, 1988.
- 3 M. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, père et fils, 1822.
- 4 I. Grattan-Guinness, *Convulsions in French Mathematics, 1800–1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics, Vol. 2: The Turns*, Birkhäuser, 1990.

- 5 I. Grattan-Guinness, *The Ecole Polytechnique, 1794–1850: Differences over educational purpose and teaching practice*, *The American Mathematical Monthly* 112(3) (2005), 233–250.
- 6 J. Herivel, *Joseph Fourier. The Man and the Physicist*, Clarendon Press, 1975.
- 7 Institut d'Égypte, *Mémoires sur l'Égypte, publiés pendant les campagnes du Général Bonaparte*, Vol. 1, P. Didot l'aîné, Paris, an VIII [1800, EB].
- 8 В. А. Никифоровский, Математик, общественный деятель, гражданин. К 225-летию

со дня рождения Ж.Б. Фурье, *Вестник Российской академии наук* 63(8) (1993), 743–746 [V.A. Nikiforovski, Wiskundige, publiek figuur, citoyen. Ter gelegenheid van de 225ste verjaardag van J.B. Fourier, *Bulletin van de Russische Academie van Wetenschappen* 63(8) (1993), 743–746].

- 9 J.J. O'Connor en E.F. Robertson, *Jean Baptiste Joseph Fourier*, *MacTutor History of Mathematics*, University of St Andrews, Scotland, 1997.
- 10 A. Zamoyski, *Napoleon. The Man behind the Myth*, William Collins, 2018.