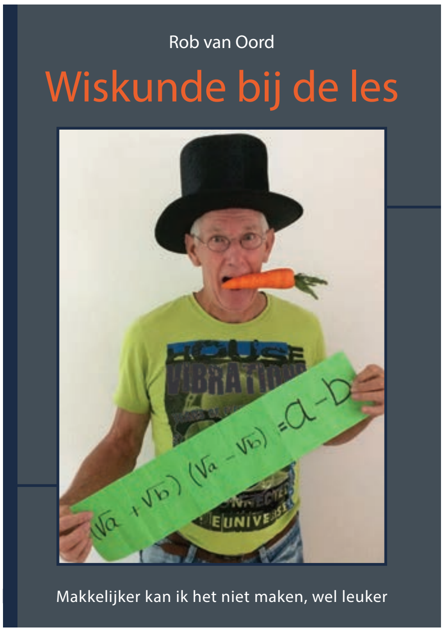
Rob van Oord
Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 28ste Nationale Wiskunde Dagen

Een nieuwe dimensie

Op vrijdag en zaterdag 8 en 9 april vonden voor de 28ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats, in de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout. Aanvankelijk zou het evenement plaatsvinden op 28 en 29 januari, maar vanwege de coronamaatregelen is het verplaatst naar april. Rob van Oord was weer een van de deelnemers en doet verslag.

Na een jaar virtuele wiskundedagen en een uitgestelde datum, vonden de Nationale Wiskunde Dagen (NWD) dit jaar plaats in april. Ook volgende jaren worden de NWD gehouden in april. Je zou kunnen spreken van een nieuwe dimensie. Wiskundig gezien is dimensie het aantal coördinaten dat je nodig hebt voor plaatsbepaling. In de ruimte spreek je dan van drie dimensies.



Figuur 1 Het omslag van het boek van Rob van Oord.

Maar in de omgang betekent een nieuwe dimensie meestal een nieuw aspect. Voor mijzelf was er een ander aspect dat van belang was. Op dag 1 van de NWD verscheen het boek waar ik een jaar lang aan gewerkt heb. Ik vatte het idee op om de onderwerpen van de workshops die ik door de jaren heen op de NWD en de studiedagen van de NVvW heb gegeven in een boek bij elkaar te zetten. Ik liet daarin zien hoe ik probeerde mijn lessen uitdagender, levendiger en leuker te maken. Aangespoord door collega's ben ik aan de slag gegaan. In de coronatijd leek me dit een goede tijdsbesteding. Zie Figuur 1.

Perfect getal

Maar to the point. De NWD werden geopend door Jan Beuving. Geen onbekende voor ons. Een cabaretier met een wiskundige achtergrond. En dat geeft hem, zo zegt hij zelf, een thuisgevoel als hij voor ons op het podium staat. Ik las regelmatig zijn columns in De Verdieping van *Trouw*. Altijd spitsvondig met een draai naar wiskunde. In zijn optreden gebruikte hij de column die nog moest verschijnen over iemand die op vakantie zijn laatste girokaart foutief invulde. Dat ging toen nog met de hand. Hij vulde bij het jaar 98, terwijl het 89 had moeten zijn. Verbeteringen (met Tipp-Ex of dergelijke) zijn niet toegestaan. Totdat hij op het idee kwam om er een 1 vóór te zetten en een 9 erachter. Ja, 1989 dus. Jan liet ons ook een schitterend liedje horen van Tom Lehrer: 'That's Mathematics'. Het ging over waar je overal wiskunde voor nodig hebt en is op YouTube te vinden.

Het waren de 28ste NWD. Een perfecte timing dat hij voor de opening van deze perfecte editie gevraagd is. Immers, 28 is, na 6, een perfect getal: gelijk aan de som van zijn delers ($1+2+4+7+14=28$). De eerstvolgende uitnodiging met zo'n *perfect getal* zou dan voor de 496ste NWD zijn. Dat gaat hij niet halen.

Ambulances

In de startlezing vertelde Sandjai Bhulai, mede namens Rob van der Mei (die door omstandigheden niet kon komen), over hoe zij wiskunde gebruiken om maatschappelijke problemen op te lossen. Ze kregen voor hun onderzoek naar wachttijden van ambulances de Huibregtsenprijs 2021. Het is soms beter om alvast een ambulance te verplaatsen naar een andere plek om bij een eventuele volgende melding sneller ter plaatse te kunnen zijn. Gebruik van data van ongelukken en (het huidige aantal) standplaatsen van ambulances combineerden ze tot een strategisch plan waarbij uiteindelijk een ambulance bij een nieuw ongeval vaker op tijd arriveert. Voor een zogenaamd A1-geval moet er binnen 15 minuten een ambulance zijn. In 95 procent van de gevallen moet hij er op tijd zijn. Tot dan toe was 7 procent te laat. (In het examen havo wiskunde A tijdvak 2 van 2022 staat een opgave over Spoedeisende ritten van ambulances.)

Op dit moment zijn ze aan het rekenen hoe de brandweer, met het huidige materieel, beter voorbereid kan zijn op verschijnen bij rampen. Een extra factor daarbij is dat er ook nog verschillende soorten voertuigen zijn. We zijn benieuwd naar hun uitkomst. Ze hebben ook bedacht hoe de wachttijden in de ouderenzorg voor plaatsing in een tehuis omlaag konden. Door voorkeuren handiger toe te delen werd de wachttijd van 235 dagen teruggebracht naar gemiddeld 211. Een belangrijk aspect is dat je de belanghebbenden goed moet uitleggen wat de mogelijkheden zijn. Er komt dus ook sociale vaardigheid om de hoek.

Er is een aantal mensen in wiskundeland waarvan ik blij word. Ik kies graag voor het bijwonen van hun workshop. Natuurlijk zijn er ook nog veel andere om uit te kiezen. Maar ik kan er per NWD slechts drie kiezen, naast de workshop die ik zelf geef.

Wat is dimensie?

Na de lunch, die zoals gebruikelijk weer overdadig en lekker was, spoedde ik mij opgetogen naar de eerste workshop. Ik had gekozen, hoe kan het ook anders, voor 'Wat is dimensie?' door Jeroen Spandaw. Hij trakteerde ons in een levendige sessie op leerzame gedachten over dimensie.

Aan de hand van verschillende dia's mochten we bedenken welke dimensie volgens ons hoort bij

1. een sinusgrafiek,
2. ruitjes op papier,
3. een boloppervlak met vergelijking $x^2+y^2+z^2=1$, en
4. een bolinhoud met ongelijkheid $x^2+y^2+z^2<1$.

Je zou kunnen stellen dat het aantal parameters (= het aantal vrijheidsgraden) dat nodig is om het item te beschrijven de dimensie bepaalt. Maar dan kom je soms tot tegenstrijdigheden of paradoxen. G. Cantor ontdekte dat de reële lijn 'evenveel' punten heeft als het reële vlak, dat wil zeggen er bestaat een afbeelding $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$ zodat er voor ieder punt (a,b) in $\mathbb{R}^2$ precies één t in $\mathbb{R}^1$ is met $f(t)=(a,b)$. Erger nog, G. Peano ontdekte 'vlakvullende krommen', dat wil zeggen continue afbeeldingen $g:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$ zodat voor ieder punt (a,b) in $\mathbb{R}^2$ een t in $\mathbb{R}^1$ bestaat met $g(t)=(a,b)$. Hebben we dan toch maar één continue vrijheidsgraad nodig om het reële vlak te beschrijven en kunnen we dan niet meer zeggen dat het reële vlak een grotere dimensie heeft dan de reële lijn? Is het begrip 'dimensie' nog wel houdbaar?

Het korte antwoord op deze laatste vraag is: ja, het begrip 'dimensie' is gered door de Nederlandse wiskundige L. E. J. Brouwer. Hij bewees dat zo'n vlakvullende, continue kromme bij $g:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$ onherroepelijk zelfdoorsnijdingen heeft. Er bestaan dus punten t_1 en t_2 in $\mathbb{R}^1$, met $t_1<t_2$ zodat $g(t_1)=g(t_2)$. Topologisch zijn $\mathbb{R}^1$ en $\mathbb{R}^2$ dus echt verschillende objecten.

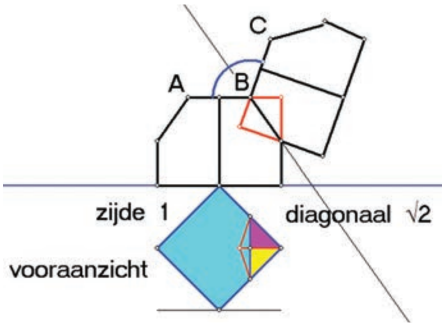
Het bewijs dat $\mathbb{R}^1$ en $\mathbb{R}^2$ topologisch verschillen gaat als volgt. Als je uit $\mathbb{R}^1$ een punt weglaat, valt de lijn in twee stukken uiteen, maar als je uit $\mathbb{R}^2$ een punt weglaat bestaat het restant nog steeds uit één stuk. Om het topologische verschil tussen $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ te bewijzen, gebruiken we een nieuw idee, namelijk om lussen te bekijken om de weggehaalde punten. Als je uit $\mathbb{R}^2$ of uit $\mathbb{R}^3$ een punt weghaalt, dan bestaan beide restanten nog wel uit één stuk. Echter, een lus in $\mathbb{R}^2$ rond het weggehaalde punt kun je niet continu tot één punt samentrekken, terwijl dat bij elke lus in $\mathbb{R}^3$ om een weggehaald punt nog wel kan. We concluderen daaruit dat $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ topologisch verschillend zijn.

Tot slot hebben we gekeken naar holografie, waarbij hoger-dimensionale objecten in lagere dimensies gerepresenteerd worden 'zonder informatieverlies'. Jeroen stipte heel even aan dat als gekeken wordt door de bril van F. Klein, dat wil zeggen als we alleen maar naar 'symmetrieën' kijken, dat dan bijvoorbeeld het 2-dimensionale hyperbolische vlak 'niet te onderscheiden' is van zijn 1-dimensionale rand. Dus in dit perspectief lijkt het dimensiebegrip wel te sneuvelen. Op zich is elke stap van een fractal een hoeveelheid lijntjes $(\dim=1)$. Maar de limiet heeft een dimensie tussen 1 en 2. Dit wordt onder andere uitgelegd in *Fractals*, deel 10 van de Zebra-reeks.

Kubussen met een deuk

In blok 2 moest ik zelf aan de bak. Samen met Marjan Botke deden we uit de doeken hoe je met zes vouwblaadjes een kubus met een deuk kan vouwen. Het maken van een krans van vijf van deze kubussen gaf een extra dimensie (zie Figuur 2). Het lijkt alsof de vijf kubussen precies strak in elkaar geschoven een regelmatige vijfhoek insluiten. Maar niets is wat het lijkt. Als je een bovenaanzicht maakt van twee in elkaar geschoven kubussen met een deuk, dan kun je de hoek berekenen die ze vormen als ze strak in elkaar zitten. Die hoek is geen $108°$ die je nodig hebt om exact een regelmatige vijfhoek te krijgen (zie Figuur 3). Dit onderdeel zat in 2020 al in onze workshop, maar daar zijn we toen niet aan toegekomen. Wel staat

Figuur 2 Vijf kubussen vormen een krans.



Figuur 3 De hoek tussen twee kubussen.

Figuur 4 Een deelnemer toont een kubus met een deuk.

Figuur 5 Trits getordeerde kubussen.

de vouwinstructie en de achtergrondinformatie in de hand-out van NWD 2020, 'Wiskunde daar komt wat uit'. De deelnemers waren dolenthousiast over het gebodene (zie Figuur 4). Tussendoor maakten we ook nog vouwsels die, aan elkaar geplakt, een serie getordeerde kubussen vormden (zie Figuur 5).

Tattoos en spelletjes

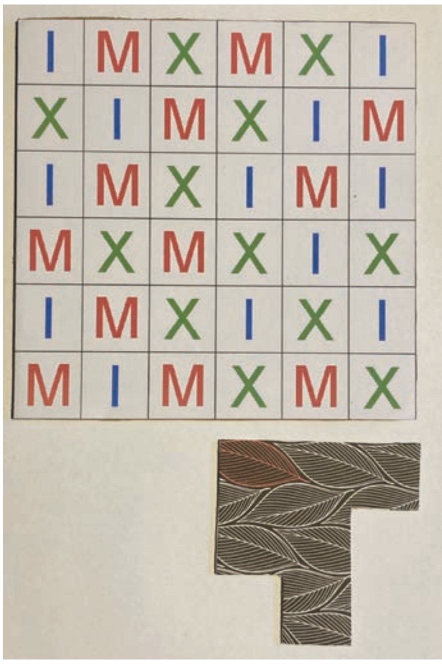
In de avondvoorstelling verscheen de Brit Tom Crawford ten tonele. Hij heeft zijn hele lijf vol tattoos over wiskunde laten zetten. Bij elke tattoo vertelde hij het verhaal erachter. De tattoo $e^{i\pi}+1=0$ staat onder zijn linker tepel, op zijn rechter kuit staan de vijf platonische lichamen. Op zijn rechter bovenarm staan honderd decimalen van het getal e. Op YouTube kun je een filmpje, getiteld *Navier–Stokes equations*, over zijn ideeën achter de tattoos bekijken (https://youtu.be/ERBVFcutl3M). Vermakelijk hoe er telkens weer Britse wiskundigen op de NWD komen die van wiskunde een feestje weten te maken.

Op andere NWD begon ik de avond met een bezoek aan de spelletjesmarkt. Dit keer bracht ik de avond verder door met Odette (Pentomino) De Meulemeester (volgens Odette mag ik niet 'de' Meulemeester schrijven, want 'de' is in Vlaanderen alleen voorbehouden aan adel) en andere Vlaamse vrienden. Ze wilde graag van mij weten hoe je een kubus met een deuk vouwt. Met een klein gezelschap deed ik mijn workshop nog eens dunnetjes over. Daarna kwam er een niet-aflatende stroom spelletjes en puzzeltjes, die Odette allemaal zelf maakt, ter tafel. Ze deelt graag uit. Voor dit jaar moesten vijf gelijke puzzelstukjes van zes vierkantjes op een karton met M, X en I gelegd worden zodat er precies twee keer een M, een X en een I zichtbaar zijn: het jaar MMXXII. Zie Figuur 7 en 8.

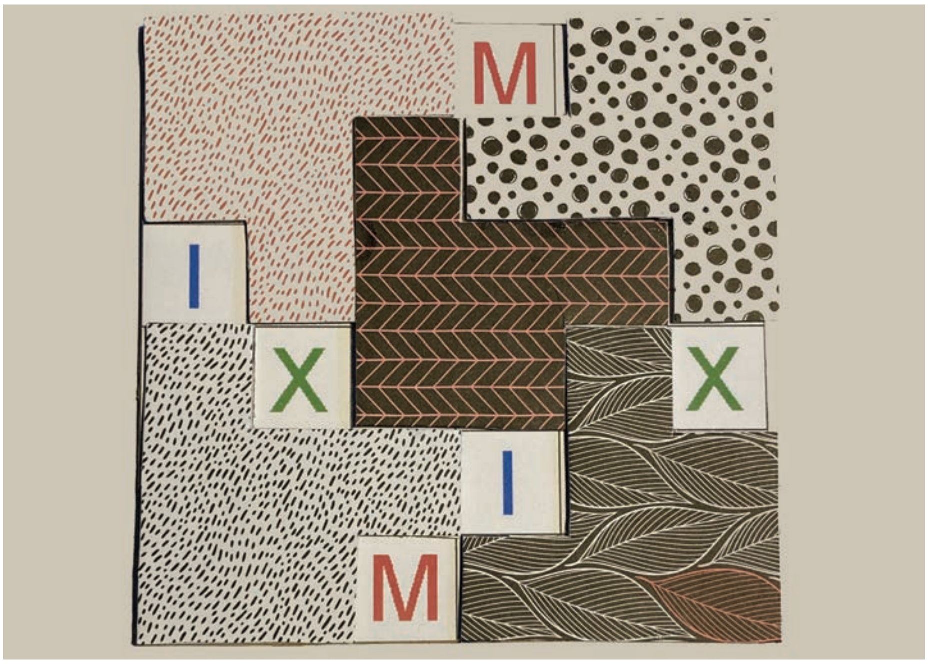
Gelukkig bleef er ook nog tijd over om de beentjes van de vloer te heffen bij de rockmuziek van Out of Time.

Kleurboek

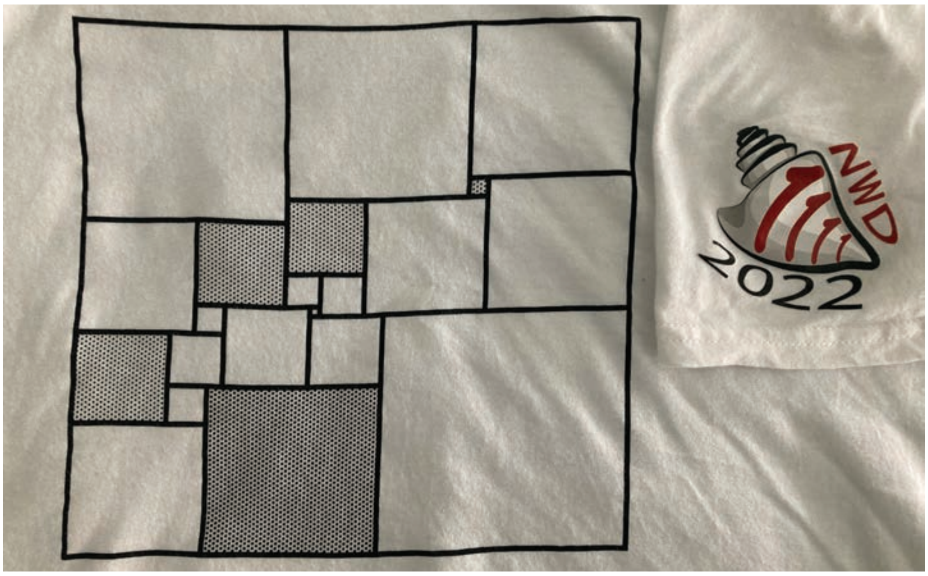
De Funrun kreeg ook een nieuwe dimensie. Bij klaarlichte dag wandelde ik (rennen mag ik niet meer van mijn vrouw)



Figuur 6 Karton met één puzzelstukje.



Figuur 7 Een oplossing.



Figuur 8 Opdruk T-shirt Funrun.

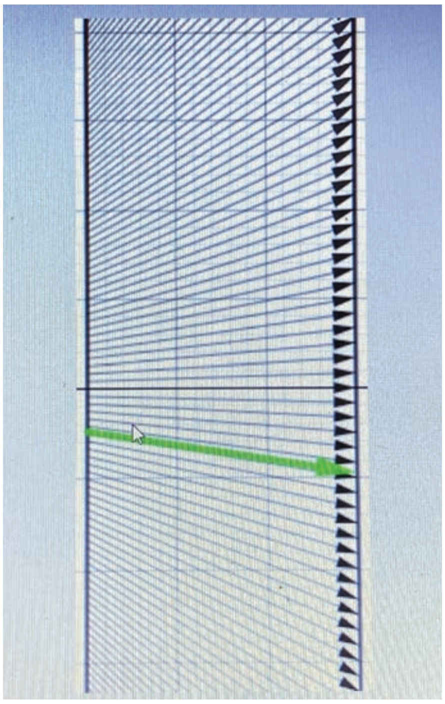
het parcours dat ik al vele malen in het pikkedonker had afgelegd. Nu genoten we van kleurrijke bollenvelden en fris lentegroen. De print op het T-shirt komt uit het *Kleurboek Wiskunde* van Dirk Huylebrouck. Hij presenteerde dit kleurboek als tegenhanger van de bekende Mandala-kleurboeken. De prent bestaat uit 21 verschillende vierkanten in een vierkant met zijde 112. Dit (onder voorwaarden, kleinst mogelijke) patroon is in 1978 ontdekt door de Nederlander Duijvestijn. Zie Figuur 8.

Functies en nomogrammen

Voor blok 3 bezocht ik de workshop 'Fun met functies', gegeven door Paul Drijvers en anderen. In de workshop werd getoond hoe het Freudenthal Instituut onderzoek doet naar het gebruik van applicaties op de mobiele telefoon in de les. Via een link konden deze worden gebruikt. Leerlingen zien spelenderwijs, *hands-on* heet dit, hoe je met nomogrammen formules beter kunt begrijpen. Zie Figuur 9. Wij konden er zelf ook mee aan de slag (ik ben niet zo handig met mijn mobiel, dus keek ik mee bij mijn buurvrouw). Uiteraard werd in de lezing ook aandacht besteed aan de verschillende niveaus die leerlingen doorlopen bij het leren van het begrip functie. Niveau 1: Input–Output, als een machientje. Niveau 2: dynamische co-variatie, met grafieken erbij. Niveau 3: afbeelding, correspondentierelatie met pijlen tussen origineel en beeld. Niveau 4: als wiskundig object, een functie differentiëren of primitiveren. Bij het leren wil je dat de leerlingen steeds een hoger niveau bereiken. Via (woord)formules, grafieken, tabellen, nomogrammen (volgens de docenten van de workshop een ondergewaardeerd instrument), taal, naar functioneel denken, in termen van relaties.

De workshop gaf een mooi inkijkje in de ontwikkeling van nieuwe tools om wiskunde mee te bedrijven. In de toekomst zullen VR-tools (virtual reality) nog beter inzicht geven in wiskundige begrippen.

Wel werd duidelijk dat sinds de invoering van ICT bij wiskunde het gebruik ervan nog vaak in 'het laten zien van' en 'mooi tekenen van' is blijven hangen. De echte didactische voordelen van ICT zouden nog veel meer benut kunnen worden. De projecten die met medewerking van het Freudenthal Instituut worden uitgevoerd zouden het veld over de streep moeten trekken om een inhaalslag te maken. Voor interactieve lessen zijn verschillende tools ontwikkeld. Kahoot! en Wooclap zijn daarvan mooie voorbeelden.



Figuur 9 Nomogram uit de applet.

Lugubere wiskunde

In blok 4 gaf Dirk Huylebrouck een vlammende lezing over *Lugubere wiskunde*, zoals ook zijn nieuwste boek heet. Veel van de voorbeelden die Dirk liet zien waren afkomstig uit schoolboeken die de nazi's gebruikten bij hun rekenlessen, verkapte propaganda dus. Ook hoe Le Corbusier de gulden-snedeverhouding gebruikte om in zijn ogen aan te tonen dat Joden geen 'mooie' mensen zijn. Kortom, wiskunde die niet altijd even zuiver werd toegepast.

Epidemieën

De slotlezing werd verzorgd door een aanstormend talent, Clara Stegehuis. Als jonge wiskundige heeft ze natuurlijk een blog. Daar kun je lezen waarmee ze bezig is en wat haar gedachten zijn. Ze presenteerde hoe je uit data een netwerk van muzikanten maakt en daarin bijvoorbeeld kunt zien wie de gezelligste artiest is.

Uiteraard kwamen ook de epidemieën ter sprake. De rekenmodellen zijn in feite differentiaalvergelijkingen in de vorm van

$$\frac{dI}{dt} = b \cdot I \cdot \frac{S(n)}{N} - k \cdot I,$$

met $I =$ het aantal geïnfecteerden, $b =$ het aantal ontmoetingen (besmetting van vatbare personen), $k =$ de snelheid van beter worden. Om te berekenen wat het effect is van een besmetting moet je rekening houden met verschillende aspecten, zoals welke maatregelen je neemt, hoeveel mensen er immuun worden, hoe groot de kans is dat je iemand tegen het lijf loopt die je kunt besmetten, enzovoort.

$$R_0 = \frac{\text{aantal te besmetten personen}}{\text{tijd dat je ziek bent}}.$$

Het is zaak om ervoor te zorgen dat $\frac{dI}{dt} < 0$ wordt, zodat $R_0 < 1$. Alleen dan neemt het aantal besmettingen af. Met een blij gevoel dat wiskundigen bijdragen aan een gezonde maatschappij verliet ik het Atrium om met vrienden de afsluitende lunch te nuttigen en nog wat laatste nieuwtjes te horen.