

Wim Caspers

Stanislascollege, Delft, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examen vwo wiskunde B 2022

Wat voor leerlingen werden er dit jaar student?

Wat voor leerlingen hebben we dit jaar vanuit het vwo aan de Nederlandse universiteiten afgeleverd? Hoe zijn ze op de rest van hun leven voorbereid, qua wiskunde? Het antwoord is niet eenvoudig te geven. Ze hebben 4, 5 en 6 vwo doorlopen gedurende de pandemie. Het wiskundeonderwijs kende in die periode veel vormen: volledig op school, volledig online, halve klassen op school en halve klassen op afstand, of wellicht soms even helemaal geen onderwijs. Het afgelopen schooljaar was er daarom een heleboel geld beschikbaar om achterstanden op allerlei gebieden in te lopen. Veel bijspijker- en examentrainingen zijn er ingekocht, en menig docent zal ook zelf heel wat extra bijlessen hebben gegeven. Wat leverde het op? Wim Caspers doet verslag van zijn ervaringen.

Normaal gesproken weten docenten vrij nauwkeurig waar zich over het algemeen zwakke plekken in de kennis en vaardigheden van leerlingen voordoen. Afgelopen jaar leverde echter nog wel eens verrassingen op. Er bleek bij het aanbrengen van de grondverf in de vierde en vijfde klas nog wel eens een stukje overgeslagen te zijn en komt het dan bij het aflakken in de zesde klas in voorbereiding op het examen nog wel helemaal goed? Het examen wiskunde B op het vwo leek geen rekening te hebben gehouden met al die omstandigheden, niet op het eerste gezicht en ook niet bij nadere bestudering. Dat is maar goed ook, want anders weten we niet hoe het staat met de kennis en kunde van de leerlingen, inmiddels studenten.

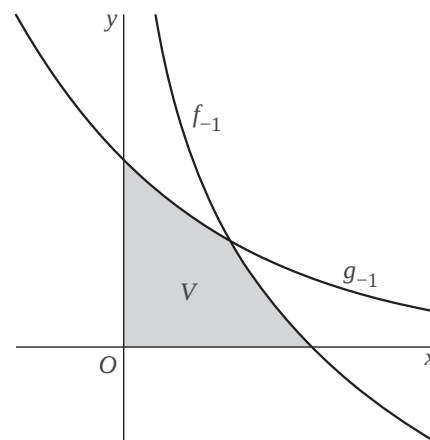
Wat kwam de leerling tegen in het examen van het eerste tijdvak? Het hele examen is terug te vinden op Examenblad.nl [1] en ook de bespreking van KP Hart die hij

er jaarlijks op zijn blog over schrijft is de moeite waard [2]. In het artikel dat u nu leest wordt een aantal opvallende opgaven belicht en worden te bespeuren ontwikkelingen in de aard en samenstelling van wiskunde B-examens op het vwo geschetst.

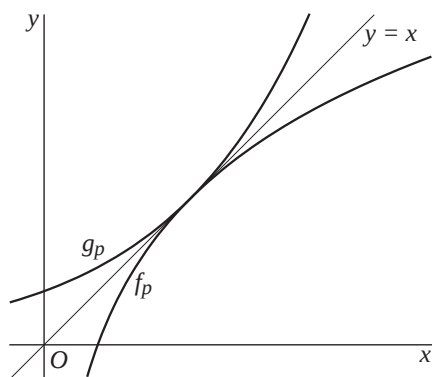
Inverse functies

Een aantal jaar alweer maakt het onderwerp 'inverse functies' deel uit van de examenstof en dit jaar figureerde het als openingsnummer in de opgave 'Inverse van $\ln(x)$ '. Voor $p \neq 0$ werden de functies f_p en g_p gegeven door $f_p(x) = p \ln(x)$ en $g_p(x) = e^{\frac{x}{p}}$. Gevraagd werd te bewijzen dat de functies elkaars inverse zijn. Niet gehinderd door zorgen over domein en bereik en op grote schaal het woord 'elkaar' negerend wisten heel veel leerlingen te voldoen aan het correctievoorschrift, door het toepassen van een goed getraind werkschema.

De tweede vraag in dezelfde opgave, het berekenen van de oppervlakte weergegeven in Figuur 1, deed verder geen noodzakelijk beroep op dat elkaars inverse zijn. De oppervlakte hoefde niet exact berekend te worden. Een exacte aanpak zou problemen opleveren bij het bepalen van het snijpunt, en ook een primitieve van de natuurlijke logaritme hoort niet per se tot de parate kennis van een wiskunde B-leerling. Nu is niet iedere docent op het vwo daarvan op de hoogte, dus nogal wat leerlingen zullen de vraag door middel van primitiveren geprobeerd hebben te maken en daarbij onnodig gestruikeld zijn over vergeten mintekens en haakjes.



Figuur 1



Figuur 2

De situatie van de derde vraag uit de openingsopgave is weergegeven in Figuur 2. De gelegenheid om nu wel gebruik te maken van de kennis dat de functies elkaar inverse zijn, wordt niet aangegrepen door de samenstellers van het examen. Gevraagd wordt exact de waarde van p te berekenen waarvoor de lijn $y=x$ de gemeenschappelijke raaklijn is van de grafieken van f_p en g_p . Door een vergelijking van de gemeenschappelijke raaklijn weg te geven en trouwens ook het bestaan van zo'n p te verklappen, wordt de waarde ervan al gevonden wanneer men op zoek gaat naar een functie f_p die de lijn $y=x$ als raaklijn aan de grafiek heeft. Het lijkt erop dat deze opgave aangepast is en dat er oorspronkelijk niet zoveel werd weggegeven.

Bézierkromme

In de tweede opgave wordt de Bézierkromme ten tonele gevoerd in de context van het beschrijven van de rand van een letter op een computerscherm. Zie Figuur 3. A krijgt als coördinaten $(\frac{1}{15}, \frac{4}{3})$ mee, $B(1, \frac{19}{10})$ en in het eerste onderdeel mag de x -coördinaat van C exact berekend worden aan de hand van gegeven hellingen van de raaklijnen. Zonder spannende wiskunde komt er $\frac{5}{24}$ uit.

Dan volgt de beschrijving van de Bézierkromme, zie Figuur 4. Achteraf vertrouwde een leerling me toe dat hij aangenaam verrast was met deze opgave omdat hij een week eerder een filmpje op YouTube erover bekeken had, *The Beauty of Bézier Curves* [3]. Veel kinderen kijken trouwens voor hun plezier wiskundefilmpjes op YouTube, Numberphile en 3Blue1Brown, een hoopvolle ontwikkeling. Wie het filmpje bekijkt zal inzien dat het hem in dit geval hielp om de opgave snel te begrijpen.

De vraag die volgde was om het punt R te tekenen dat hoort bij $t=0,25$ op de uitwerkbijlage waar in het plaatje getoond in Figuur 3 punt A , B en C al voorgetekend waren. Helaas kende de uitwerkbijlage geen schaalverdeling, want een aanzienlijk deel van de leerlingen ging opgeruimd aan de slag met de gegeven coördinaten en de zojuist berekende $\frac{5}{24}$ om de meest

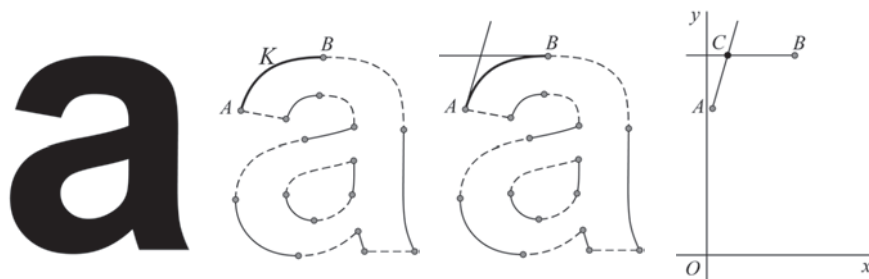
gruwelijke breuken het licht te doen laten zien en die dan enigszins nauwkeurig in te tekenen. Het correctievoorschrift had rekening gehouden met die manier van antwoord geven, want deze methode werd als mogelijke oplossing beschreven. Het gebruik van een schaal 6,7:1 werd daarbij geëist. Bij het tekenen werd een marge van 1 mm toegestaan. Een ware nakijkkel, waarbij elk werkje van een leerling die de beschreven constructie gewoon op papier uitvoerde, zoals normale mensen dat doen, met gejuich ontvangen werd.

Rakende grafieken

In de derde opgave wordt gevraagd aan te tonen, excuses, 'te bewijzen' (want 'aantonen' mag in het voortgezet onderwijs immers door de grafische rekenmachine in de uitwerking een rol te laten spelen), dat de grafieken van $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$ en $g(x) = \sin(x)$ elkaar raken. De perforatie $(0, \frac{1}{2})$ in de grafiek van f wordt genegeerd. Ook hier werd oorspronkelijk misschien weer een ingewikkeldere opdracht bedoeld.

Raaklijn verschuiven

Hebben we nu genoeg vragen over raken-de grafieken voorbij zien komen? Ja, maar er volgden er toch nog meer. In de opgave 'Raaklijn verschuiven' wordt na het integreren van de functie $f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$ naar het plaatje in Figuur 5 verwezen. Bijbehorende vraag is om exact te berekenen voor welke $a \neq 0$ een verschuiving van de raaklijn k over de vector $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ weer een raaklijn aan de grafiek van f geeft. Zowel met de integraal als de verschuiving worden de leerlingen niet overvraagd, al blijft een deel bij de laatste vraag wel steken bij het vinden van een punt van de grafiek waar de raaklijn helling 1 heeft en wordt vergeten dat de opdracht was om a te vinden. Waarom gesproken wordt over een verschuiving 'over de vector $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ', en niet



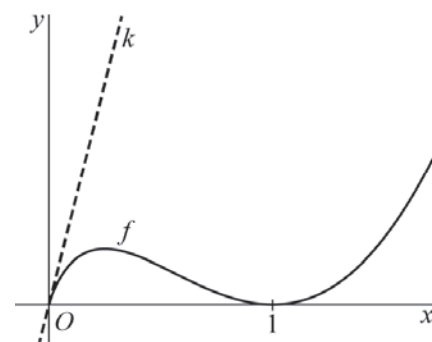
Figuur 3 Plaatje van lettercontouren bij tweede opgave.

Om de kromme K te kunnen construeren, worden er, behalve de drie vaste punten A , B en C , drie bewegende punten P , Q en R gebruikt. Deze bewegen als volgt:

- Punt P beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ met een constante snelheid over lijnstuk AC van A naar C . Er geldt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC}$
- Punt Q beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ met een constante snelheid over lijnstuk CB van C naar B . Er geldt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CB}$
- Terwijl punten P en Q bewegen, schuift punt R op het bewegende lijnstuk PQ van P naar Q . Er geldt: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$

Het punt R doorloopt van $t=0$ tot $t=1$ een kromme van A naar B . Deze kromme wordt de **Bézierkromme** (van A , B en C) genoemd, en dat is kromme K uit figuur 2.

Figuur 4 Beschrijving van de Bézierkromme in de tweede opgave.



Figuur 5

gewoon over een verschuiving van 'a naar rechts', zoals de leerlingen gewend zijn, wordt niet helemaal duidelijk.

Lavabommen

Tijd voor een context, om precies te zijn de opgave 'Vulkaan', waarin de banen van een aantal lavabommen beschreven worden. Wat nogal eens opvalt bij opgaven met een rijke context, in dit geval ook weer, is dat de tweede keer dat je de opgave maakt, je feilloos de wiskunde eruit weet te filteren en dat de ware gedaante van de opdracht zich zonneklaar openbaart. Ontdaan van alle context komt de laatste vraag van deze opdracht neer op een plaatje en twee formules en — alweer — een vraag over rakende krommen: bewijs dat alle banen van de Lavabommen raken aan de gestippelde kromme. Voor geïnteresseerden,

zie Figuur 6 voor het plaatje en hier de formules:

$$y = \frac{1 + \tan^2(\alpha)}{9000} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + 2000$$

en

$$y = -\frac{1}{9000} \cdot x^2 + 4250.$$

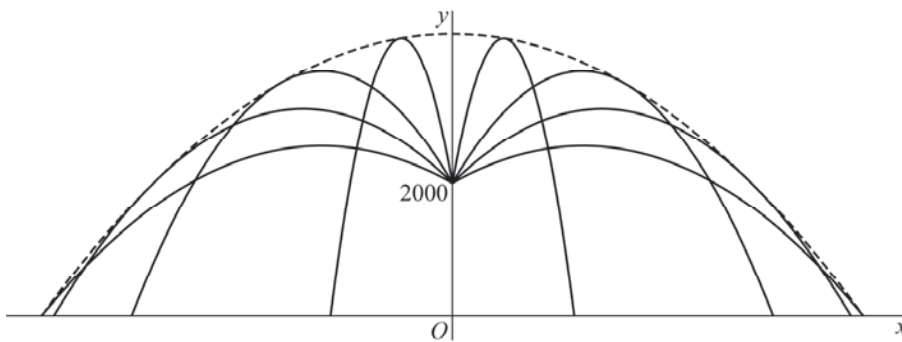
Vlieger

Na al die opgaven over raken beкроop leerlingen wel de vraag waar de sommen over meetkunde toch bleven. Tot de tanden bewapend met allerlei kennis en vaardigheden over cirkels, lijnen, afstanden en hoeken, moesten ze wachten tot de laatste opgave waar een middelloodlijn en een zwaartepunt bepaald moesten worden. Voor sommigen teleurstellend, als ze daar al aan toe kwamen, want zeker als je verleid was tot het tekenen op schaal 6,7:1

in de opgave over Bézierkrommen was het examen aan de lange kant.

Tot slot

De vraag wat voor leerlingen er dit jaar als studenten begonnen zijn aan de universiteit wordt met deze beschrijving van het examen natuurlijk niet beantwoord. Maar de opgave 'Scheve asymptoot' en de manier waarop die gemaakt werd illustreert het een beetje. De functie f werd gegeven door $f(x) = x + \frac{2}{x}$ en in de beantwoording van een van de vragen was het nodig om een vergelijking van de scheve asymptoot van de grafiek van f te vinden. Wat leerlingen gewend zijn, is dat de scheve asymptoot nog verstopt is in het functievoorschrift. In dit geval zou dat $f(x) = \frac{x^2+2}{x}$ zijn. Door het uitvoeren van een staartdeling wordt dan de scheve asymptoot onthuld. Nogal wat leerlingen herschreven daarom het voorschrift van f eerst tot een breuk om vervolgens met een staartdeling de originele vorm terug te vinden en een juiste vergelijking van de scheve asymptoot op te schrijven. Dus wie dacht dat alle leerlingen aangeleerde stappenplannen inzichtelijk uitvoeren, is nu een illusie armer. Laten we hopen dat het niet de leerlingen zijn die vrijwillig Numberphile of 3BlueBrown kijken, want van die leerlingen moeten we het toch een beetje hebben. ☺



Figuur 6

Referenties

- 1 <https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-b-vwo-2/2022>.
- 2 <https://fa.ewi.tudelft.nl/~hart/blog/eindexamen-wBvwo-2022-1.pdf>.
- 3 <https://youtu.be/aVwxzDHniEw>.