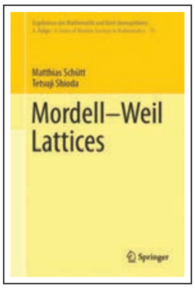
Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Matthias Schütt, Tetsuji Shioda

Mordell–Weil Lattices

Springer, 2019
xvi + 431 p., prijs €65,39
ISBN 9789813293007

De schrijvers beogen met dit boek een up-to-date-behandeling te geven van Mordell–Weil-roosters van elliptische krommen over een functielichaam. Deze zijn aan het eind van de jaren tachtig van de vorige eeuw onafhankelijk van elkaar door N. Elkies en T. Shioda geïntroduceerd en hebben direct daarna tot belangwekkende resultaten geleid.

Om dit onderwerp in zijn context te plaatsen is het goed een paar eigenschappen van *elliptische krommen* te memoreren. In de algebraïsche meetkunde verschijnen deze als kubische krommen in het projectieve vlak en in de complexe meetkunde als 1-dimensionale complexe tori. In beide verschijningsvormen kan men een commutatieve optelling definiëren op de punten van de kromme. De structuur van de resulterende groep, de *Mordell–Weil-groep*, hangt af van het lichaam K waarover men werkt. Welbekend heeft Mordell laten zien dat voor $K = \mathbb{Q}$ de groep eindig voortgebracht is en Weil heeft dit voor een willekeurig getallenlichaam bewezen.

In dit boek wordt het geval behandeld dat K het functielichaam is van een kromme, zeg C, die zelf over een al dan niet algebraïsch afgesloten lichaam k is gedefinieerd. Zo'n elliptische kromme kan men ook opvatten als een *elliptisch oppervlak*, dat wil zeggen een oppervlak dat gevezeld is over C en waarvan de 'algemene' vezel E_t over $t \in C$ een gladde elliptische kromme is. Punten over K corresponderen met secties van de vezeling. Ook hier geldt de stelling van Mordell mits de vezeling niet constant is (met andere woorden, de j-invariant van de elliptisch kromme C_t varieert met t). De Mordell–Weil-groep modulo torsie is dus een vrije groep van eindige rang, de *Mordell–Weil-rang*. Op deze groep is er een paring (met waarden in $\mathbb{Q}$) die in beginsel afkomt van de snijvorm op divisoren op het oppervlak X (secties geven immers divisoren). De van deze paring voorziene groep is het *Mordell–Weil-rooster* waar dit boek over gaat. De precieze definitie van de paring is nogal technisch en zal hier niet gegeven worden. De lezer moet hieruit niet concluderen dat Mordell–Weil-roosters ongrijpbaar zijn. Zoals Shioda heeft laten zien, zijn ze meestal direct uit vergelijkingen te berekenen en dit is precies wat in het boek gebeurt.

Zoals boven vermeld zijn er veel toepassingen, waarvan sommige direct gevonden zijn na de introductie van het begrip en andere vrij recent. Deze bestrijken een groot gebied van de wiskunde; afhankelijk van het lichaam waarover gewerkt wordt, zijn deze van complex-meetkundige, Galois-theoretische of van aritmetisch-meetkundige aard. Veel van die toepassingen komen in dit boek aan de orde en het is dan ook niet verbazingwekkend dat de eerste honderd pagina's gewijd zijn aan basisbegrippen uit uiteenlopende takken van wiskunde, zoals gehele roosters, elliptische krommen, algebraïsche oppervlakken en in het bijzonder elliptische oppervlakken — die elk uitgebreid worden besproken.

Pas na al die voorbereidingen komt er een hoofdstuk over de Mordell–Weil-roosters, waarna de eerste meetkundige toepassingen aan de orde komen die elliptische oppervlakken betreffen (wederom zo'n honderd pagina's). Daarna komen algebraïsche vergelijkingen en hun Galois-groep aan de orde, gelieerd aan zogenaamde excellente families van rationale elliptische oppervlakken. Een voorbeeld van zo'n familie is de elliptische kromme (over $\bar{\mathbb{Q}}(t)$) met vergelijking

$$y^2+ty=x^3-\epsilon_1x^2+\epsilon_2x-\epsilon_3,$$

waarbij de drie parameters $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3\in\bar{\mathbb{Q}}$ algebraïsch onafhankelijk zijn over $\mathbb{Q}$. Hier is het Mordell–Weil-rooster het wortelrooster A_2. De Galois-groep van $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\epsilon_2,\epsilon_3)$ werkt hierop en het blijkt (Stelling 9.15) dat deze representatie als beeld de Weyl-groep van A_2 heeft. Dit is één van de definiërende eigenschappen van 'excellentie' met betrekking tot een spiegelingsgroep — de overige zijn te technisch om hier te geven. Grofweg gezegd: dit begrip zegt dat er een aan de bovenstaande vergelijking gekoppelde eindige Galois-uitbreiding van $\mathbb{Q}(\epsilon_2,\epsilon_3)$ is met Galois-groep A_2. De spiegelingsgroepen van type E_6,E_7,E_8 treden ook op in het raamwerk van excellente vezelingen van expliciet gegeven rationale elliptische oppervlakken en geven zo soortgelijke Galois-uitbreidingen van getallenlichamen. Daaraan gekoppeld worden relaties besproken met allerlei klassieke onderwerpen, zoals de 27 lijnen op het kubische oppervlak, del Pezzo-oppervlakken, de 28 bitangenten aan een vlakke vierdegraadskromme, enzovoort.

Dan volgen twee hoofdstukken over zogenaamde $\mathrm{K3}$-oppervlakken met een elliptische vezeling. Het standaard voorbeeld wordt gegeven door de vierdegraads-oppervlakken in $\mathbb{P}^3$, maar die laten in het algemeen geen elliptische vezeling toe. Maar, als men onderstelt dat het oppervlak een lijn bevat, dan geeft de vlakkenwaaier door de lijn een elliptische vezeling. Het zijn dit soort oppervlakken die in de hoofdstukken 11 en 12 worden behandeld, meestal over $\mathbb{C}$, maar er is ook een paragraaf gewijd aan supersinguliere $\mathrm{K3}$-oppervlakken (noodzakelijk in positieve karakteristiek).

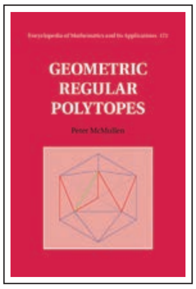
Het slothoofdstuk, hoofdstuk 13, gaat over het vinden van Mordell–Weil-groepen van elliptische krommen over $k=\mathbb{Q}(t)$ van zo hoog mogelijke rang, en met toepassingen op bolpakkingen. Verschillende klassieke methodes komen aan de orde, onder andere die van Néron (Mordell–Weil-rang 10 als record), van Mestre (11 als record), en van Elkies (rang 18 is onmogelijk), Elkies e.a. (er is een kromme met rang minstens 28). Over $\mathbb{C}(t)$ bewees Shioda dat

$$y^2=x^3+t^m+1,\quad m\in\mathbb{N},$$

Mordell–Weil-rang ≤ 68 heeft met gelijkheid als 360 een deler is van m. Als $m=p$, een priemgetal van de vorm $6k-1$, en als de bovenstaande kromme over $\mathbb{F}_{p^2}$ wordt beschouwd, dan geeft hun Mordell–Weil-rooster record goede bolpakkingen, zo blijkt in paragraaf 13.4.

Ter afsluiting nog wat opmerkingen over stijl en uitvoering van dit boek. De keuze van het steeds terugkerende voorbeeld van het hexagonale rooster (A_2) helpt de lezer enorm om de in de verschillende hoofdstukken ingevoerde begrippen goed te begrijpen. Dit wordt verder ondersteund door de vele diagrammen en schetsen van krommenconfiguraties. De gebonden uitgave is speciaal want hierin zijn de illustraties van de 27 lijnen op een kubisch oppervlak en de 28 bitangenten aan een kwartiek in fraaie kleuren uitgevoerd. Aanbevelenswaardig zijn ook de historische noten aan het eind van ieder hoofdstuk. Die zijn een genot om te lezen; hier komen auteurs aan het woord waarvan minstens één de geschiedenis van het onderwerp van het boek — en veel van wat er mee samenhangt — van nabij heeft meegemaakt en er een actieve rol in gespeeld heeft. Is er dan niets op het boek aan te merken? Misschien is de index te uitgebreid. Die leidt voor sommige (door de schrijver dezes opgezochte) begrippen tot een lange zoektocht door delen van het boek. Hier hebben de schrijvers het adagium 'in de beperking toont zich de meester' voor één keer niet gevolgd. Deze minieme kritiek laat mijn eindoordeel onverlet: ik raad dit meesterwerk iedere algebraïsch- of aritmetisch-meetkundige die in oppervlakken of elliptische krommen is geïnteresseerd van harte aan.

Chris Peters



Peter McMullen

Geometric Regular Polytopes

Encyclopedia of Mathematics and its Applications 172
Cambridge University Press, 2020
xi + 603 p., prijs £105.00
ISBN 9781108489584

In 2002 publiceerde de auteur, tezamen met Egon Schulte, het boek *Abstract Regular Polytopes* in de Encyclopedia-serie van Cambridge University Press, onder nummer 92. In stilte hoopten zij dat de kennis zoals toen gepresenteerd, uitgebreid zou worden tot wat inmiddels in het vakgebied ontwikkeld is. Het voor u liggende boek is daar de verwoording van. Tot aan de publicatie van het boek van McMullen en Schulte, was de systematische uitpluizing van de structuur der reguliere polytopen voornamelijk geconcentreerd op die van ten hoogste drie dimensies. Daarna heeft McMullen het onderzoek uitgebreid naar hogere dimensies, ook daar waar het de zogeheten apeirotopen betreft (dat wil zeggen oneindige polytopen). In zijn eigen woorden zegt de auteur, dat herbezinning op de zaken zoals die zich ontwikkelden en ontwikkeld hebben, nodig waren, namelijk het weergeven van de classificatie van de reguliere polytopen en apeirotopen van volle en bijna volle rang. Maar het onderhavige boek stijgt daar ver bovenuit.

Het boek is opgedeeld in vier delen, en ieder deel bevat een groot aantal secties. In deel 1 vinden we in sectie 1 uitweidingen naar algebraïsche eigenschappen, isometrieën, hoek-som-betrekkingen, groepentheorie, quaternionen, en wat dies meer zij. In sectie 2 worden abstracte reguliere polytopen behandeld. In sectie 3, geheten 'Realizations of symmetric sets', komen we de Wijthoff-ruimte tegen (over Wijthoff komen we later nog te spreken). In sectie 4 volgen, te beginnen met de constructie van Wijthoff, 'Realizations of polytopes', terwijl in de secties 5 en 6 operaties op en met figuren aan de orde komen, alsmede ook rigiditeitseigenschappen.

Deel 2 behelst eigenschappen van klassieke polytopen (zoals de 24-cel, de 600-cel, de 120-cel, de ster-polytopen, honingraatstructuren), maar ook van niet-klassieke polytopen (zoals polytopen in alle dimensies, dito voor apeirotopen, alsmede apeirohedra en polyhedra, tezamen met hoger-dimensionale uitzonderingen.

Dan deel 3, 145 bladzijden vol met karakteristieke eigenschappen van allerhande families van 3-dimensionale en 4-dimensionale polytopen en apeirotopen, tezamen met hoger-dimensionale gevallen zoals de Gosset–Elte-polytopen (over Elte komen we later ook nog te spreken).

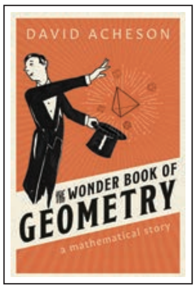
Deel 4 bevat verdere, recente uitbreidingen van de Gosset–Elte-polytopen, lokale toroïdale polytopen, bijzondere families van 4-polytopen en 5-polytopen. Het boek bevat ten slotte een omvangrijke literatuurlijst. Elke sectie van de delen is voorzien van noten en commentaren, hetgeen prachtig overkomt.

In dit korte bestek valt het volgende op te merken. Het boek is zonder meer een moderne bijbel op het gebied van de huidige stand van zaken betreffende polytopen. Het is niet overdreven te stellen dat 'alles ervan' in dit boek te vinden is; iets dergelijks overkwam mij met het boek *Endliche Gruppen I* van Bertram Huppert, maar dan wel in 1967.

In het voorgaande zijn de namen van Wijthoff en Elte gevallen. Als lezer van het Nieuw Archief voor Wiskunde, december 2020, bladzijde 240, zal het u niet ontgaan zijn dat daar vier Nederlandse meetkundigen voor het voetlicht werden gebracht, namelijk S.L. van Oss, P.H. Schoute, W.A. Wijthoff en E.L. Elte. In 2003 schreef T.A. Springer een necrologie voor de KNAW vanwege het overlijden van de grote voorvechter betreffende veelvlak-structuren, H.S.M. Coxeter, waarin opgemerkt wordt (citaat) "dat hun werk in onze tijd min of meer vergeten lijkt te zijn geraakt". In het boek van McMullen komt evenwel het 'oude' werk van Van Oss, van Wijthoff en van Elte goed aan bod en de invloed ervan blijkt ook nu nog steeds springlevend te zijn! Overigens, in Nederland heb ik geen weet van personen die zich thans actief met de dingen zoals behandeld in het boek, bezighouden. Daarentegen ligt dat in het buitenland nu kennelijk anders!

Alles overziende biedt het boek een complete, verrassende blik op het vakgebied der polytopen. Een voltreffer van de Cambridge University Press. Tot slot nog dit. Het Zentralblatt für Mathematik is thans volledig openbaar en gratis toegankelijk te raadplegen voor en door een ieder. Ik geef u daaruit de aantallen publicaties en de tijdvakken van de bovengenoemde vier meetkundigen: S.L. van Oss (8; 1898–1932), P.H. Schoute (172; 1870–1916), W.A. Wijthoff (10; 1893–1927), E.L. Elte (5; 1912–1929). Ook vond ik in het Zentralblatt van de hand van een zuster van Willem Abraham Wijthoff, namelijk Anna Geertruida Kerkhoven-Wijthoff, tien publicaties uit de jaren 1893–1924. Het was geheel nieuw voor mij, dat ook zij wiskundig actief is geweest.

Rob van der Waall



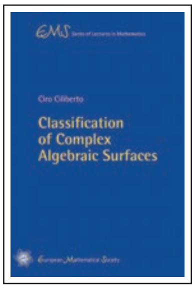
David Acheson

The Wonder Book of Geometry
A Mathematical Story

Oxford University Press, 2020
288 p., prijs £12.99
ISBN 9780198846383

Acheson is van oorsprong een toegepast wiskundige in de vloeistofdynamica, maar heeft zich sinds zijn emeritaat gericht op het schrijven van popularisaties van wiskundige onderwerpen. Zijn meest recente boek is dit wonderboek, dat ook heel goed zou passen in de Zebra/Epsilon-reeks zoals wij die kennen, hoewel dit wonderboek misschien soms wel iets luchtiger is. Op de kaft zien we een goochelaar afgebeeld die de vijf regelmatige veelvlakken uit zijn hoge hoed tovert; aan het begin van elk hoofdstukje komt dit steeds als pictogram terug. Het boek bestaat uit 32 korte hoofdstukken. In de inleiding neemt Acheson de lezer mee terug naar 1956, toen hij 10 jaar oud was, en voor het eerst Thales' theorema uitgelegd kreeg. Zijn enthousiasme van toen heeft hij nog niet verloren en hij probeert dit door middel van dit boek op de lezer over te brengen. De pagina's bevatten maar weinig tekst, vaak een soort schoolbord met een krijttekening, met soms nog een ander figuur, foto of afbeelding van een wiskundige. Het boek verwacht nagenoeg geen voorkennis, alles wordt kort en helder uitgelegd en bewezen. Na wat basiswerk begint in hoofdstuk 3 een verhandeling over Euclides' *Elementen*, met een plaatje van Euclides, en de oudst bekende versie van zijn boek. De stijl blijft luchtig, maar wel serieus. Hoofdstuk 6 behandelt de stelling van Pythagoras en geeft drie bewijzen. Acheson meldt dat er in 1927 al een boek was van Elisha Scott Loomis met 230 bewijzen wat in de 2de druk (1940) al uitgebreid was tot 371 bewijzen, inclusief dat van een schoolmeisje, Ann Condit, die in 1938 een nieuw bewijs leverde, ook weer met een plaatje van haar. Genoemd wordt dat de Babyloniërs al een speciaal geval van de stelling van Pythagoras kenden, inclusief een foto van het kleitablet YBC 7289. Ook toepassingen van geometrie worden getoond waaronder de stuiterbommen van de 'dam busters', uit 1943, waarbij de vliegtuigen op een precieze hoogte moesten vliegen om hun bommen af te werpen, ook weer geïllustreerd met een foto. Uiteindelijk wordt in hoofdstuk 32, het laatste, niet-euclidische geometrie en wat topologie behandeld. Er is nog een lijst met 'further reading' en een index. Al met al is het wonderboek een heel fraai geïllustreerd boekje, waarin een groot aantal onderwerpen de revue passeert. Het lijkt gericht op de middelbare scholier en is op een heel plezierige manier geschreven.

Ronald Aarts



Ciro Ciliberto

Classification of Complex Algebraic Surfaces

EMS Series of Lectures in Mathematics
European Mathematical Society, 2020
ix + 133 p., prijs €36,00
ISBN 9783037192108

Een van de grote open problemen in de algebraïsche meetkunde is de (birationale) classificatie van algebraïsche variëteiten.

De classificatie van projectieve algebraïsche krommen over de complexe getallen gaat terug tot Riemann. Hier volstaat het geslacht g als enige topologische invariant en voor iedere $g \geq 2$ is er een moduliruimte die de krommen van geslacht g parametriseert.

De situatie bij oppervlakken, dat wil zeggen, projectieve algebraïsche variëteiten is ingewikkelder. In het begin van de twintigste eeuw hebben Enriques en Castelnuovo een classificatie van oppervlakken gegeven. Later zijn deze resultaten nog uitgebreid naar compacte complexe oppervlakken (Kodaira) en in positieve karakteristiek (Bombieri–Mumford). Deze classificatie maakt allereerst onderscheid naar Kodaira-dimensie. Deze bespreking is niet een geëigende plek om deze dimensie te introduceren, maar deze dimensie is $-\infty$ of een niet-negatief geheel getal ten hoogste de dimensie van de variëteit.

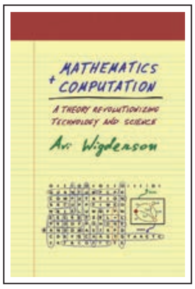
Oppervlakken van Kodaira-dimensie $-\infty$, 0 en 1 kunnen vrij precies worden beschreven. Zo zijn de minimale oppervlakken van Kodaira dimensie 0 de regeloppervlakken en $\mathbb{P}^2$. Van de oppervlakken van Kodaira dimensie 2 ontbreekt een preciezere classificatie. Deze oppervlakken worden normaal gesproken 'van algemeen type' genoemd.

Het centrale thema van dit boek is de classificatie van algebraïsche oppervlakken van Enriques te presenteren, maar dan met gebruik van moderne technieken (Minimal Model Programme), die ontwikkeld zijn voor de classificatie van projectieve variëteiten in hogere dimensie. Daarnaast geeft de auteur een gedetailleerde beschrijving van een aantal klassen die in de classificatie voorkomen.

Zowel Chris Peters als Klaus Hulek hebben collegedictaten geschreven met hetzelfde uitgangspunt. Ciliberto wijkt op twee punten af van deze dictaten. Ten eerste probeert Ciliberto zo weinig mogelijk topologische en complex-analytische resultaten te gebruiken. Daarnaast geeft Ciliberto een interpretatie van de resultaten in termen van het Sarkisov-programma, een hulpmiddel oorspronkelijk geïntroduceerd voor de classificatie in hogere dimensie.

Dit boek is een bewerking van een collegedictaat ontworpen voor een cursus voor promovendi. Het vereist zekere kennis in algebraïsche meetkunde. De auteur gebruikt bijvoorbeeld een aantal resultaten uit de theorie van cohomologie van schoven van coherente modulen. Dit zijn resultaten die vaak aan het einde van een mastercollege algebraïsche meetkunde worden behandeld. Voor iemand die vertrouwd is met deze resultaten, bijvoorbeeld een promovendus in getaltheorie of meetkunde, is dit boek goed te lezen. De argumentatie is precies en redelijk beknopt.

Remke Kloosterman



Avi Wigderson

Mathematics and Computation:
A Theory Revolutionizing Technology and Science

Princeton University Press, 2019
xiii + 418 p., prijs £40.00
ISBN 9780691189130

Dit is een boek over complexiteitstheorie, geschreven door een van de sleutelfiguren uit het gebied. Wigderson ontving in 2021 de Abelprijs voor zijn bijdragen hieraan.

Complexiteitstheorie ontstond in de jaren 1960/1970 als een nieuwe loot van de theorie van berekenbaarheid (Computability Theory), waarbij behalve naar het onderscheid berekenbaar/niet berekenbaar ook werd gekeken naar rekentijd en geheugen. Dit leidde tot een indeling in complexiteitsklassen, waarvan P en NP de bekendste zijn. Vijftig jaar later zijn de vragen over de ongelijkheid van een aantal van deze klassen nog altijd open, en is het P versus NP-probleem inmiddels uitgegroeid tot een van de bekendste open problemen uit de hele wiskunde.

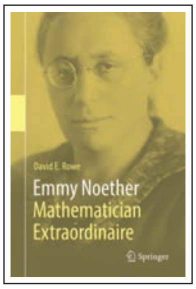
Het boek van Wigderson is een leerboek, populariserend geschrift, ideeën-geschiedenis, en memoires ineen. Het is niet echt een *studieboek*: bewijzen ontbreken veelal, en vaak wordt alleen een 'high-level description of the ideas' gegeven. Dit kan echter zeer nuttig zijn om een idee te krijgen van het moderne onderzoek, en het boek is daarmee interessant voor zowel experts als voor een breder wiskundig publiek.

Een van de meest intrigerende ontwikkelingen van de afgelopen jaren is het werk in de richting van een bewijs van $\mathrm{P} = \mathrm{BPP}$, dat met name genoemd werd in het laudatio van de Abelprijs. Zoals P (polynomial time) staat voor de klasse van efficiënt berekenbare problemen, zo staat BPP (bounded probabilistic polynomial time) voor de klasse van problemen die efficiënt berekenbaar zijn met probabilistische algoritmen. Het beroemdste voorbeeld is het probleem PRIMES om te bepalen of een getal priem is. Er bestonden reeds lang probabilistische primaliteitstesten voordat in 2002 door Agrawal, Kayal en Saxena werd bewezen dat $\mathrm{PRIMES} \in \mathrm{P}$. De vraag is of het *altijd* zo is dat een probleem met een efficiënt probabilistisch algoritme ook een efficiënt deterministisch algoritme heeft, en dit wordt uitgedrukt door $\mathrm{P} = \mathrm{BPP}$. Verrassend genoeg wijst veel er nu op dat dit inderdaad zo is, zie bijvoorbeeld de stelling van Impagliazzo en Wigderson (Theorem 7.7). De grote rol die randomness speelt in de complexiteitstheorie, ook voor resultaten over deterministische algoritmen, is sowieso intrigerend.

Het boek is alleen al aan te bevelen omdat het iets biedt dat weinig in de wiskundeliteratuur te vinden is, namelijk een beschrijving van het vakgebied van binnenuit, door iemand die het mede zelf heeft vormgegeven. Een grote hoeveelheid onderwerpen passeert de revue, te veel om hier allemaal te bespreken. Er is in de afgelopen decennia veel moois gebeurd, maar tegelijkertijd is de hoeveelheid open vragen enorm. Veel daarvan draaien om het al dan niet bestaan van bepaalde logische circuits, die een combinatorische blik bieden op berekenbaarheid, ergens tussen logica en grafentheorie in. Ondanks de overstelpende hoeveelheid materiaal maakt Wigdersons boek duidelijk dat de complexiteitstheorie eigenlijk nog maar net begonnen is.

Het boek is verkrijgbaar bij Princeton University Press, maar ook gratis te downloaden via de webpagina van de auteur.

Sebastiaan Terwijn



David E. Rowe

Emmy Noether
Mathematician Extraordinaire

Springer, 2021
xxi + 339 p., prijs €130,79
ISBN 9783030638092

Emmy Noether (1882–1935) was een toonaangevend wiskundige, die in onze huidige tijd vooral wordt herinnerd door twee resultaten: haar beroemde principe uit 1918 over de equivalentie van behoudswetten en symmetrie bij variationele problemen, en de haar zo kenmerkende abstracte axiomatische opbouw van de algebra, ontwikkeld in de twintiger jaren. Zij doorbrak op radicale wijze het glazen plafond van de masculiene wereld van wiskundigen door in Göttingen in de voetsporen van Gauss, Riemann en Hilbert te treden, en wel als buitengewoon — dat wil zeggen onderbetaald — hoogleraar, een dubbelzinnig grapje in de titel van het te bespreken boek.

Emmy Noether groeide op in een liberaal Joods gezin. Haar moeder Ida Kaufmann was van welgestelde komaf. Haar vader Max Noether was hoogleraar wiskunde in Erlangen, en is vooral bekend door zijn werk met Alexander von Brill over de algebraïsch meetkundige aanpak van het holomorf meetkundige werk van Riemann over abelse integralen. Hij was een erudiet persoon, enige tijd voorzitter van de DMV, en schreef een groot aantal nagedachtenissen in de *Mathematische Annalen*. Samen met de Joodse Paul Gordan, de koning van de klassieke invariantentheorie, vormden zij de wiskundestaf in Erlangen. Een volledig Joodse tweekoppige wiskundestaf was ondanks sluimerend antisemitisme toen niet onmogelijk.

Gordan had naam gemaakt met zijn stelling uit 1868 dat de algebra van invarianten van de groep $\mathrm{SL}(2)$ voor binaire vormen van willekeurige graad d steeds eindig voortgebracht is. In de slotzin van zijn in memoriam uit 1912 karakteriseerde Max Noether zijn huisvriend Gordan als volgt: “Er war ein Algorithmiker.”

Om een indruk te geven van het werk van Emmy Noether breng ik een driedeling aan. De eerste periode in Erlangen was er een van relatieve afhankelijkheid, haar studie wiskunde en promotie in 1907 bij Gordan, waarbij ze geheel in zijn stijl een tabel met 331 voortbrengende invarianten van $\mathrm{SL}(3)$ voor ternaire vormen van graad 4 wist te produceren. Later zou ze dit eerste werk afdoen als ‘Formelngestrüpp’. Rond 1890 had Hilbert reeds bewezen dat voor willekeurige n en d de invarianten van $\mathrm{SL}(n)$ voor vormen in n veranderlijken van graad d een eindig voortgebrachte algebra vormen. Het bewijs gebruikte zijn niet-effectieve basisstelling zodat voor gegeven n en d het onduidelijk blijft tot welke graad je moet doorgaan om een volledig stel voortbrengers te hebben gevonden. Dit ontlokte bij Gordan het prangende commentaar: “Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie.” Na haar promotie bleef Emmy Noether nog geruime tijd in Erlangen. Met hulp van Ernst Fischer, die vanaf 1911 de voormalige leerstoel van Gordan bezette, bekwaamde ze zich in de moderne invariantentheorie van Hilbert, schreef daar artikelen over, en nam het onderwijs voor haar vader waar bij ziekte of afwezigheid.

In 1916 maakte ze op uitnodiging van Hilbert en Klein de overstap naar Göttingen. Hilbert volgde in die tijd met grote belangstelling het ontstaan van de algemene relativiteitstheorie, en zocht ondersteuning van Noether om vanuit zijn variationele formulering van de Einstein-vergelijking de behoudswetten te begrijpen. Dit resulteerde in haar beroemde artikel ‘Invariante Variationsprobleme’ uit 1918 over de equivalentie van symmetrie en behoudswetten, dat de basis zou vormen voor haar habilitatie in 1919. Haar resultaat werd aanvankelijk nauwelijks opgemerkt, maar wordt thans zowel binnen de wiskunde als de natuurkunde gezien als een fundamenteel principe van haar hand.

Vanaf 1920 volgt haar zelfstandige periode als hoogleraar in Göttingen tot 1933. In deze periode wordt de abstracte axiomatische aanpak van de algebra haar handelsmerk. Als Hermann Weyl (1885–1955) in 1930 naar Göttingen komt als opvolger van Hilbert ziet hij in Emmy Noether de centrale figuur van wiskundige activiteit aldaar, zowel in de vruchtbaarheid van haar onderzoeksprogramma als ook in haar invloed op een grote kring van leerlingen, de ‘Noether boys’. Van der Waerden (1903–1996) kwam als Amsterdams promovendus in 1924 een semester naar Göttingen, om het benodigd algebraïsch begrippenapparaat voor zijn onderzoek van haar te leren. Hun contact verdiepte zich met de jaren, leidend tot zijn invloedrijke tekstboeken *Moderne Algebra* uit 1930 en *Einführung in die Algebraische Geometrie* uit 1939.

Met de benoeming van Adolf Hitler in januari 1933 tot rijkskanselier daalde Nacht und Nebel over Duitsland en Europa neer. Een ontslag van alle Joodse hoogleraren volgde enkele maanden later. Over dat moeilijke jaar 1933 schrijft Weyl over Noether: “Her courage, her frankness, her unconcern about her own fate and her conciliatory spirit were, in the midst of all hatred and meanness, despair and sorrow surrounding us, a moral solace.” Op initiatief van Solomon Lefschetz kreeg Emmy Noether in september 1933 een aanstelling aan Bryn Mawr College, nabij Philadelphia. Geregeld gaf ze voordrachten aan het IAS in Princeton. Ze overleed in april 1935 pas 53 jaar oud aan de complicaties van een operatie, waarbij een tumor was verwijderd.

Er is de afgelopen jaren relatief veel over Emmy Noether geschreven. De reden zal wel primair zijn dat zij ondanks alle obstakels als eerste vrouw zo wist te excelleren op het hoogste niveau in een exclusieve mannenwereld. Zij is daarmee een uitzonderlijk rolmodel. Zij was zeer ruimhartig in een sterk competitieve omgeving. Toen Van der Waerden haar in 1927 vertelde dat hij het begrip ‘punto generico’ van de Italiaanse meetkundigen met haar algebra nu goed kon begrijpen, reageerde ze enthousiast, gaf nog wat tips en stelde voor om het in de *Mathematische Annalen* te publiceren. Wat ze er echter niet bij vertelde, was dat ze hetzelfde resultaat een half jaar daarvoor tijdens een college al had behandeld. Ze wilde het plezier van een jongeman over zijn ontdekking niet afnemen. Van der Waerden mocht dit verhaal later graag vertellen. Hoe anders waren Newton, Gauss en Hilbert.

Het boek van David Rowe vertelt uitgebreid het levensverhaal van deze bijzondere vrouw. Ik heb het met veel plezier gelezen. Twee kleine kritische kanttekeningen echter. Voor ieder die meer over de persoon Emmy Noether wil weten, zijn de nagedachtenissen uit 1935 van haar directe naasten, te weten Weyl (in zijn verzameld werk), Van der Waerden (in de *Mathematische Annalen*), en Alexandrov (in haar verzameld werk), absolute aanraders. Het had de lezer kunnen plezieren als ze integraal als appendix waren opgenomen, in plaats van hier en daar een citaat eruit. Daarnaast vroeg ik me af in hoeverre de hoofdstukken 3 en 5 te lezen zijn voor mensen, die nog niet bekend zijn met de betreffende wiskunde, namelijk haar eerder genoemd artikel uit 1918 over symmetrie en behoudswetten, en haar samenwerking met Brauer en Hasse over klassenlichamentheorie. Maar goed, dat ligt natuurlijk ook aan de aard van wiskunde, en je kunt ook altijd een hoofdstuk overslaan.

Gert Heckman

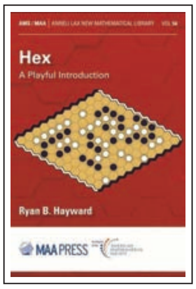
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.

Nils Berglund

An Introduction to Singular Stochastic PDEs

Allen-Cahn Equations, Metastability, and Regularity Structures

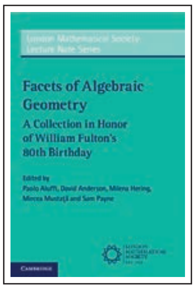
European Mathematical Society, 2022
ISBN 9783985470143
doi.org/10.4171/ELM/34



Ryan B. Hayward

Hex: A Playful Introduction

American Mathematical Society, 2022
ISBN 9781470464929
bookstore.ams.org/nml-54

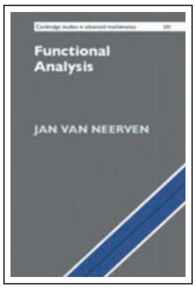


Paolo Aluffi e.a. (eds.)

Facets of Algebraic Geometry

A Collection in Honor of William Fulton's 80th Birthday

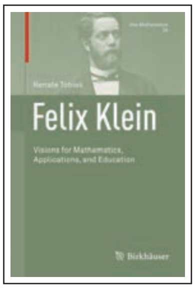
Cambridge University Press, 2022
ISBN 9781108870061
cambridge.org/9781108870061



Jan van Neerven

Functional Analysis

Cambridge University Press, 2022
ISBN 9781009232470
cambridge.org/9781009232470

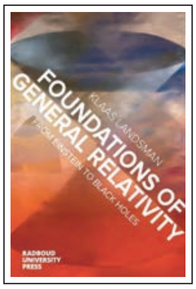


Renate Tobies

Felix Klein

Visions for Mathematics, Applications, and Education

Birkhäuser, 2019
ISBN 9783030757854
springer.com/978-3-030-75785-4

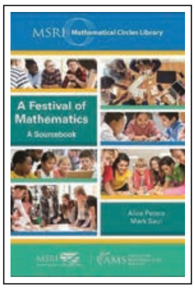


Klaas Landsman

Foundations of General Relativity

From Einstein to Black Holes

Radboud University Press, 2021
ISBN 9789083178929
doi.org/10.54195/EFVF4478

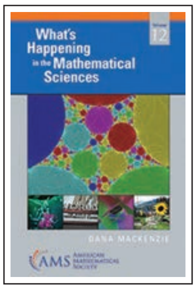


Alice Peters, Mark Saul

A Festival of Mathematics

A Sourcebook

American Mathematical Society, 2022
ISBN 9781470453381
bookstore.ams.org/mcl-28

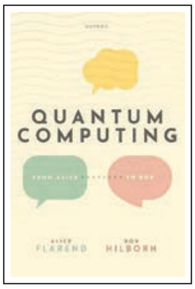


Dana Mackenzie

What's Happening in the Mathematical Sciences

Volume 12

American Mathematical Society, 2022
ISBN 9781470464981
bookstore.ams.org/happening-12

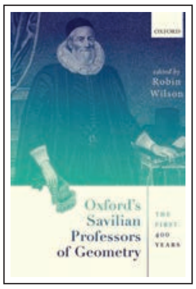


Alice Flarend, Robert Hilborn

Quantum Computing

From Alice to Bob

Oxford University Press, 2022
ISBN 9780192857989
global.oup.com/academic/product/quantum-computing-from-alice-to-bob-9780192857989



Robin Wilson (ed.)

Oxford's Savilian Professors of Geometry

Oxford University Press, 2022
ISBN 9780198869030
global.oup.com/academic/product/oxfords-savilian-professors-of-geometry-9780198869030