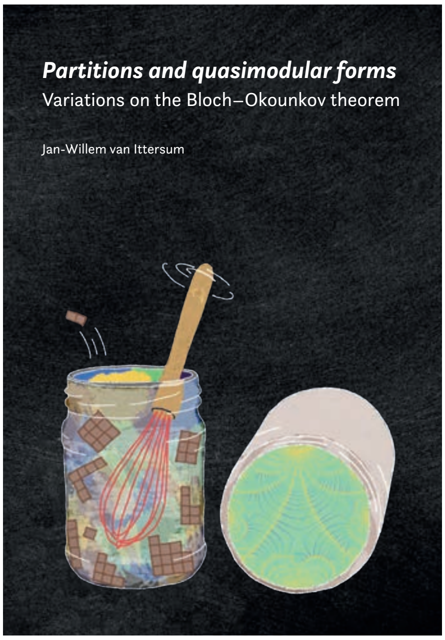
Jan-Willem van Ittersum
Max-Planck-Institut für Mathematik
Bonn
ittersum@mpim-bonn.mpg.de

Jan-Willem van Ittersum

Onderzoek KWG PhD-prijs 2021 en Stieltjesprijs 2020–2021

Een recept voor quasimodulaire vormen

Het is lunchtijd! Terwijl jij jouw broodtrommeltje tevoorschijn haalt, komt Jan-Willem aangelopen met een zak brood en een pot vol smeersel. Wat is dat voor smeersel? Is het chocopasta? Of heeft hij vandaag weer pindakaas? "Je mag wel een beetje proeven, hoor", zegt hij wanneer hij je naar de pot ziet staren. "Het zijn de laatste resultaten van mijn proefschrift." Je neemt een hapje. Het smaakt een beetje als gekristalliseerde honing en ook als spekkoek; hij noemt het een *quasimodulaire vorm*. "Zelfgemaakt", zegt hij trots. Nog voordat je hem een verdere vraag kan stellen, begint hij al te vertellen: "Je neemt een bepaalde hoeveelheid partities, een soort tetris-chocoladerepen. Even kloppen met een speciaal soort garde — de q-haak — en… tadaah: een quasimodulaire vorm! Vandaag is het E_2, want ik had van elke partitie evenveel gram als zijn eigen grootte genomen, maar ik had ook best een bepaalde macht van alle delen kunnen nemen." "Eh, ik volg het niet helemaal", onderbreekt iemand anders hem. "Wat zijn dat voor ingrediënten, partities? En wat is nu precies het recept?" "Lekker is het in ieder geval wel", denk je. Hier wil je meer van (w)eten! Jan-Willem van Ittersum won zowel de KWG PhD-prijs voor de presentatie van zijn promotieonderzoek op het NMC 2021 en de Stieltjesprijs voor het beste wiskundige proefschrift van het academische jaar 2020–2021 aan een Nederlandse universiteit.



De voorkant van het proefschrift

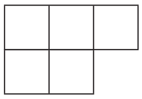
In mijn proefschrift heb ik me beziggehouden met variaties op de Bloch–Okounkov-stelling: een soort recept om quasimodulaire vormen te maken uit partities. Een recept begint altijd met een aantal ingrediënten, geeft vervolgens een bereidingswijze om tot een resultaat te komen en sluit af met enkele variatietips. Evenzo beginnen we met het introduceren van partities, vervolgens definiëren we de q-haak en de quasimodulaire vormen die we met dit recept bereiden. We sluiten af met enkele variatietips, dat wil zeggen: de eigenlijke resultaten van dit proefschrift.

Ingrediënten: partities

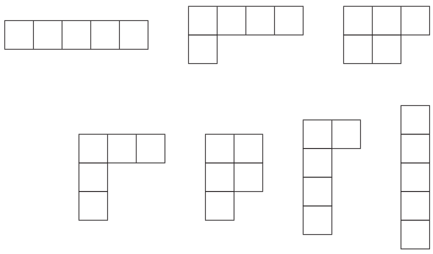
Een *partitie* is een manier om een geheel getal te schrijven als de som van positieve gehele getallen. Zo is bijvoorbeeld $3+2$ een partitie van 5. Alle partities van het getal 5 zijn als volgt:

$$5,\ 4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,$$
$$2+1+1+1,\ 1+1+1+1+1.$$

Andere sommen zijn niet mogelijk, behalve dat we ook $2+3$ zouden kunnen schrijven in plaats van $3+2$. We spreken af dat we in zo'n geval $3+2$ en $2+3$ als dezelfde partitie beschouwen, omdat de volgorde van de getallen in een som niet uitmaakt. De 'tetris-chocoladereep', beter gezegd het *Young-diagram*, die hoort bij deze partitie is



want de eerste rij in dit diagram telt 3 hokjes en de tweede rij telt 2 hokjes. In het algemeen construeer je het Young-diagram van een partitie door de getallen in de bijbehorende som door een rij van evenveel hokjes te vervangen; in het voorbeeld van de partities van 5 hierboven krijg je dan:



Merk op dat het aantal hokjes in alle bovenstaande diagrammen gelijk is aan 5, dit getal noemen we de *grootte* van een partitie.

Voor elk geheel getal n kunnen we nu tellen hoeveel partities er zijn van grootte n. Dan vinden we dat er $1, 2, 3, 5, 7, \ldots$ partities

Illustratie: Ryu Tajiri

zijn voor de getallen $1,2,3,4,5,\ldots$. Deze getallen nemen we samen in de voortbrengende reeks van partities

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} q^{|\lambda|} = 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+\cdots,$$

waar we $\mathcal{P}$ schrijven voor de verzameling van partities en $|\lambda|$ voor de grootte van de partitie λ. De identiteit

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} q^{|\lambda|} = \frac{1}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)}$$

werd voor het eerst bewezen door Euler. De rechterkant is, op een macht van q na, gelijk aan de inverse van de Dedekind-èta-functie

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n\geq 1}(1-q^n).$$

Deze functie is het eerste voorbeeld van een modulaire vorm.

Opmerking: Het aantal van partities van n wordt gegeven door

$$\frac{1}{4n\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

als $n\to\infty$. Dit resultaat is een van de ontdekkingen van Ramanujan. Voor het bewijs zijn de modulaire eigenschappen van η essentieel.

De ingrediënten van ons recept zijn dus partities: niet alleen van 5, maar partities van alle mogelijke gehele getallen. We moeten ook nog vertellen wat het *gewicht* is van elke partitie voor het recept: het maakt namelijk heel veel uit of je een brood bakt van 200 g bloem en 4 g zout of 4 g bloem en 200 g zout. Dat is precies waar dit proefschrift over gaat: welke combinatie van gewichten zorgt er voor dat het recept een (heerlijke) quasimodulaire vorm als uitkomst heeft? We geven een oneindige familie van voorbeelden van 'goede' gewichten.

Het recept van het smeersel in het begin nam van elke partitie van een geheel getal n precies n gram. Oftewel, het gewicht van elke partitie is gelijk aan de grootte van die partitie. Iets algemener nemen we als gewichtsfunctie ($k\geq 1$):

$$p_k(\lambda) = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{r}\left((\lambda_i - i + \tfrac{1}{2})^k - (-i+\tfrac{1}{2})^k\right)$$

voor een partitie

$$\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r.$$

Het zijn precies deze gewichtsfuncties die gebruikt worden in het recept van de Bloch–Okounkov stelling. Merk op dat voor $k=1$ we weer de gewichtsfunctie krijgen die aan een partitie de grootte toekent, dat wil zeggen $p_1(\lambda)=\sum_i\lambda_i=|\lambda|$.

Opmerking: Bij het tellen van zogenaamde overdekkingen van twee-dimensionale meetkundige objecten (oppervlakken) stuiten wiskundigen als vanzelf op bepaalde hoeveelheden partities. Dit soort tellingen begon met het werk van de wiskundige Hurwitz aan het einde van de negentiende eeuw en vormt een groot onderzoeksgebied in de huidige wiskunde en natuurkunde. Een voorbeeld van zo'n telling, vertaald naar een probleem in de symmetrische groep S_d is het bepalen van de kardinaliteit van

$$\{(\alpha,\beta,\gamma_1,\ldots,\gamma_k)\in S_d^{k+2}\mid \gamma_i \text{ transposities}, \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma_1\cdots\gamma_k=1\}$$

voor $k\geq 1$. Deze blijkt gelijk te zijn aan

$$d!\sum_{\lambda\vdash d} p_2(\lambda)^k,$$

waar de som loopt over alle partities λ van grootte d. Hoewel deze formule bewezen kan worden met klassieke resultaten uit de representatietheorie van eindige groepen, is deze pas in 1990 ontdekt in de theoretische natuurkunde [4]. Mijn proefschrift bevat ook enkele resultaten over vergelijkbare tellingen.

Bereidingswijze: de q-haak

We bereiden quasimodulaire vormen uit partities door gebruik te maken van de q-haak, afgebeeld als een garde. De q-haak van een (complexwaardige) gewichtsfunctie g is gedefinieerd als

$$\langle g\rangle_q := \frac{\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} g(\lambda)q^{|\lambda|}}{\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} q^{|\lambda|}} \in \mathbb{C}[[q]]. \quad (1)$$

Merk op dat de noemer $\sum_\lambda q^{|\lambda|}$ precies de voortbrengende reeks van partities is.

Als voorbeeld berekenen we nu $\langle p_1\rangle_q$. Door gebruik te maken van Eulers formule voor de voortbrengende reeks van partities zien we dat

$$\langle p_1\rangle_q = \frac{\sum_\lambda |\lambda|\, q^{|\lambda|}}{\sum_\lambda q^{|\lambda|}} = q\frac{\partial}{\partial q}\log\left(\sum_\lambda q^{|\lambda|}\right) = -q\frac{\partial}{\partial q}\log\left(\prod_{m\geq 1}(1-q^m)\right).$$

Door de expansie van de meetkundige reeks te gebruiken concluderen we dat

$$\langle p_1\rangle_q = \sum_{m\geq 1}\frac{mq^m}{1-q^m} = \sum_{m,r\geq 1} mq^{mr} = \sum_{n\geq 1}\sigma(n)\,q^n,$$

waar $\sigma(n)$ gelijk is aan de som van alle delers van n. Zo zien we hoe we, door te beginnen met partities, een reeks met interessante getaltheoretische coëfficiënten hebben gekregen. We zullen nu zien waarom het natuurlijk is de constante $-\frac{1}{24}$ bij deze reeks op te tellen. Namelijk, op deze constante na is de reeks een voorbeeld van een quasimodulaire vorm.

Opmerking: De breuk (1) kunnen we ook interpreteren als de door de natuurkundigen Maxwell en Boltzmann in de negentiende eeuw geïntroduceerde *toestandssom* van een meetbare grootheid g in een systeem. In dat geval is λ een van de vele microstaten, het getal n de bijbehorende energie en het getal q een functie van de temperatuur. Deze toestandssom geeft alle macroscopische informatie over het systeem, bijvoorbeeld het volume en de druk.

Resultaat: een quasimodulaire vorm

De quasimodulaire vormen die volgens bovenstaand recept verkregen zijn, kan men visualiseren zoals in Figuur 1. (Zie [5] voor hoe men deze afbeeldingen maakt en wat ze precies weergeven.) Het is duidelijk dat quasimodulaire vormen een opmerkelijk symmetrie bezitten! Deze doet denken aan de cirkellimieten van M.C. Escher. Inderdaad, in beide gevallen is de symmetriegroep die van een betegeling van het hyperbolische vlak.

Per definitie is een modulaire vorm van gewicht k een complexe functie f die voldoet aan de volgende eigenschappen:

(i) f is holomorf op het complexe bovenhalfvlak $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$.

(ii) Voor alle z geldt

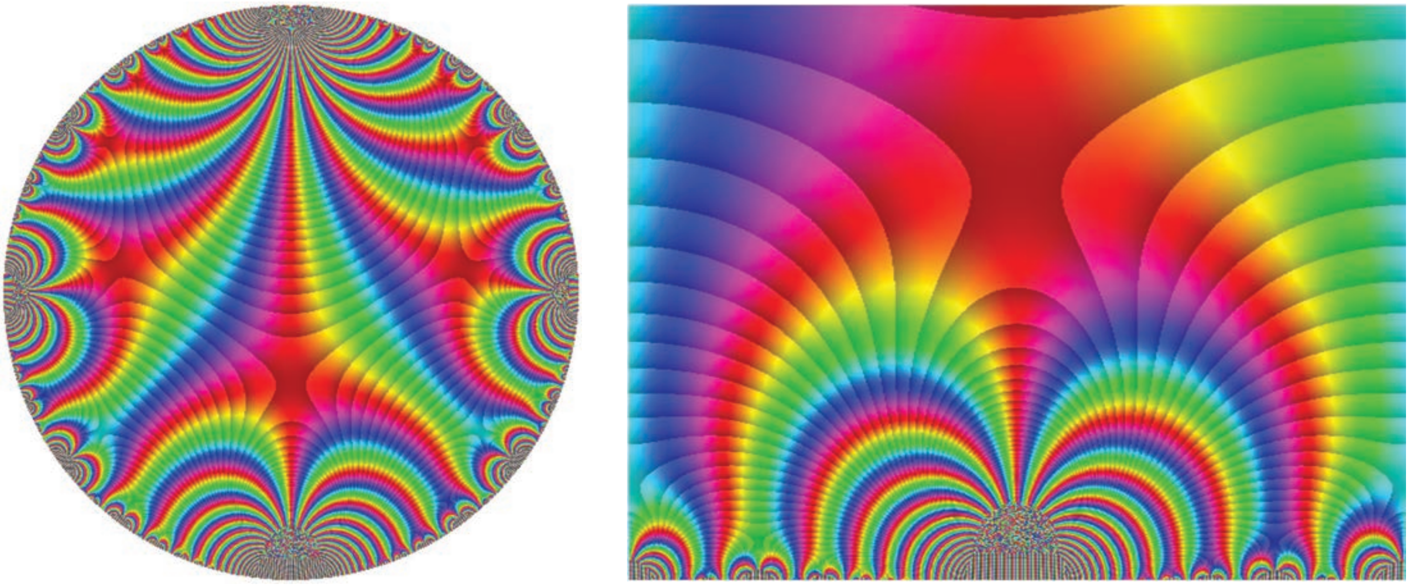
$$f(z+1)=f(z) \text{ en } f(\tfrac{-1}{z}) = z^k f(z).$$

(iii) $f(z)$ is holomorf in oneindig, dat wil zeggen, f heeft een Fourierreeks

$$f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \quad (q=e^{2\pi i z})$$

met Fouriercoëfficiënten a_n.

Zo is bijvoorbeeld η^{24} een modulaire vorm van gewicht 12. Voor de definitie van quasimodulaire vormen moet je de functionaalvergelijking (ii) vervangen door



Figuur 1 Visualisatie van quasimodulaire vormen.

(ii') Voor alle z geldt

$$f(z+1) = f(z) \text{ en } f(\tfrac{-1}{z}) = \sum_{i=0}^{p} z^{k-i} f_i(z)$$

voor holomorfe functies $f_0, \ldots, f_p$ op het bovenhalfvlak en in oneindig, als in (i) en (iii).

Het bekendste voorbeeld van een quasimodulaire vorm is de logaritmische afgeleide van de η-functie

$$E_2(z) = -\frac{1}{24} + \sum_{n \geq 1} \sigma(n) q^n$$

die voldoet aan

$$E_2\Big(-\frac{1}{z}\Big) = z^2 E_2(z) - \frac{1}{2}\frac{z}{2\pi \mathrm{i}}.$$

Hier hebben we weer de identificatie $q = e^{2\pi \mathrm{i} z}$ gemaakt.

Uit deze definities zijn de volgende belangrijke eigenschappen af te leiden. Allereerst kan je quasimodulaire vormen bij elkaar optellen, aftrekken en met elkaar vermenigvuldigen. Het resultaat is dan een nieuwe quasimodulaire vorm. (Als je de homogene polynomen x^2+y^2 en $x^5 - xy^4$ bij elkaar optelt is het resultaat een niet-homogeen polynoom. Evenzo is de som van twee quasimodulaire vormen van verschillende gewichten een quasimodulaire vorm van *gemengd gewicht*.) Bovendien kan je quasimodulaire vormen differentiëren, ook dan is het resultaat een quasimodulaire vorm. Ten tweede zijn er betrekkelijk weinig quasimodulaire vormen. Alle quasimodulaire vormen zijn namelijk een combinatie van de drie 'bouwstenen' E_2, E_4 en E_6. We hebben hierboven al de definitie van E_2 gezien; voor $k \geq 2$ is de Eisensteinreeks E_k gedefinieerd als

$$E_k = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n \geq 1} \sum_{d \mid n} d^{k-1} q^n$$

met B_k het k-de Bernoulligetal.

Stelling 1. *De algebra van quasimodulaire vormen is gelijk aan* $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$.

Opmerking: Er zijn vele toepassingen van quasimodulaire vormen in de getaltheorie alsmede in andere gebieden van de wiskunde. Bekijk bijvoorbeeld de modulaire θ-reeks

$$\theta(z) = \sum_{n_1,n_2,n_3,n_4 \in \mathbb{Z}} q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2}.$$

We vinden dan het klassieke resultaat dat elk positieve geheel getal n te schrijven is als som van vier kwadraten van gehele getallen op

$$8 \sum_{\substack{d \mid n \\ 4 \nmid d}} d \tag{2}$$

manieren, door te gebruiken dat de ruimte van modulaire vormen voor een vast gewicht van eindige dimensie is. Op deze manier reduceert het bewijs van de stelling van Lagrange tot het checken dat de coëfficiënt van q^n in θ overeenkomt met (2) voor $n = 1$ en $n = 2$.

Ook diepere resultaten, zoals de oplossing van de laatste stelling van Fermat, of de oplossing voor het bolpakkingsprobleem in dimensie 8 en 24, waar Maryna Viazovska recent de Fieldsmedaille voor heeft gewonnen, zijn bewezen met behulp van quasimodulaire vormen.

Het vermenigvuldigen van recepten

Zoals gezegd kan je quasimodulaire vormen bij elkaar optellen en met elkaar vermenigvuldigen. Hoe zit dat eigenlijk met recepten? Als we bijvoorbeeld de ingrediënten voor een cake samen nemen met de ingrediënten voor een brood, dan kunnen we uit deze combinatie van ingrediënten gemakkelijk zoete broodjes bakken. Optellen van recepten kan dus goed gaan. Vermenigvuldigen van de ingrediënten van cake en brood is iets heel vreemds, en ik denk niet dat daar iets van te bakken valt. Hier houdt de vergelijking met recepten dan ook op. De recepten van Bloch en Okounkov kan je namelijk wel met elkaar vermenigvuldigen.

Dat kan als volgt geformuleerd worden. Zij Λ^* de algebra van alle lineaire combinaties en producten van de gewichtsfuncties p_k, i.e.,

$$\Lambda^* := \mathbb{Q}[p_1, p_2, p_3, \ldots].$$

Stelling 2 (Bloch–Okounkov [1]). *Voor alle* $f \in \Lambda^*$ *is* $\langle f \rangle_q$ *een quasimodulaire vorm.*

Eerste variatietip: Symmetrische gewichtsfuncties

Tijdens mijn doctoraat vroeg ik me af of er nog meer van dat soort algebra's zijn als Λ^*. Immers, deze eigenschap dat je de gewichtsfuncties met elkaar kan vermenigvuldigen terwijl de q-haak geen groepshomomorfisme is, vond ik bijzonder. Er bestaat inderdaad nog zo'n algebra. Namelijk, zij

$$s_k(\lambda) = \sum_i \lambda_i^k$$

een *symmetrische* functie, in plaats de verschoven symmetrische functie p_k. Dan is er voor

$$\mathcal{S} := \mathbb{Q}[s_1, s_3, s_5, \ldots]$$

een vergelijkbaar resultaat.

Stelling 3. *Voor alle $f \in \mathcal{S}$ is $\langle f \rangle_q$ een quasimodulaire vorm.*

Het is goed om op te merken dat er nog talloze andere interessante functies f bekend zijn waarvoor $\langle f \rangle_q$ een quasimodulaire vorm is, maar dat het onbekend is of er nog meer van zulke *algebra's* als Λ^* en $\mathcal{S}$ bestaan.

Opmerking: Net als voor de verschoven symmetrische functies zijn er waarschijnlijk allerlei toepassingen in de aftellende meetkunde en mathematische fysica voor deze stelling. Na het verdedigen van mijn proefschrift heb ik bijvoorbeeld dit resultaat gebruikt in een artikel met Giulio Ruzza [7]. Hierin bewijzen we dat de voortbrengende reeksen van bepaalde quantum-Hamiltonische operatoren quasimodulair zijn.

Tweede variatietip:
De Laplace-operator van een recept

Wanneer voldoet het resultaat van een van de recepten nou aan de functionaalvergelijking (ii) in plaats van (ii'), dat wil zeggen, wanneer is het resultaat modulair in plaats van quasimodulair? Voor het antwoord op deze vraag moeten we g niet alleen beschouwen als gewichtsfunctie, maar ook als een formeel polynoom in variabelen $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots$, die we, op een constante na, identificeren met de gewichtsfuncties $p_1, p_2, \ldots$.

Stelling 4 (Zagier [8]). *Voor $g \in \Lambda^*$, schrijf $\tilde{g}$ voor het corresponderende polynoom in de variabelen $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \ldots$. Dan geldt dat $\langle g \rangle_q$ modulair is precies als $\tilde{g}$ in de kern ligt van de operator $\Delta = \mathcal{D} - \partial^2$ met*

$$\partial = \sum_{m \geq 0} \tilde{p}_{m-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_m},$$
$$\mathcal{D} = \sum_{k,l \geq 0} \binom{k+1}{k} \tilde{p}_{k+l-1} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{p}_k \partial \tilde{p}_l}.$$

en na de substitutie $\tilde{p}_{-1} = 1$ en $\tilde{p}_0 = 0$.

Zo kunnen we bijvoorbeeld uitrekenen dat de gewichtsfuncties $(k \geq 2)$

$$\tilde{h}_k = \sum_r \frac{\tilde{p}_1^r \tilde{p}_{k-2r}}{2^r (k - r - \frac{1}{2})_r r!}$$

modulaire vormen geven na toepassing van de q-haak (hier is $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$). Het blijkt dat de tweede-orde operator Δ zich precies zo gedraagt als de laplaciaan. Door vergelijkbare ideeën te gebruiken als voor de laplaciaan, heb ik in mijn proefschrift een expliciete basis gevonden voor de ruimte van gewichtsfuncties g zodat $\langle g \rangle_q$ een modulaire vorm is, in plaats van een quasimodulaire vorm.

Opmerking: Er is een opmerkelijke parallel tussen dit resultaat en het antwoord op de vraag voor welke polynomen P een theta-reeks als

$$\theta_P(z) = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}} P(n_1, n_2, n_3, n_4) q^{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2}$$

modulair is. De reeks θ_P, die een variatie is op de eerdergenoemde reeks θ, is namelijk een quasimodulaire vorm voor alle polynomen P, en modulair precies als P in de kern ligt van de Laplace-operator.

Derde variatietip: **Eenheidswortels**

In een wiskundig artikel over recepten kunnen eenheidswortels niet ontbreken! In deze variatie zijn eenheidswortels echter niet de ingrediënten, maar komen ze voor in de gewichtsfuncties. Bekijk bijvoorbeeld de gewichtsfunctie

$$\sum_i \lambda_i^k \zeta_N^{\lambda_i}$$

voor een N-de-machts eenheidswortel ζ_N. Polynomen in zulke gewichtsfuncties leveren inderdaad quasimodulaire vormen op (op een zekere twist in de definitie van quasimodulaire vormen na; we vegen de technische details hier onder het tapijt).

Ondanks dat complexe getallen als gewichten niets betekenen in de oorspronkelijke analogie van recepten ("Neem $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$ gram suiker,…"), is er wel degelijk een interpretatie van deze resultaten. Namelijk, na een discrete Fouriertransformatie, vinden we dat ook sommen van de vorm

$$\sum_{\lambda_i \equiv a \bmod N} \lambda_i^k,$$

quasimodulaire vormen geven. Hier is de som over alle delen λ_i van een partitie λ waar λ_i voldoet aan een bepaalde congruentieconditie. Bijvoorbeeld, voor $a = 1$ en $N = 2$, nemen we in de som alleen machten van de *oneven* delen λ_i.

Opmerking: Congruenties zijn een terugkerend thema in zowel de theorie van partities, als in de theorie van modulaire vormen. De bekendste en zeer fascinerende voorbeelden gaan beiden terug naar Ramanujan. Schrijf $p(n)$ voor het aantal partities van het getal n. Dan geldt

$$p(5k+4) \equiv 0 \mod 5,$$
$$p(7k+5) \equiv 0 \mod 7,$$
$$p(11k+6) \equiv 0 \mod 11.$$

En, als we $\tau(n)$ schrijven voor de coëfficiënt van q^n in $\eta^{24} = q\prod_{n \geq 1}(1-q^n)^{24}$, geldt er

$$\tau(n) \equiv \sum_{d \mid n} d^{11} \mod 691.$$

Verder lezen

Zelf heb ik veel geleerd van [2], [8] en [9] over modulaire vormen en hun relatie tot partities. Het boek [3] is een goede inleiding in de aftellende meetkunde die voortbouwt op het werk van Hurwitz.

Referenties

1 Spencer Bloch en Andrei Okounkov, The character of the infinite wedge representation, *Adv. Math.* 149(1) (2000), 1–60.

2 Peter Bruin en Sander Dahmen, *Modular Forms*, Lecture notes voor het MasterMath-vak over modulaire vormen, 2020, https://few.vu.nl/~sdn249/modularforms16/notes.pdf.

3 Renzo Cavalieri en Eric Miles, *Riemann Surfaces and Algebraic Curves: A First Course in Hurwitz Theory*, Vol. 87 of London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 2016.

4 Robbert Dijkgraaf en Edward Witten, Topological gauge theories and group cohomology, *Comm. Math. Phys.* 129(2) (1990), 393–429.

5 David Lowry-Duda, Visualizing modular forms (2020), arXiv:2002.05234.

6 Jan-Willem van Ittersum, *Partitions and Quasimodular Forms: Variations on the Bloch–Okounkov Theorem*, Proefschrift, Universiteit Utrecht, 2021, https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/402356.

7 Jan-Willem van Ittersum en Giulio Ruzza, Quantum KdV hierarchy and quasimodular forms (2022), arXiv:2202.03213.

8 Don Zagier, Elliptic modular forms and their applications, in *The 1-2-3 of Modular Forms*, Universitext, Springer, 2008, pp. 1–103.

9 Don Zagier, Partitions, quasimodular forms, and the Bloch–Okounkov theorem, *Ramanujan J.* 41(1–3) (2016), 345–368.