

## Walter D. van Suijlekom

IMAPP – Wiskunde  
Radboud Universiteit Nijmegen  
waltevs@math.ru.nl

### Oratie

# Opgetrommeld voor spectra

Walter van Suijlekom is sinds 1 december 2021 hoogleraar niet-commutatieve meetkunde aan de Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de Radboud Universiteit. Dit artikel is een weergave van zijn oratie op 7 september 2022, met als onderzoeksvraag uit de spectraalanalyse: kun je de vorm van een object reconstrueren, puur en alleen door ernaar te luisteren?

De toehoorders van mijn oratie zijn muzikaal verwelkomd — letterlijk opgetrommeld — door trommelgroep RADAC, zoals het in de zeventiende eeuw gebruikelijk was om mensen bij elkaar te roepen in dorpen en steden (zie Figuur 1). Zij hebben kunnen horen, en misschien zelfs kunnen voelen wat voor een verschillende klanken trommels van verschillende formaten kunnen produceren. Dit gegeven vormt de rode draad van mijn verhaal: het *spectrum van trillingsfrequenties* van een object — zoals een trommel — zegt duidelijk iets over de meetkundige vorm ervan. Maar zegt het ook alles? De wiskunde hierachter is hoogst interessant, en dat wil ik graag laten zien, en horen. De tweede boodschap die ik wil meegeven is dat wiskunde bovenal mensenwerk is, en simpelweg niet zou bestaan zonder de vruchtbare interactie tussen wiskundigen.

#### Spectra en meetkundige vormen

Laten we beginnen met het woord *spectrum*. In de wiskundige literatuur duidt deze term al vroeg op in het werk van David Hilbert die het begrip omschrijft als een collectie van frequenties [10]. Ruim

twintig jaar later neemt John von Neumann het concept over binnen het wiskundig bouwwerk van de kwantummechanica [21]. Dankzij hun werk kunnen we nu op een vergelijkbare manier praten over bijvoorbeeld het auditieve spectrum, bestaande uit de trillingsfrequenties van een object,

of het visuele spectrum, bestaande uit de stralingsfrequenties van licht.

Het was echter mijn landgenoot Hendrik Lorentz die als natuurkundige de cruciale wiskundige vraag stelde voor het ontstaan van de zogeheten *spectrale meetkunde*. Ik vind dit zelf een prachtige illustratie van hoe onderzoek op het grensvlak van wiskunde en natuurkunde in zijn werk gaat, dus ik neem jullie graag even mee naar het begin van de twintigste eeuw.

Lorentz was toen al een gevierd en zeer gerespecteerd fysicus. Hij had in 1902 de



Figuur 1 Trommelgroep RADAC trommelt het publiek op voor de oratie.



Theo Hafmans

Walter van Suijlekom

# in de meetkunde

Nobelprijs ontvangen en was al 25 jaar als hoogleraar verbonden aan de Universiteit Leiden. Ondertussen werd hij veelvuldig uitgenodigd voor voordrachten en colleges in het buitenland. Zo ging hij per stoomboot naar de Verenigde Staten om daar colleges te geven, en was dus maanden van huis. Hij gaf ook een voordracht op het Internationale Wiskundecongres van 1908 in Rome, ondertussen genietend van het Italiaanse leven — iets wat ik persoonlijk erg goed kan begrijpen. In oktober 1910 was hij gasthoogleraar in Göttingen waar hij de zogeheten Wolfskehl-voordrachten verzorgde. Dat waren maar liefst zes lezingen in vijf dagen, over zeer gevarieerde onderwerpen [14].

In zijn derde lezing in Göttingen stelde Lorentz dat het elektromagnetische stralingsspectrum van een driedimensionaal object zich voor hoge frequenties onafhankelijk zou gedragen van de precieze vorm van dat object, en een veelvoud is van diens volume:

“Hierbei entseht das mathematische Problem, zu beweisen, dass die Anzahl der genügend hohen Obertöne zwischen  $n$  und  $n + dn$  unabhängig von der Gestalt der Hülle und nur ihrem Volumen proportional ist.”

[“Hier ontstaat het wiskundige probleem te bewijzen dat het aantal voldoende hoge boventonen tussen  $n$  en  $n + dn$  onafhanke-

lijk is van de vorm van de omhullende en slechts evenredig met het volume ervan.”] Slechts een paar maanden later, eind februari 2011, leverde de jonge wiskundige Hermann Weyl, eveneens werkzaam in Göttingen, hiervoor het bewijs, uiteraard met de nodige wiskundige precisie [22]. Dit bewijs van Lorentz’ vraagstelling is zelfs toepasbaar in hogere dimensies. Feitelijk is toen de grondslag gelegd voor de spectrale meetkunde: het vakgebied in de wiskunde dat zich bezighoudt met de vraag of vormen volledig worden bepaald door hun trillingsspectrum.

In de natuurkundige literatuur uit die tijd is van dit bewijs niet snel meer iets terug te vinden, noch van bijvoorbeeld een referentie naar Weyls werk. Wel schreef Lorentz er een jaar later over. Hij spreekt nu niet meer van een probleem maar van een bewezen feit, én doet dat dit keer in het Frans:

“on démontre que le nombre des modes de vibrations possibles est proportionnel à  $V$  et indépendant de la forme du corps” [15]

[“hier wordt aangetoond dat het aantal mogelijke trillingsmodes evenredig is met  $V$  en onafhankelijk van de vorm van het lichaam”] Dit citaat is afkomstig uit de vijfde en laatste van zijn Michonis-lezingen die hij eind november 1912 gaf aan het prestigieuze Collège de France in Parijs (zie Figuur 2). Ik moet toegeven dat ik tijdens de

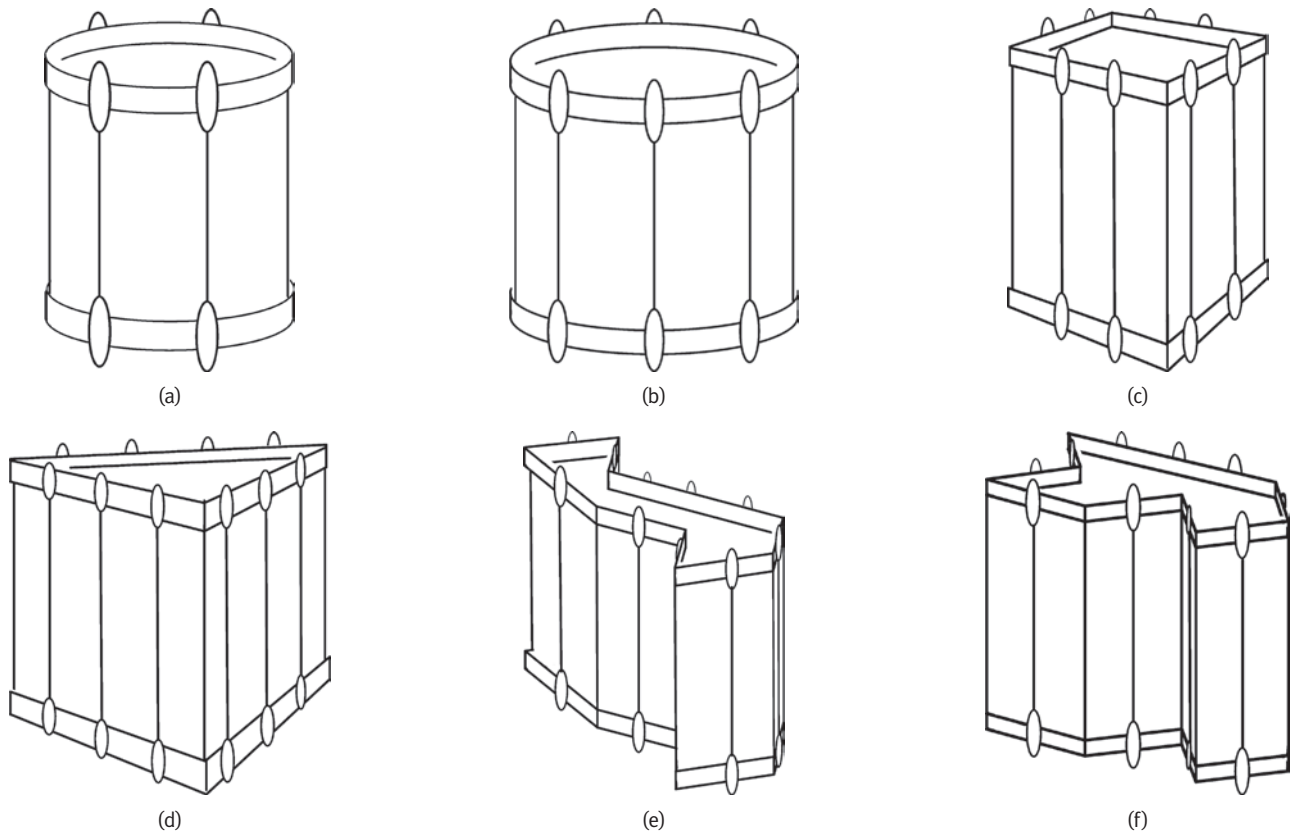
voorbereiding op deze lezing eerder dit jaar in de bibliotheek van het Collège met rode oortjes de briefcorrespondentie tussen Lorentz en het instituut heb zitten lezen — opnieuw in prachtig Frans. We zien trouwens meteen wat een talenwonder Lorentz was; iets wat hem eerder al de ideale voorzitter van het beroemde Solvay Congres had gemaakt, met deelnemers als Albert Einstein, Marie Curie, Max Planck, Henri Poincaré, et cetera. Tijdens dat congres kon Lorentz naast zijn uitstekende wetenschappelijke overzicht, ook zijn talenkennis inzetten. Niet alle Franse deelnemers spraken namelijk Duits, of de Duitse deelnemers Engels. (Veel van deze achtergrond is geput uit de twee uitgebreide recent verschenen biografieën van Lorentz [2, 12].)

Vanwege de politieke onrust in die tijd kwam Lorentz hierna niet meer in Duitsland, en ook Göttingen hield op te bestaan

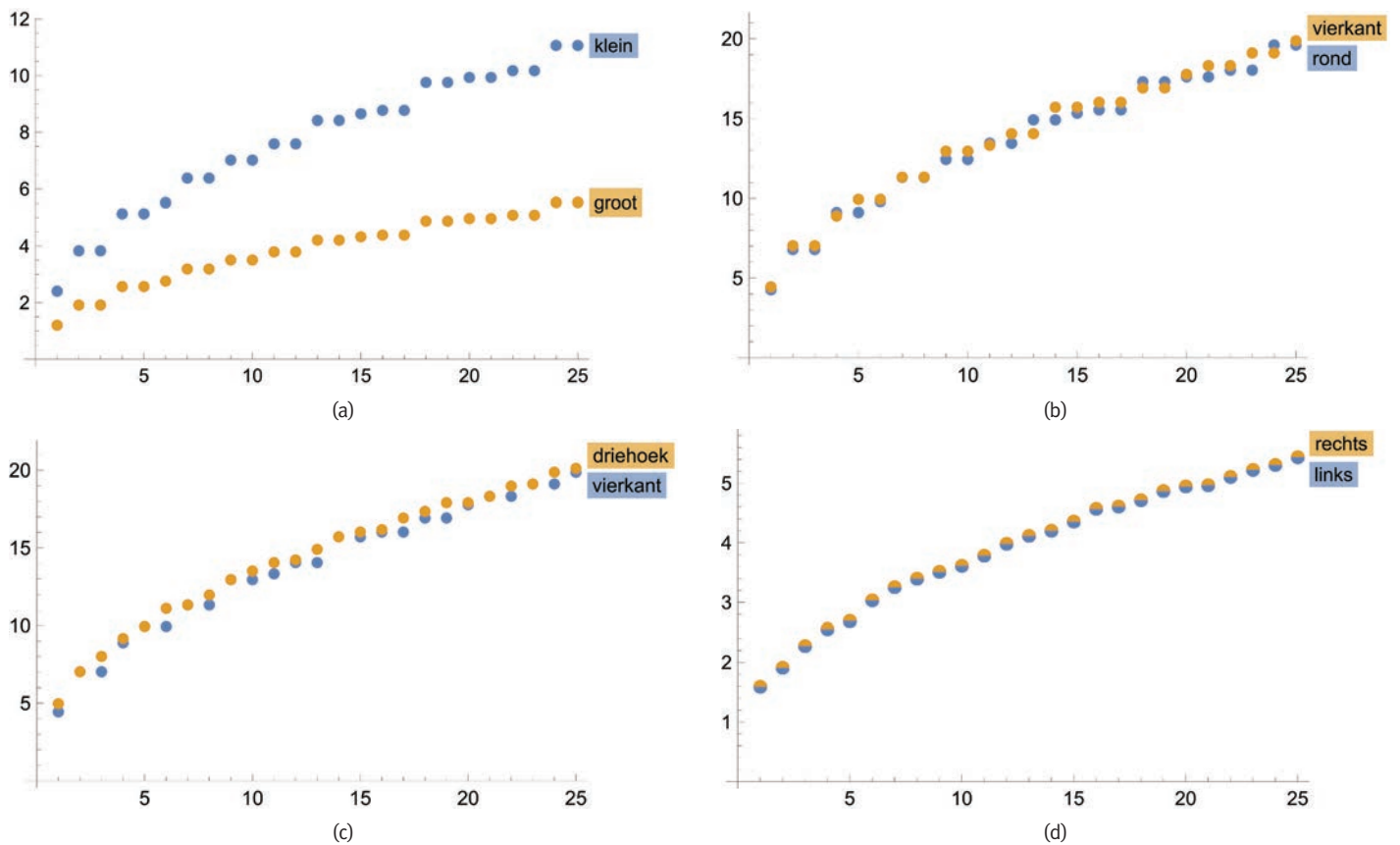


Fotografie: Archives du Collège de France

**Figuur 2** Aankondiging van de Michonis-lezingen van Lorentz op het Collège de France in november 1912.



**Figuur 3** Trommels in verschillende vormen.



**Figuur 4** (a) De eerste 25 trillingsfrequenties van twee ronde trommels van verschillende doorsnede. (b) De eerste 25 trillingsfrequenties van een ronde en een vierkante trommel met gelijke oppervlakte. (c) De eerste 25 trillingsfrequenties van een vierkante en een driehoekige trommel (gelijkbenig en rechthoekig) met gelijke oppervlakte. (d) De eerste 25 identieke trillingsfrequenties van twee verschillende trommels.

als episch centrum van de wiskunde. We moeten daarom zo'n vijftig jaar wachten op de verdere ontwikkeling van de spectrale meetkunde. In 1966 publiceerde wiskundige Mark Kac het artikel 'Can one hear the shape of a drum?' ['Kun je de vorm van een trommel horen?'] [11]. U begrijpt dat deze titel mij niet alleen als wiskundige treft, maar mij ook als slagwerker zeer aanspreekt. We stellen ons de trommel voor als een oppervlak en bekijken alle mogelijke trillingsgolven van dit oppervlak die gelijk aan nul zijn aan de rand. Dit is onze trillende trommel: het vel trilt maar de rand van de trommel ligt vast. De vraag is nu: als we alle trillingsfrequenties van het oppervlak kennen, kunnen we dan de vorm van het oppervlak achterhalen?

Ffeitelijk vormde Kac' werk een verfijning van de stelling van Lorentz, en het bewijs van Weyl want daarmee was uit het trillingsspectrum in ieder geval het volume, of, in het geval van de trommel de oppervlakte te achterhalen. Dit strookt wellicht met uw intuïtie: grote muziekinstrumenten (zoals een contrabas) maken doorgaans een lager geluid dan kleine instrumenten (zoals een viool).

Laat ik een voorbeeld geven: voor de twee trommels in Figuur 3(a) en 3(b) staan in Figuur 4(a) de eerste 25 trillingsfrequenties uitgezet. De kleine trommel heeft inderdaad hogere frequenties dan de grote, zodat uit het geluid valt af te leiden welke trommel er klinkt.

De vraag van Kac gaat echter nog een stap verder en gaat ook over verschillende vormen, zoals een ronde en een vierkante trommel, in dit geval van gelijk oppervlak. Zie bijvoorbeeld de twee trommels in Figuur 3(b) en 3(c). Opnieuw is het de vraag of het mogelijk is om het verschil in vorm te horen tussen deze twee trommels, ongeacht hun precieze afmetingen. Als we kijken naar de eerste 25 trillingsfrequenties (Figuur 4(b)) zien we dat deze van elkaar verschillen zodat het antwoord weer bevestigend is. Wat ook opvalt aan deze figuur is dat de frequenties voor beide trommels globaal gezien dezelfde parabolische vorm volgen: dit is een goede illustratie van de wet van Weyl: voor voldoende hoge boventonen hangen deze alleen af van het volume — of in dit geval oppervlakte — van de trommel.

Laten we het nog iets ingewikkelder maken en naar een vierkanten en een driehoekige trommel luisteren, zoals de twee



Figuur 5 Rolmaat en laser-afstandsmeter.

trommels in Figuur 3(c) en 3(d). De eerste 25 trillingsfrequenties staan aangegeven in Figuur 4(c) en laten zien dat deze trommels een verschillende geluid maken.

Tot slot twee trommels met een wat exotischer vorm, van gelijke oppervlakte en met dezelfde omtrek, zie de twee trommels in Figuur 3(e) en 3(f). De eerste 25 trillingsfrequenties staan aangegeven in Figuur 4(d) en het verbluffende resultaat is dat ze een identiek trillingsspectrum hebben. Deze twee trommels hebben dus een verschillende vorm, maar klinken precies hetzelfde.

Onze conclusie is dus dat er nog een puzzelstukje ontbreekt als we vormen volledig met behulp van spectra willen beschrijven. Ik zal daarover straks een tipje van de sluier oplichten, maar eerst wil ik nog meer bewijsmateriaal verzamelen voor het gebruik van spectra bij het beschrijven van vormen, en wel in de natuurkunde. Die twee invalshoeken van wis- en natuurkunde vullen elkaar goed aan, en zijn ook een typerende eigenschap van mijn eigen onderzoek.

### Spectra in de natuurkunde

Het was natuurlijk ver voor Lorentz al bekend dat spectra een cruciale rol spelen in de waarneming van samenstelling en vorm.

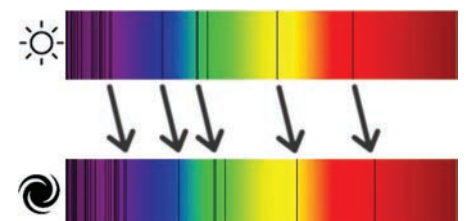
Voor het visuele spectrum moeten we terug naar Isaac Newton. Sterker nog, hij is degene die de term spectrum in de natuurkunde heeft geïntroduceerd om aan te geven hoe wit licht is opgebouwd uit licht van verschillende frequenties, iets wat hij al in de zeventiende eeuw liet zien met behulp van het prisma.

Maar, hoe kunnen we nu vormen meten met behulp van spectra? Laat ik dichtbij huis beginnen: afstanden meten we vaak niet meer met een klassieke rolmaat, in plaats daarvan gebruiken we het spectrum van laserlicht, zie Figuur 5. En mis-

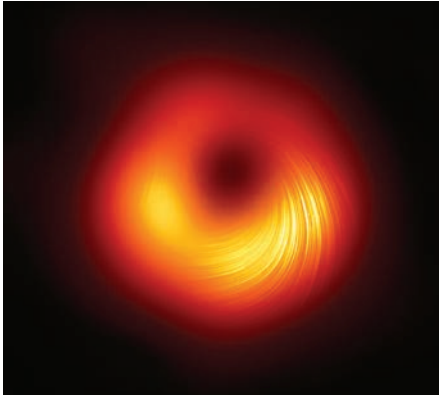
schien niet in uw huiskamer, maar dan wel in een lab, analyseren we het spectrum in Röntgenstraling in bijvoorbeeld een elektronenmicroscop, en als we nog verder inzoomen, zijn ook waarnemingen in een deeltjesversneller zoals die van het CERN in Zwitserland gebaseerd op resonantiespectra. Allemaal met als doel de samenstelling, vorm en eventuele snelheid van een object of deeltje spectra te bepalen.

In de sterrenkunde spelen spectra ook een cruciale rol, simpelweg omdat metingen aan ver gelegen sterrenstelsels nooit ter plaatse kunnen worden gedaan. Echter, door goed te kijken naar het visuele spectrum van bijvoorbeeld een ster of cluster, en in het bijzonder naar de locatie van zogeheten absorptielijnen — kleine donkere lijnen in het spectrum — kunnen we de chemische samenstelling van ver gelegen sterren of clusters bepalen, en bijvoorbeeld hun snelheid uitrekenen (Figuur 6). Aan de hand van dit soort waarnemingen bepalen we de vorm en kromming van het universum door de objecten die er door bewegen spectraal te observeren. Dergelijke waarnemingen hebben zelfs tot de schokkende conclusie geleid dat het universum zelf aan het uitdijen is!

Maar we hoeven ons niet te beperken tot het visuele spectrum, want voor waarnemingen met behulp van radiotelescopieën of met infrarood-telescopieën geldt hetzelfde. In het radiospectrum maken we tegen-



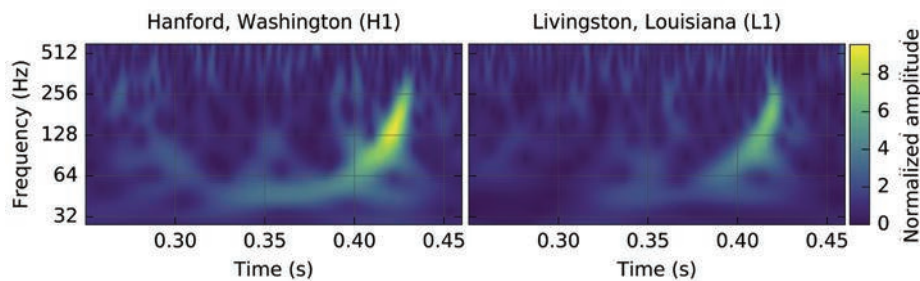
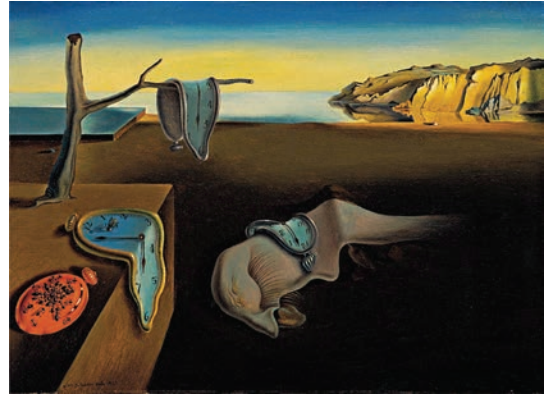
Figuur 6 De absorptielijnen van de zon (boven) zijn roodverschoven voor supercluster BAS11 (onder), bewegend met 7% van de lichtsnelheid.



**Figuur 7** M87\* gezien door de Event Horizon Telescope (EHT). De lijnen laten de polarisatie van licht in de omgeving van de event horizon (waarnemingshorizon) zien [9].



**Figuur 8** Zwaartekrachtseffect zoals geobserveerd met de James Webb Telescoop (zoom van cluster SMACS 0723) naast vergelijkbaar vervormde klokken in Salvador Dalí's *La persistència de la memòria* (1931) waarvan de schilder zelf trouwens beweert dat het niet geïnspireerd is op Einsteins relativiteitstheorie.



**Figuur 9** Zwaartekrachtsgolven zoals gemeten door LIGO (GW150914): een rimpeling van de ruimtetijd zelf veroorzaakt door het samensmelten van twee zwarte gaten [1].

woordig foto's die de omgeving van een zwart gat in kaart brengen (Figuur 7), en in het infrarode spectrum heeft de James Webb Telescoop zeer recent de kromming van ruimtetijd heel inzichtelijk in een beeld gevat (Figuur 8).

Daar kunnen zwaartekrachtsgolven aan worden toegevoegd: rimpels in de ruimtetijd om ons heen. Het trillingsspectrum dat die golven opleveren zegt ons iets over de vorm van de zwarte gaten of neutronensterren die om elkaar spiraaliserend tot een geheel samensmelten (Figuur 9).

Kortom, eigenlijk zijn alle metingen in de natuurkunde spectraal van aard, zodat dus eigenlijk alle kennis van de fysieke wereld wordt bepaald aan de hand van de analyse van spectra. Dit maakt het nog crucialer een wiskundige theorie te hebben die vertelt hoe spectra kunnen worden gebruikt in de meetkunde.

### Opmaat naar niet-commutatieve meetkunde

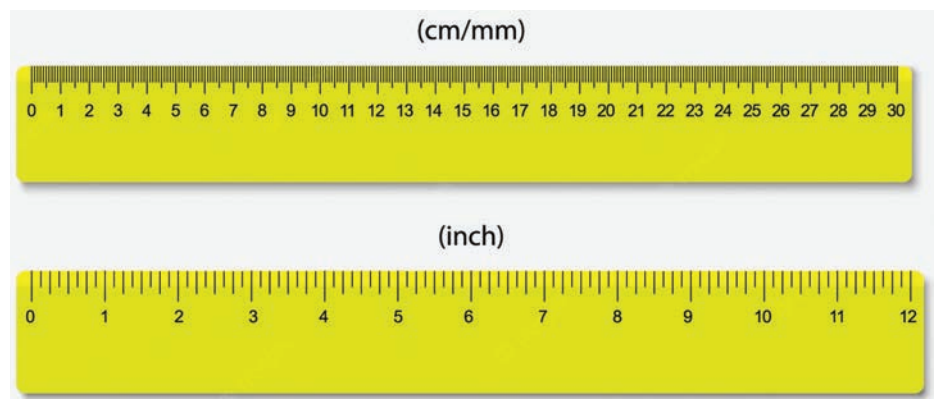
We weten dus dat natuurkundig gezien alle informatie over de vorm van het universum, op zowel kleine als grote schaal tot ons komt in de vorm van spectra. Maar hoe zit dat wiskundig in elkaar? Is er een wiskundig formalisme om meetkunde te doen alleen met behulp van spectra? Dat

lijkt cruciaal, zeker als we bedenken dat er verschillende objecten zijn die toch dezelfde trillingfrequenties hebben, zoals het laatste paar trommels dat ik hierboven heb beschreven. Het antwoord is natuurlijk ja, maar daarvoor moeten we eerst nog even terug naar het begin van de twintigste eeuw. Het volgende deel is misschien iets technischer van aard dan de rest van mijn verhaal, maar geen zorgen ik beloof dat er de nodige verlichting zal komen.

In 1918 introduceerde Hermann Weyl het begrip *ijksymmetrie* [17, 18, 19, 23, 27]. Een goed voorbeeld van een ijk is de keuze tussen inches of centimeters, zie Figuur 10.

Het uitgangspunt van Weyl was dat natuurwetten onveranderd zouden blijven na aanpassing van de schaal, met andere woorden, na het kiezen van een ijk. Deze hypothese maakte het mogelijk om een meetkundige beschrijving te geven van elektromagnetisme, en de symmetrie te gebruiken voor een afleiding van de wet van behoud van lading. Einstein was het echter niet met hem eens en reageerde scherp in een addendum bij het artikel. Het bezwaar van Einstein was dat zo'n ijksymmetrie geen goede fysische aanname kon zijn, want deze zou als gevolg hebben dat de locatie van bijvoorbeeld de absorptielijnen in het spectrum van een element afhankelijk zou zijn van de afkomst van dat atoom. Dat is fysisch gezien duidelijk niet het geval!

Weyl probeerde Einsteins bezwaar nog te weerleggen in een reactie, maar zonder overtuiging. Echter, een klein decennium later vond zijn idee vruchtbare bodem in de kwantumfysica [8, 13]. De ijksymmetrie van Weyl moest worden vervangen door een *fase-symmetrie*. Wiskundig gezien is dit een kleine aanpassing — een factor  $i$  —



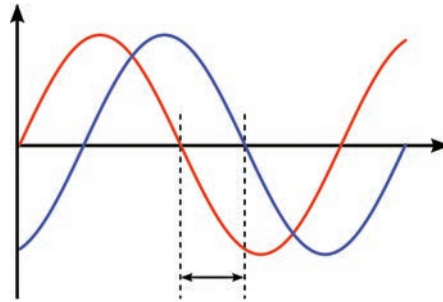
**Figuur 10** Het kiezen van een ijk: centimeter versus inch.

maar wel een met grote gevolgen. Want als we terugdenken aan onze spectrale aanpak van meetkunde aan de hand van trillingsfrequenties, dan realiseren we ons dat een fase-verschuiving van een trilling de frequentie onveranderd laat (Figuur 11). En omdat we onze meetkunde baseren op dat spectrum, krijgt ijsymmetrie zo een nieuwe betekenis waar ongetwijfeld ook Einstein zich in had kunnen vinden. Weyl omarmde dit idee in 1929 [24] en schreef er dit over [25]:

“...durch die Quantentheorie, glaube ich, können wir mit großer Bestimmtheit den Finger auf den Punkt legen, in welchem meine Theorie irrte: die Eichinvarianz verbindet die elektromagnetischen Potentiale nicht mit den  $g_{ij}$  der Gravitation, sondern mit den  $\psi_q$  des Materiefeldes. Das konnte ich freilich 1918 nicht wissen! Damals waren diese  $\psi$  noch völlig unbekannt.”

[“...door de kwantumtheorie, geloof ik dat we met grote zekerheid de vinger kunnen leggen op het punt waar mijn theorie niet klopte: de ijsymmetrie verbindt de elektromagnetische potentialen niet met de  $g_{ij}$  van de gravitatie maar met de  $\psi_q$  van het materieveld. Dat had ik in 1918 natuurlijk niet kunnen weten! In die tijd waren deze  $\psi$  nog totaal onbekend.]

Overigens is Weyls afleiding van de wet van behoud van lading nog steeds geldig, en feitelijk een toepassing van de tweede Stelling van Noether [3]. Interessant genoeg publiceerde Emmy Noether haar werk hierover [16] ook in 1918, net als Weyl zijn artikel. Ze bewijst daarin dat er een een-op-een-verband bestaat tussen symmetrieën en behouden grootheden. Toegepast op Weyls ijsymmetrie geeft dit de welbekende wet van behoud van lading. Tegenwoordig staan haar stellingen centraal in de theoretische en mathematische fysica, maar in die tijd was die erkenning ver te zoeken: niet vanwege haar kwaliteiten maar om haar geslacht. Zo werd haar eerste poging tot *Habilitation* afgewezen simpelweg omdat ze geen mannelijke kandidaat was. Volgens een bekende anekdote protesteerde Hilbert daarop dat hij niet inzag waarom het geslacht van de kandidaat ertoe zou doen; per slot van rekening was dit een universiteit, geen badhuis! Dit bleef zonder direct resultaat, en dus gaf Noether dan maar colleges onder de naam van Hilbert [26].



Figuur 11 Een fase-verschuiving laat de trillingsfrequentie van een golf onveranderd.

Een grote stap in de ontwikkeling van het principe van ijsymmetrie wordt begin jaren 1950 gezet. Onafhankelijk van elkaar generaliseerden Yang en Mills [28] en Utiyama [20] elektromagnetisme, waarbij zogeheten *niet-abelse* ijkvelden het elektromagnetische veld generaliseerden [17]. In eerste instantie leek dit een theoretische exercitie, maar al snel bleken deze theorieën de bouwstenen van de deeltjesfysica te worden. De niet-abelse ijkvelden bleken de kracht dragers te zijn van de zwakke en sterke kernkrachten, net zoals het elektromagnetische veld kan worden gezien als drager van de elektromagnetische kracht. Welnu, in plaats van een enkele fase, zoals beschreven in het werk van Weyl, geven niet-abelse ijkvelden aanleiding tot een algemener idee van fase. En hoewel Weyl in die tijd op dezelfde plek werkte als Yang, in Princeton, leek hij niet op de hoogte van deze ontwikkelingen, die hij echter ongetwijfeld zou hebben omarmd, omdat

ze zich bevonden op het kruispunt van ijsymmetrie en niet-abelse groepentheorie [27]. Ik heb het zelf altijd als ontzettend intrigerend ervaren dat de abstracte wis-kunde zo veel te zeggen heeft over hoe de natuur zich gedraagt op de schaal van de elementaire deeltjes. Sterker nog, dat was precies wat mij zo aantrok in het grensvlak tussen de wis- en natuurkunde.

We kunnen zelfs nog een stap zetten, en daarmee komen we tot de kern van mijn onderzoeksgebied. De combinatie van het niet-abelse ijkprincipe — en dus deeltjesfysica — en de spectrale aanpak van de meetkunde leidt namelijk onvermijdelijk tot *niet-commutatieve meetkunde*. De ijsymmetrie van Yang en Mills blijkt namelijk te kunnen worden gerealiseerd als symmetrie van het trillingspectrum van een niet-commutatieve ruimte: een trillende niet-commutatieve trommel dus. Zo lukt het ons om naast zwaartekracht — zoals Einstein beschreef een gevolg van de kromming van ruimtetijd — ook de elektromagnetische kracht en de kernkrachten meetkundig te beschrijven.

Tijd om terug te keren naar de wis-kunde, want hoewel ik mijn vakgebied nu gemotiveerd heb vanuit natuurkundig perspectief, is de niet-commutatieve meetkunde diep geworteld in de wiskunde, getuige deze leerstoel. De grondlegger van dit vakgebied is de Franse wiskundige Alain Connes, zie Figuur 12. Hij won in 1982 de Fieldsmedaille voor zijn classificatie van Von Neumann algebra's — een

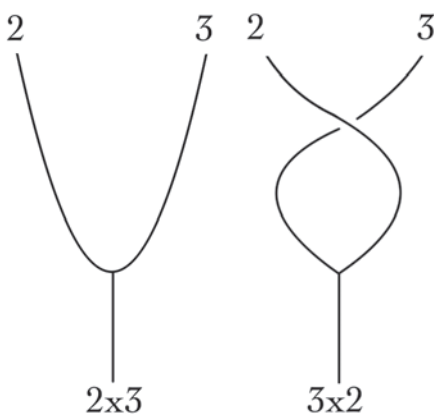


Figuur 12 Alain Connes (r) naast de Slinger van Foucault in het Huygensgebouw, Radboud Universiteit, 2016.

concept dat inderdaad teruggaat tot de eerste dagen van de kwantummechanica. Hij werd al snel daarna hoogleraar aan het Collège de France, ruim zestig jaar na Lorentz' Michonis-lezingen aldaar. In de jaren tachtig en negentig combineerde hij spectrale meetkunde met spectra van mogelijk niet-commuterende coördinaten. Het was precies deze combinatie waarmee hij de oude vraag van Kac bevestigend kon beantwoorden: door 'lokaal' te luisteren naar een trommel, kun je zijn vorm volledig bepalen [4, 5]. Het is alsof je langs de rand van de trommels in de laatste vraag van de quiz loopt en luistert naar de klank, om op deze manier te ontrafelen wat de globale vorm is van de trommel.

Deze spectrale aanpak is dus niet alleen toepasbaar op trommels van verschillende vormen, of hoger-dimensionale meetkundige objecten, hij gaat ook op voor zogeheten niet-commutatieve ruimtes. Zoals gezegd heeft dit geleid tot toepassingen in de deeltjesfysica, maar om te voorkomen dat u naar huis gaat zonder een klein idee te hebben van wat er dan niet-commutatief is, volgt hier een alledaagser voorbeeld.

Als je getallen zoals 2 en 3 met elkaar vermenigvuldigt, maakt de volgorde niet uit:  $2 \times 3$  is hetzelfde als  $3 \times 2$ . Deze commutatieve algebra leren mijn kinderen al op school, en daar is natuurlijk helemaal niets mis mee. We zouden dit in een diagram kunnen samenvatten, zie Figuur 13. Op het kruispunt worden de getallen 2 en 3 met elkaar vermenigvuldigd, waarbij in het rechter diagram de volgorde eerst nog wordt omgedraaid. Omdat beide diagrammen gelijk zijn — de draaiing rechts kan eenvoudig ongedaan worden gemaakt zonder het diagram te veranderen — illustreert dit het commuteren van vermenigvuldiging.



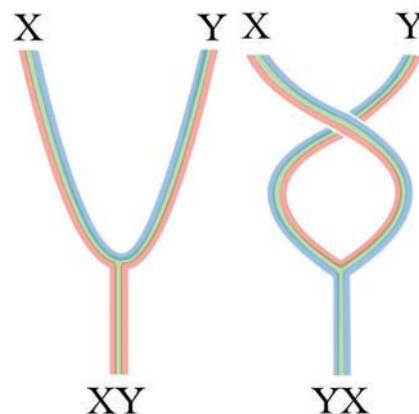
Figuur 13

In de meetkunde waar ik mij mee bezighoud gelden andere rekenregels, zodat vermenigvuldiging niet per se commutatief is. Een diagrammatische voorstelling van niet commuteren is met behulp van strookjes gekleurd papier, zoals afgebeeld in Figuur 14. Links geeft duidelijk een ander resultaat dan rechts, en dus is deze bewerking niet-commutatief. Als de kenner hier matrix-vermenigvuldiging in herkent, is dat volkomen terecht want dat is precies wat ik hier probeer voor te stellen. Samenvattend geldt dus dat onze coördinaten  $X$  en  $Y$  niet commuteren:

$$XY \neq YX$$

Natuurkundig gezien stellen de strookjes papier trouwens een ruimte van interne vrijheidsgraden voor — precies de eerder genoemde ijkvrijheidsgraden. Zo stelt oranje bijvoorbeeld een elektron voor, terwijl blauw een neutrino is, en het strookje geeft alle mogelijke superposities daarvan weer. Als we coördinaten kiezen die voldoen aan dergelijke rekenregels, is het mogelijk de interne vrijheidsgraden in de meetkunde 'in te bakken'. Kromming van zo'n niet-commutatieve ruimte geeft dan, in het verlengde van Einsteins relativiteitstheorie, aanleiding tot een meetkundige beschrijving van alle vier fundamentele natuurkrachten: de zwaartekracht, de elektromagnetische kracht en de zwakke en sterke kernkracht.

Vooruitkijkend naar de komende jaren wil ik werken aan een begrip van spectrale meetkunde als er slechts een deel van het spectrum bekend is. Het huidige formalisme van de niet-commutatieve meetkunde gaat namelijk uit van kennis van het volledige spectrum bestaande uit alle trillingsfrequenties. Dat is niet erg realistisch: natuurkundig gezien is het duidelijk dat een volledig trillingsspectrum nooit be-



Figuur 14

schikbaar is. Zo heeft een detector altijd een bepaalde bandbreedte en resolutie. En toch denken we dat we met onze spectroscopie een volledig beeld vormen van de werkelijkheid, inclusief kromming en afstanden in ons eigen universum. Kennelijk benaderen we met onze beperkte kennis van het spectrum toch de continue werkelijkheid. Denk nog eens terug aan de trommel: ook met ons beperkte gehoor lukt het ons prima het verschil in grootte van de trommels te bepalen. Zelfs als het gehoorbereik met het klimmen der jaren wat is afgenomen.

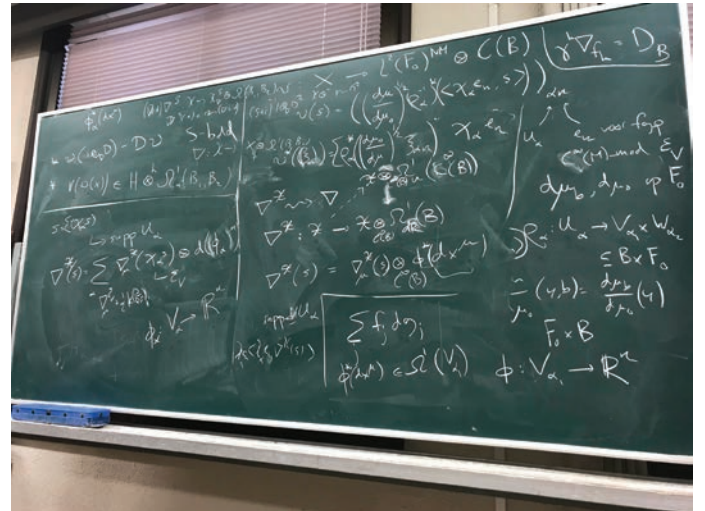
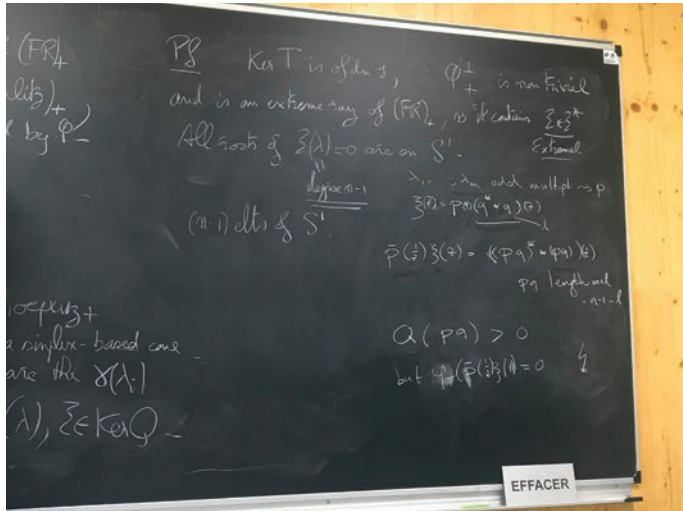
Ik wil onderzoeken hoe de wiskunde hierachter in elkaar steekt: kunnen we bewijzen dat we met de kennis van een deel van het spectrum kunnen convergeren naar de oorspronkelijke meetkundige vorm? In hoeverre is meetkunde op deze manier een *emergent* verschijnsel, voortkomend uit een eindig aantal trillingen? Kunnen we spreken van meetkunde op een bepaalde schaal gezien, of met een bepaalde resolutie gemeten?

Zo'n schaalafhankelijke meetkunde is tegelijk een cruciale voorbereiding op het formuleren van de hoognodige kwantumtheorie in het wiskunde bouwwerk van de niet-commutatieve meetkunde. Op kleinere schaal zullen kwantumeffecten namelijk een rol gaan spelen in de voortbeweging van elementaire deeltjes, en dus in de meetkundige formulering van de deeltjesfysica. Feitelijk kan dit worden gezien als de heilige graal van dit toepassingsgebied, en mijn onderzoeksgebied in het bijzonder.

Ik heb veel van mijn onderzoek uitgelegd aan de hand van trommels en met voorbeelden uit de natuurkunde. Dit zijn echter slechts metaforen voor mijn onderzoek en mijn vakgebied. Mijn dagelijkse werk ziet er wel wat anders uit, en zonder u daar ver in mee te nemen, lijkt het me toch goed om u hier een vluchtige blik op te laten werpen: goed gevulde krijtborden of gewoon krabbels met (digitale) pen en papier (Figuur 15 en 16).

### Wiskunde als mensenwerk

Vooruitkijkend naar de manier waarop ik wiskunde zou willen beoefenen, zou ik graag de mens erachter naar de voorgrond willen brengen. Hierboven heb ik geprobeerd de personen achter al die wis- en natuurkunde te belichten, en te benadrukken hoe belangrijk de interactie met anderen was. Ik vind deze samenwerking



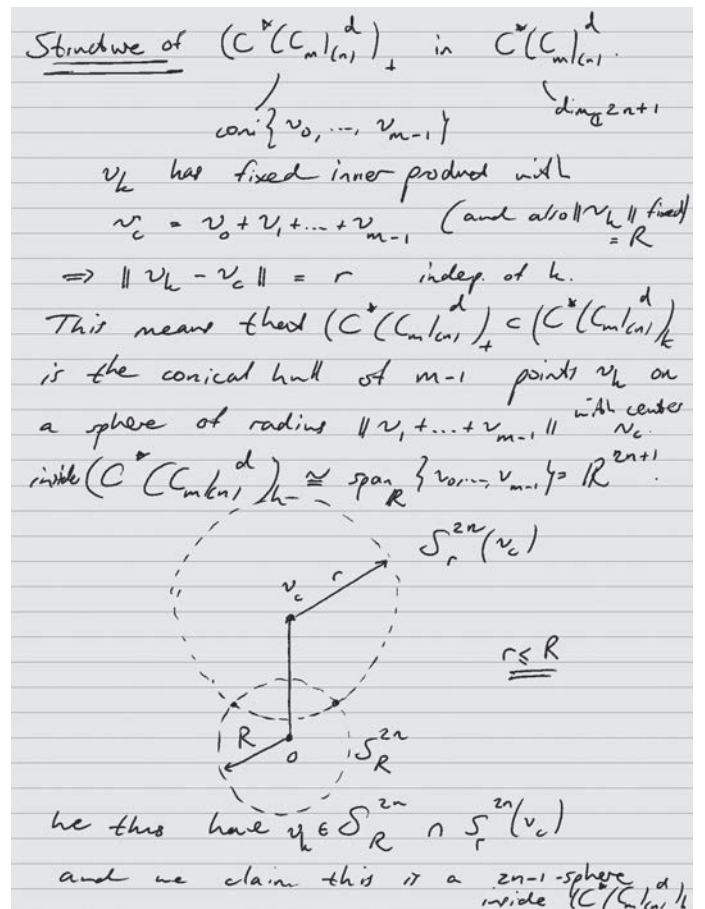
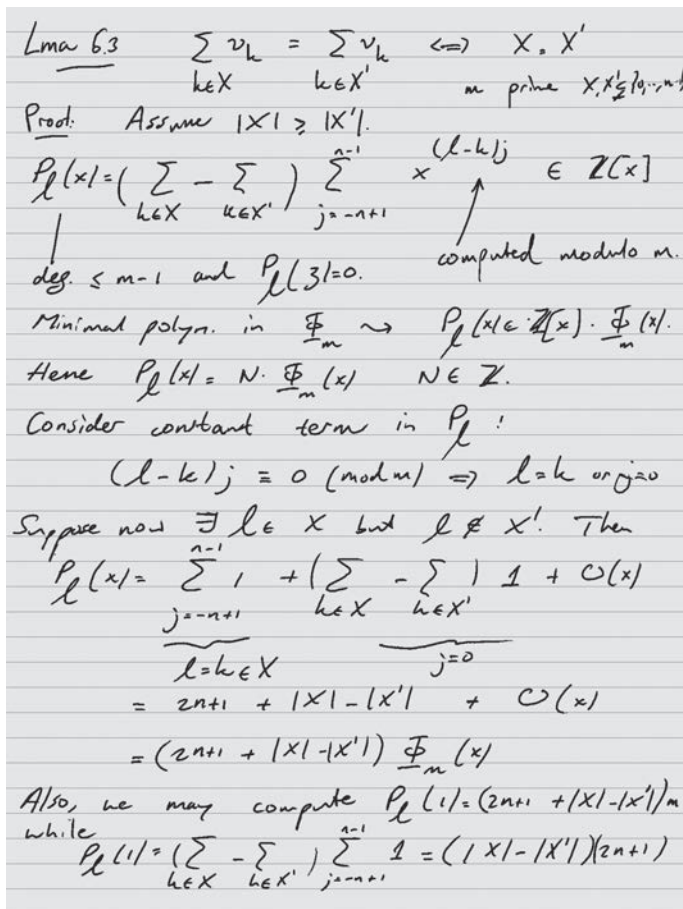
Figuur 15 Twee goed gevulde krijtborden (op IHÉS en in Kyoto).

een essentiële eigenschap van wetenschap en in het bijzonder van de wiskunde. Zo ontstaat een duurzaam netwerk van wetenschappers die elk met elkaar in verbinding staan en als dat mogelijk of zinvol is, ook tussen de vakgebieden in. En dan zijn er ook altijd onderzoekers die dichterbij de maatschappij staan, waar ze voor hun toepassingen kunnen putten uit het zo

belangrijke meer ongebonden onderzoek. De recente ontwikkelingen voor wat betreft dergelijke invloed bij NWO zijn positief, en ik zal me er de komende jaren sterk voor blijven maken, onder andere als lid van de adviestafel wiskunde.

Iets wat overigens wel pijnlijk duidelijk is geworden uit mijn verhaal, is dat dit vooral een mannelijke aangelegenheid

lijkt te zijn. Dat is natuurlijk volkomen onterecht maar het betekent wel dat er nog een flinke slag gemaakt moet worden. Nogmaals, wiskunde is mensenwerk, geen mannenwerk! Gelukkig is de situatie op de universiteit onder studenten inmiddels enorm verbeterd, maar bij elke volgende stap in de wetenschappelijke carrière vallen er meer vrouwen af dan mannen. We



Figuur 16 Twee willekeurige pagina's uit een van mijn (digitale) notitieboekjes.





u de bladmuziek van een passage uit dit concert, aan het einde van het eerste deel. Het is een prachtig samenspel tussen viool en slagwerk, een stuk dat ik zelf zo'n twintig jaar geleden ook heb mogen spelen als slagwerker in het VU-orkest, nota bene met Janine Jansen als solist.

Het notenschrift, tempoduidingen, et cetera, in de muziek zou ik willen vergelijken met formules en bewijzen in de wiskunde. Ze zorgen ervoor dat musici elkaar verstaan, maar uiteindelijk zijn ze onderschikt aan de achterliggende, meer intuïtieve schoonheid die via die taal met elkaar gedeeld kan worden. De schoonheid van de wiskunde heeft veel gemeen met die muzikale schoonheid, en de manier waarop we die met elkaar delen tijdens bijvoorbeeld een orkestuitvoering.

Met mijn verhaal hoop ik u in ieder geval een klein stukje van de schoonheid van mijn wiskunde te hebben laten zien. Ik hoop dat u net als een luisteraar van een muziekstuk die misschien niet het volledige notenschrift kent, zonder kennis van

formules of bewijzen toch heeft kunnen meegenieten van deze spectrale symfonie van de meetkunde.

Ik heb gezegd



#### Dankwoord

Hoewel dit een leerstoel in de wiskunde betreft, moge het duidelijk zijn dat mijn sterke motivatie voor het beoefenen van deze wiskunde uit de natuurkunde afkomstig is. Die interesse is lang geleden gewekt, onder andere tijdens de natuurkundelessen op het VWO Jan Arentsz. Veel dank aan mijn toenmalige natuurkundecenten de heer Zwagerman en wijlen de heer Koch, van wie vandaag de dochter aanwezig is. Tijdens mijn studie natuurkunde in Amsterdam was Gerard Bauerle mijn afstudeerbegeleider. Hij heeft mij laten kennismaken met het vakgebied van de niet-commutatieve meetkunde, nota bene met een onderwerp uit de snaartheorie! Ik heb inhoudelijk natuurlijk veel van hem geleerd, maar hij leerde me ook al hoe je moest omgaan met een gevarieerd publiek. Na mijn studie natuurkunde heb ik een jaar wiskunde gestudeerd in Amsterdam, onder begeleiding van Klaas Landsman. Hoewel ik natuurlijk stiekem al lang bezig was met wiskunde op het grensvlak

met natuurkunde, was dit het formele begin van mijn carrière als mathematisch fysicus. Het contact dat ik in de jaren erna, als promovendus in Italië, met Klaas heb onderhouden was erg fijn, en zorgde ervoor dat ik na nog een korte tussenstop in Bonn in 2007 kon beginnen als postdoc in de groep van Klaas hier in Nijmegen, waar hij ondertussen naar toe was verhuisd. Ik ben hem zeer dankbaar voor alle steun in de jaren die volgden, tot en met de huidige benoeming aan toe. In het verlengde daarvan geldt natuurlijk hetzelfde voor mijn collega's van de afdeling Wiskunde, binnen het IMAPP en in de Faculteit, tot en met de huidige plaatsvervangende rector aan toe. My PhD supervisors in Italy were Ludwik Dabrowski and Gianni Landi. I had the chance to be in Trieste as a PhD student in an incredibly inspiring time. In addition to the richness that the country has to offer, Trieste has been a very active center for noncommutative geometry, in particular for the "rolling of quantum spheres". So I'd like to thank both of them for their guidance and their support. I have been working with Alain Connes for almost ten years now, and this has been incredibly inspiring. His enthusiasm when we talk about a particular problem, behind a chalkboard for example, but also increasingly more often via zoom, is very infectious and I'd like to spread it further to, for example, my students.

#### Referenties

- 1 B.P. Abbott e.a., Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016), 061102.
- 2 F. Berends en D. van Delft, *Lorentz: Gevierd fysicus, geboren verzoener*, Prometheus, 2019.
- 3 K.A. Brading, Which symmetry? Noether, Weyl, and conservation of electric charge, *Stud. Hist. Philos. Sci. B Stud. Hist. Philos. Modern Phys.* 33 (2002), 3–22.
- 4 A. Connes, Gravity coupled with matter and the foundation of non-commutative geometry, *Comm. Math. Phys.* 182 (1996), 155–176.
- 5 A. Connes, On the spectral characterization of manifolds, *J. Noncommut. Geom.* 7 (2013), 1–82.
- 6 A. Connes, A. Lichnerowicz en M.P. Schützenberger, *Triangle de pensées*, Editions Odile Jacob, 2000.
- 7 A. Connes, A. Lichnerowicz en M.P. Schützenberger, *Triangle of Thoughts*, American Mathematical Society. Translated from the 2000 French original by Jennifer Gage.
- 8 V. Fock, Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt, *Z. Phys.* 39 (1926), 226.
- 9 C. Goddi e.a., Polarimetric properties of event horizon telescope targets from ALMA, *Astrophys. J. Lett.* 910 (2021), L14.
- 10 D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Vierte Mitteilung), *Gött. Nachr.* (1906), 157–209.
- 11 M. Kac, Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* 73 (1966), 1–23.
- 12 A.J. Kox, *Hendrik Antoon Lorentz. Natuurkundige (1853–1928)*, Balans, 2019.
- 13 F. London, Quantummechanische Deutung der theorie von Weyl, *Z. Phys.* 42 (1927), 375.
- 14 H. Lorentz, Alte un neue Fragen der Physik, *Phys. Zeitschrift.* 11 (1910), 1234.
- 15 H. Lorentz, *Les théories statistiques en thermodynamique*, Teubner, Berlin, 1916. Dunoyer, Conférences faites au Collège de France en novembre 1912.
- 16 E. Noether, Invariante variationsprobleme, *Nachr. d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen* (1918), 235–257.
- 17 L. O'RaiFeartaigh, ed., *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, 1997.
- 18 N. Straumann, Early history of gauge theories and weak interactions, invited talk at *PSI Summer on Physics with Neutrinos, Zuoz, Switzerland, 4–10 August 1996*, arXiv:hep-ph/9609230.
- 19 N. Straumann, Hermann Weyl and the early history of gauge theories, in *Symmetries in Algebra and Number Theory (SANT)*, Universitätsverlag Göttingen, 2009, pp. 173–189.
- 20 R. Utiyama, Invariant theoretical interpretation of interaction, *Phys. Rev.* 101 (1956), 1597.
- 21 J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.* 102 (1930), 49–131.
- 22 H. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), *Math. Ann.* 71 (1912), 441–479.
- 23 H. Weyl, Gravitation und Elektrizität, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1918), 465–480.
- 24 H. Weyl, Gravitation and the electron, *PNAS* 15 (1929), 323–334.
- 25 H. Weyl, 50 Jahre Relativitätstheorie, *Naturwissenschaften* 38 (1930), 73–83.
- 26 H. Weyl, Emmy Noether 1882–1935, *Scripta Mathematica* 3 (1935), 201–220. [WGA 3, 425–444.]
- 27 C.N. Yang, Hermann Weyl's contribution to physics, in *Hermann Weyl, 1885–1985*, Eidgenössische Tech. Hochschule, 1986, pp. 7–21.
- 28 C.N. Yang and R.L. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, *Phys. Rev.* 96 (1954), 191–195.