Ode aan het tegenvoorbeeld

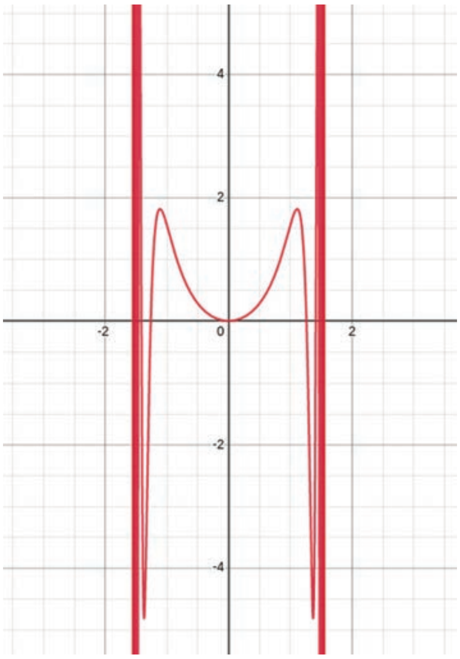
Net zoals loodgieters, timmerlieden en monteurs beschikken wiskundigen over een heel arsenaal aan technische hulpmiddelen die hen helpen bij het uitoefenen van hun beroep. In plaats van schroevendraaiers, beitels en Engelse sleutels leren we onze studenten hoe ze inductie, contrapositie of reductio ad absurdum moeten gebruiken en drillen we hen met standaardsommen waarop die technieken van toepassing zijn.

Een veelgebruikte methode die echter veel moeilijker aan te leren is, is die van het tegenvoorbeeld. Bij het lezen van de klassieke vraag ‘bewijs of geef een tegenvoorbeeld’ breekt bij menig student het angstzweet uit want ‘hoe begin je daaraan?’. Het vinden van een goed tegenvoorbeeld is een kunst op zich en vereist een kennis die meer weg heeft van die van een jager of ornitholoog, dan van een loodgieter of monteur. Je moet namelijk vaak het hele landschap van je vakgebied doorkruist hebben en goed op de hoogte zijn van de lokale fauna en flora voor een succesvolle vangst. Maar eens je je specimen gevonden hebt, is het een waar genoegen om het van alle kanten te bewonderen en te delen met je collega’s.

Tegenvoorbeelden komen overal in de wiskunde voor (in dit nummer vind je een mooi exemplaar uit de spectraalanalyse in de oratie van Walter van Suijlekom), maar het vakgebied bij uitstek waar ze opduiken is toch wel de topologie. Hier vind je een ware freakshow van wat er allemaal kan mislopen als je intuïtieve meetkundige concepten probeert te wringen in een abstract formalisme. Er is zelfs een heel boek aan gewijd: *Counterexamples in Topology* door Lynn Steen en Arthur Seebach, waarin je kunt genieten van een verzameling van meer dan 140 topologische ruimtes met wonderlijke eigenschappen. Een indrukwekkende collectie maar blijkbaar toch niet altijd voldoende…

Onlangs kreeg ik namelijk een mail van een student met een vraag over de stelling van Jordan. Die stelt dat elke gesloten kromme het vlak opdeelt in twee delen en de student was nieuwsgierig naar wat er gebeurt met een open kromme. Het complement van een lijnstuk bestaat maar uit één samenhangend deel, terwijl een volledige lijn het vlak in twee delen verdeelt. Daarom vroeg hij zich af of men kan aantonen dat een open kromme (of technischer een deelvariëteit van het vlak homeomorf met $\mathbb{R}$) dat vlak altijd verdeelt in ten hoogste twee delen.

Mijn eerste reactie was: “Hmm, dit lijkt me sterk. Misschien kan ik iets vinden in Steen and Seebach.” Helaas leverde de index niets op, maar het bekijken van het omslag bracht me op een idee. Op de voorkant stond een afbeelding van de *topologist’s sine curve*: $\{(x, \sin(1/x)) \colon x > 0\} \cup \{(0,0)\}$, het standaardvoorbeeld van een samenhangende maar niet padsamenhangende ruimte. Na heel wat probeer- en puzzelwerk kwam ik uiteindelijk met mijn eigen sinuskromme op de proppen die het vlak verdeelt in vier delen: $\{\arctan(x), x\sin(x) \colon x \in \mathbb{R}\}$. Met een tevreden gevoel typte ik mijn antwoord in en drukte op de verzendknop.



Mijn sinuskromme die het vlak in 4 delen verdeelt.

Epiloog

Die avond dronk ik samen met enkele collega’s nog een biertje en toonde hen trots mijn speciale kromme. Al snel ontspon zich een discussie over het maximaal aantal componenten waarin een kromme het vlak kan verdelen. Een hele rits van krommes passeerde de revue en uiteindelijk vonden we een winnaar: een kromme die het vlak verdeelde in een overaftelbaar aantal delen. Hoe die eruitzag laat ik aan jullie verbeelding over.

Raf Bocklandt, hoofdredacteur
Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam