

Rainer Kaenders

Hausdorff Center for Mathematics
Universität Bonn
r.kaenders@uni-bonn.de

Onderwijs

Meetkunde van de stang: speciale en algemene reële algebraïsche krommen

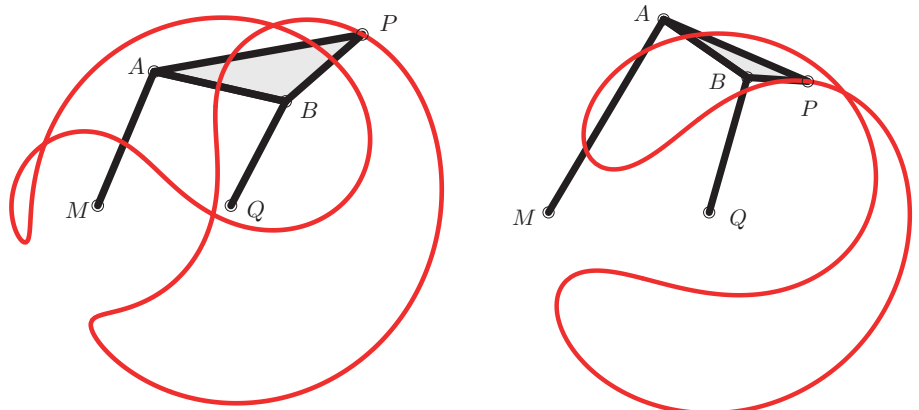
De *Vakantiecursus Wiskunde voor leraren* heeft in 2021 voor de 75ste keer plaats gevonden. Rainer Kaenders was (naast Teun Koetsier en de kunstenaar Theo Jansen) docent van deze cursus en probeert in een tweeledige bijdrage (NAW 5/23(1) en (2)) de rijkdom te laten zien die zich bij de studie van stangenmechanismes op het gebied van elementaire meetkunde ontplooit.

Hoe kun je een algebraïsche kromme door een stangenmechanisme tekenen? Wij beginnen met het antwoord op deze vraag door het ontwerp van een constructie voor de lemniscaat van Bernoulli en kijken dan naar de constructie van stangenmechanismes voor kegelsneden. Uiteindelijk stellen we ons de vraag welke reële algebraïsche krommen überhaupt door een stangenmechanisme gerealiseerd kunnen worden. Het antwoord is verrassend: Van elke reële algebraïsche kromme kan elk begrensd stuk door een stangenmechanisme worden getekend. Hiervoor stellen we de algemene constructie uit het bewijs van Alfred Bray Kempe (1849–1922) voor, die laat zien hoe een stangenmechanisme voor de algemene reële algebraïsche kromme kan worden vervaardigd. Deze aanpak illustreren we aan de hand van een eenvoudige kromme, de parabool, wat al voor een zo eenvoudige kromme een grootscheepse constructie oplevert.

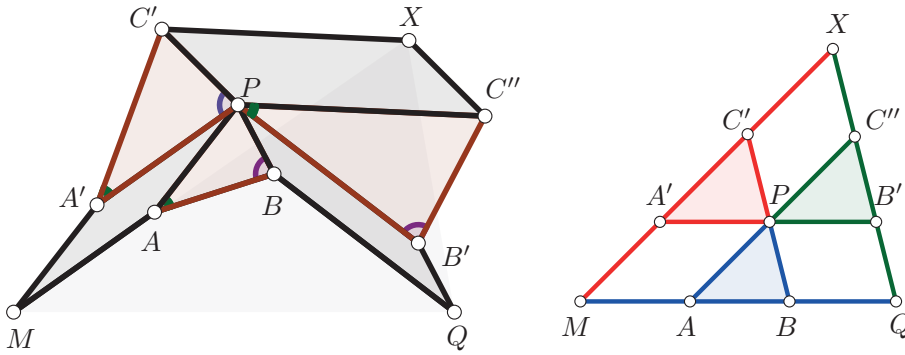
Terugblik

In het eerste deel van deze bijdrage over stangenmeetkunde kwamen pogingen aan bod om een rechtgeleiding met een stangenmechanisme te maken die óf een lijnstuk benaderen óf het precies beschrijven. We hebben geleerd hoe je met stangen-

mechanismes *inversoren* kunt maken. Dat zijn stangenmechanismes die met een pivotpunt aan het vlak zijn vastgemaakt en waarmee je in een gegeven cirkel rond dat pivotpunt kunt spiegelen. Dat wil zeggen dat je ergens op de stangen van dit stangenmechanisme een *wijzer* en een *pen* vast neerzet, zodat als je de wijzer op een punt van een door de wijzer bereikbaar deel van het vlak schuift dat dan de pen op de plek van het spiegelbeeld van dat punt in deze cirkel komt te liggen. De eerste zulke bekende inversor was de



Figuur 1 Twee voorbeelden van koppelkrommen.



Figuur 2 Drie verwante koppelmechanismen volgens de *Stelling van Roberts en Chebychev* links, Cayley-diagram als constructieschema rechts.

inversor van Peaucellier en Lipkin. Het bestaan van zulke inversoren zorgt ervoor dat zodra we in staat zijn een bepaalde kromme te construeren wij onmiddellijk ook een mechanisme voor haar spiegelbeeld in de gegeven cirkel hebben. Zo is bijvoorbeeld een cirkel makkelijk met een stang te maken, die met één einde aan het vlak is vastgemaakt. Als wij ervoor zorgen dat deze cirkel door het middelpunt gaat van de reflectiecirkel, dan is zijn beeld onder de inversie een rechte lijn hetgeen een rechtgeleiding mogelijk maakt.

In de vorige bijdrage werden ook zogenaamde *koppelmechanismen* geïntroduceerd. Een dergelijk koppelmechanisme is een stangenvierzijde $MQBA$, waarbij M en Q vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle ABP$ aan de stang AB , de zogenaamde *koppelstang*, is vastgemaakt en star met AB meebeweegt. In dat punt P van de driehoek ABP denken we ons een ‘pen’ gemonteerd. Het is daarbij ook mogelijk dat de driehoek ABP onttaard is, dat wil zeggen dat P ook op de lijn AB kan liggen en zelfs A of B kan zijn. Een dergelijk mechanisme tekent een *koppelkromme*, wier vorm afhankelijk is van de lengtes van de stangen van het koppelmechanisme.

Op grond van een stelling van Roberts en Chebychev (zie het eerste deel) horen bij elke door een koppelmechanisme voort-

gebrachte koppelkromme nog twee andere (over het algemeen verschillende) koppelmechanismen, die dezelfde koppelkromme voortbrengen. Deze mechanismen heten *verwante* (‘cognate’) koppelmechanismen. Deze verwante koppelmechanismen vinden we als we uitgaande van het gegeven koppelmechanisme alle andere lijnstukken en punten van het gehele plaatje zoals dat links in Figuur 2 te zien is door de eenduidig bepaalde evenwijdige lijnen door de desbetreffende punten construeren. Schematisch houden we daarbij het patroon, het Cayley-diagram rechts in Figuur 2 aan. Houden we M en Q vast en bewegen de rest, dan blijft ook X vast zodat het punt P op een koppelkromme van elk van de drie koppelmechanismen verloopt: het mechanisme dat ontstaat als je M en Q vasthoudt, het mechanisme met vaste Q en X of hetgene met X en M vast. In elk van de drie gevallen doorloopt P dezelfde koppelkromme.

Stangenmechanisme voor de lemniscaat

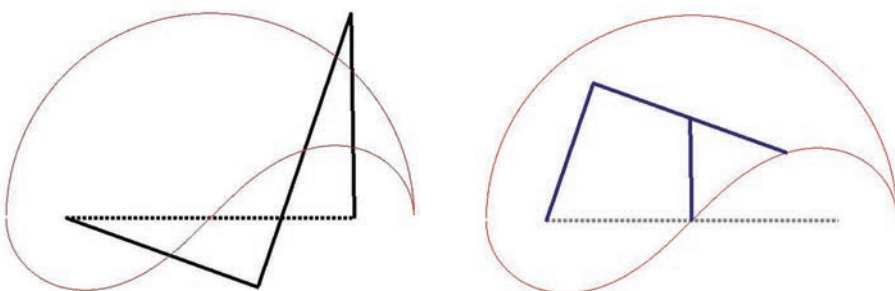
Sommige koppelkrommen hebben een vorm die aan het cijfer acht doet denken. Zulke krommen worden ook *veralgemeenseerde lemniscaten* of soms *lemniscoïden* genoemd. De naam is terecht omdat ook de klassieke lemniscaat van Bernoulli door een dergelijk koppelmechanisme kan worden getekend.

Hoewel de lemniscaat als kromme reeds door John Wallis (1616–1703) in zijn boek *Arithmetica Infinitorum* werd ingevoerd, wordt zij meestal verbonden met de naam Jacob Bernoulli (1654–1705), die er in het jaar 1694 een vergelijking voor heeft afgeleid. De lemniscaat is gedefinieerd als de meetkundige plaats van punten waarvan het product van de afstanden tot twee gegeven brandpunten constant is. In formule: gegeven twee brandpunten F_1 en F_2 in het vlak met afstand $2d$, dan is de *lemniscaat* de meetkundige plaats van alle punten P in het vlak waarvoor geldt

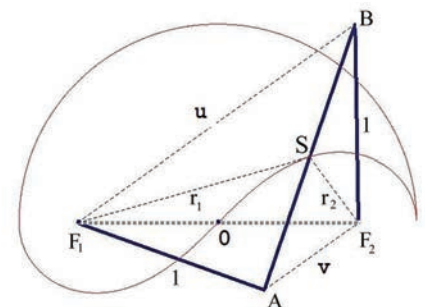
$$|PF_1| \cdot |PF_2| = d^2.$$

Uiteindelijk willen we een stangenmechanisme voor kegelsneden construeren. Het plan ervoor gaat als volgt. Wij beginnen met een orthogonale hyperbool. Hiervoor zullen wij bewijzen dat als je een orthogonale hyperbool spiegelt in een cirkel rond het snijpunt van zijn asymptoten, dan is het resultaat van deze spiegeling een lemniscaat van Bernoulli. Om dus een mechanisme van een orthogonale hyperbool te fabriceren gaan we eerst een stangenmechanisme voor een Bernoulli-lemniscaat ontwerpen en zullen dan gebruikmaken van een inversor om de gespiegelde kromme te verkrijgen. We zullen dan zien dat als we in deze constructie alleen de lengtes van de stangen (en de afstanden van de pivotpunten) veranderen, wij elke kegelsnede kunnen maken. (Hier zijn alle ellipsen, hyperbolen en parabolen bedoeld. De ‘ontaarde kegelsnede, die uit twee lijnen bestaat, laten we hier buiten beschouwing.)

Deze klassieke lemniscaat ontstaat op twee verschillende, met elkaar verwante manieren als koppelkromme. In Figuur 3 schetsen wij deze verwante mechanismen. Er zijn in wezen twee lengtes van stangen in de plaatjes van Figuur 3; de langere stangen zijn twee maal zo lang als de korte



Figuur 3 Twee verwante mechanismen met de lemniscaat als koppelkromme.



Figuur 4 Tekening bij de bewijzen van Stelling 1 en 2.



Figuur 5 ‘Der Eber’ in Eberswalde: Dit *Doppellenkersystem für Drehkrane* werd 1932 aldaar door de Ardelts-Werke uitgevonden.

stangen waarvan wij de lengte als 1 aan- nemen. De horizontale gestippelde lijnen zijn bij beide mechanismes vast. Links wordt de lemniscaat beschreven als meet- kundige plaats van het middelpunt van de koppelstang. In het rechter mechanisme is de bovenste stang twee keer zo lang (lengte 2) als de kortste stang (lengte 1) en de lemniscaat is de meetkundige plaats van het losse eindpunt van deze verleng- de koppelstang. Het mechanisme rechts is dus een kraanconstructie.

Stelling 1. *Bij beide mechanismes is de bijbehorende koppelkromme gelijk aan de klassieke lemniscaat van Bernoulli plus een cirkel.*

Wij bewijzen dat het mechanisme links in Figuur 3 de lemniscaat als koppelkrom- me levert. Dat bij de beweging ook de cirkel ontstaat als de stangenvierzijde een parallelogram vormt is duidelijk. Het me- chanisme rechts is een verwant mechanis- me in de zin van Roberts en Chebychev en we laten het over aan de lezer om dit aan de hand van het Cayley-diagram zelf na te gaan.

Bewijs. Zoals eerder zetten wij ook hier (zie Figuur 4) de lengte van de korte stangen gelijk aan 1. Dan is $d = \frac{1}{2} |F_1F_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nu beschouwen we een stand van de stan- genvierzijde met gekruiste stangen. In de andere standen, waarin de stangen een parallelogram vormen, wordt klaarblijke- lijk een cirkel getekend. Voor $u := |F_1B|$ en

$v := |AF_2|$ en $r_1 := |F_1S|$ en $r_2 := |F_2S|$ is te bewijzen: $r_1 r_2 = \frac{1}{2}$.

Eerst merken wij op dat de driehoeken $\triangle ASF_1$ en $\triangle AF_1B$ gelijkvormig zijn, want ze hebben de hoek bij A gemeen en de verhoudingen $\frac{|F_1A|}{|AB|}$ en $\frac{|AS|}{|F_1A|}$ zijn gelijk. Om een zelfde reden is driehoek BAF_2 gelijk- vormig met driehoek $\triangle BF_2S$ en daarom:

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{r_1}{1} \quad \text{en} \quad \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{r_2}{1}.$$

Uit de gelijkvormigheid van $\triangle ASF_1$ en $\triangle AF_1B$ volgt ook dat $\angle F_1BA$ gelijk is aan $\angle AF_1S$. Omdat de situatie symmetrisch is, geldt ook $\angle F_1BA = \angle F_2F_1B$. Als wij bij beide hoeken, $\angle F_2F_1B$ en $\angle AF_1S$, de hoek $\angle SF_2F_1$ weghalen, vinden wij $\angle AF_1F_2 = \angle SF_1B$. Hieruit volgt dat $\triangle AF_2F_1$ en $\triangle SBF_1$ gelijkvormig zijn en daarmee vinden we de verhouding $u/(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2}}{v}$ oftewel $u \cdot v = 1$. Dit is ook rechtstreeks in te zien door de stelling van Ptolemaeus toe te passen op de koordenvierhoek F_1AF_2B . Samengevat:

$$r_1 r_2 = \frac{u}{\sqrt{2}} \cdot \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} uv = \frac{1}{2}.$$

Dit bewijst dat de klassieke lemniscaat door het onderhavige stangenmechanisme wordt gegenereerd. \square

Zulke mechanismes, maar dan een beetje gedeformeerd, worden daadwerke- lijk ook als kraanconstructies ingezet. Het zijn mechanismes met veralgemeniseerde lemniscaten (ook wel ‘lemniscoïden’) als koppelkrommen, die een bijna horizontale lastweg hebben, *lemniscaatkranen* ge- noemd, zoals te zien in Figuur 5.

Stangenmechanismes voor kegelsneden

Met de constructie van de klassieke Ber- noulli-lemniscaat hebben we dus nu ook een orthogonale hyperbool geconstrueerd. Hiervoor nemen we een stangenmecha- nisme dat het lemniscaatmechanisme combi- neert met een inversor. Het is echter nog aan te tonen dat de orthogonale hyper- bool en Bernoulli-lemniscaat ook werke- lijk elkaars gespiegelden zijn in een cirkel rond het dubbelpunt van de lemniscaat. Een dergelijk mechanisme met veranderde lengtes, zoals dat in Figuur 6 te zien is, levert dan ook een algemeen mechanisme voor alle mogelijke kegelsneden.

Stelling 2. *De lemniscaat van Bernoulli met dubbelpunt O gespiegeld in een wille- keurige cirkel rond O is een orthogonale hyperbool waarvan de asymptoten door O gaan.*

Met deze stelling wordt dan ontwijfel- baar duidelijk dat we de orthogonale hyperbool door een combinatie van het geschetste koppelmechanisme voor de lemniscaat en van een inversor kunnen te- kenen. Allereerst bewijzen we een eenvou- dig maar wel handig lemma.

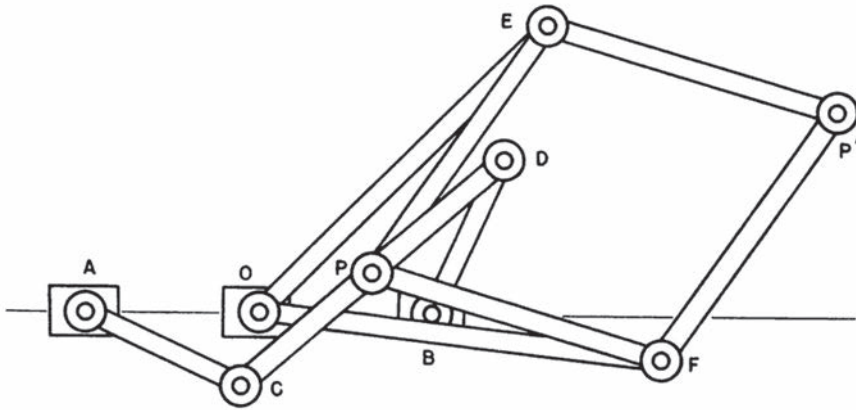
Lemma 1. *Voor een cirkel k met middelpunt O laat de punten P en P' als ook Q en Q' elkaars gespiegelden in k zijn. Dan zijn de driehoeken $\triangle OPQ$ en $\triangle OQ'P'$ ge- gelijkvormig.*

Bewijs. De hoeken $\angle POQ$ en $\angle P'OQ'$ zijn dezelfde. Bovendien geldt: $\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OQ'|}{|OP'|}$ hetgeen het bewijs voltooit. \square

Hiermee bewijzen we dan dat lemniscaat en hyperbool elkaars gespiegelden zijn.

Bewijs van Stelling 2. Wij nemen de no- tatie over uit het bewijs van Stelling 1 zo- als dat ook in Figuur 4 is afgebeeld. Weer zetten we $|F_1F_2| = \sqrt{2}$. Aldaar in dat be- wijis hebben we ook al gevonden dat voor $u := |F_1B|$ en $v := |AF_2|$ geldt: $u = \sqrt{2} \cdot r_1$ en $v = \sqrt{2} \cdot r_2$. Als $r := |SO|$, dan zien we met gelijkvormigheid dat $r = \frac{|u-v|}{2}$, want bijvoorbeeld voor $u \geq v$ is $r + 2 \cdot \frac{v}{2} = \frac{u+v}{2}$ en voor $u < v$ gaat dit analoog.

Bovendien hebben we nu een reflec- tiecirkel k rond O met straal ρ gegeven. De punten F_1, F_2, A, B en S , worden in k gespiegeld met de spiegelbeelden F'_1, F'_2, A', B' en S' . Met $r = |OS|$ en $r_i = |SF_i|$ de-



Figuur 6 Schema voor stangenmechanismes waarmee alle kegelsneden (ellips, parabool en hyperbool) getekend kunnen worden mits $|AC| = |BD|$ en $|AB| = |CD|$ als ook $|AO| = |PD|$ de passende lengte hebben (uit [4]).

finiëren we $r' := |OS'|$ en $r'_i := |S'F'_i|$ voor $i = 1, 2$. Lemma 1 heeft tot gevolg dat voor $i = 1, 2$ de driehoeken $\triangle OSF_i$ en $\triangle OS'F'_i$ gelijkvormig zijn. Daarmee is dan voor $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} r'_i : r_i &= |S'F'_i| : |SF_i| \\ &= |OS'| : |OF_i| = \sqrt{2} \cdot r'. \end{aligned}$$

We laten nu zien: Het beeld van de lemniscaat met brandpunten F_1 en F_2 is de orthogonale hyperbool met brandpunten F'_1 en F'_2 . Uit $r_1 \cdot r_2 = \frac{1}{2}$ zou dus nu moeten volgen dat $|r'_1 - r'_2|$ constant is. Hiervoor berekenen we

$$\begin{aligned} |r'_1 - r'_2| &= \sqrt{2} \cdot r' (|r_1 - r_2|) \\ &= \sqrt{2} \cdot \rho^2 \cdot \frac{|r_1 - r_2|}{r} \\ &= \rho^2 \cdot \frac{|u - v|}{r} = 2\rho^2. \quad \square \end{aligned}$$

Deze meetkundige constructie geeft een idee ervan hoe we een stangenmechanisme voor een algemene kegelsnede kunnen verkrijgen. (Hier volgen we het boek van Robert C. Yates [4, pp.51-54].) Hiervoor gaan we weer uit van een stangenvierzijde waarvan de tegenover elkaar liggende stangen even lang zijn en twee daarvan elkaar kruisen — ook *contra-parallelogram* genoemd. Het idee is net als bij de hyperbool om een door een *contra-parallelogram* geconstrueerde koppelkromme in een cirkel te spiegelen. Dat doen we door een mechanisme zoals in Figuur 6 te vervaardigen. Preciezer gesproken kunnen we dat *contra-parallelogram-mechanisme* als volgt beschrijven: Gegeven een *contra-parallelogram* $ACDB$ met vaste punten A en B en middelpunt M van AB . Verder laten we de langere stang CD de halve lengte $a = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AB|$ hebben en de halve

lengte van de kortere (oftewel niet-langere) stangen AC en BD noemen we $b = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|BD|$. We hebben dus $a \geq b$. Op de stang CD kiezen wij een vaste plek P diens baan de koppelkromme beschrijft. Een dergelijke kromme is dus een koppelkromme met een ontaarde driehoek CDP . Door de keuze van P op de stang CD kunnen we elke waarde van $c := |OM|$ tussen 0 en a bereiken. Dit is de constructie en zij hangt af van de lengtes a , b en c .

Om deze constructie (Figuur 7) te kunnen beschrijven kiezen we op een handige manier de oorsprong O van ons coördinatensysteem: O is het eenduidig bepaalde punt op het lijnstuk tussen A en B zo dat $|AO| : |BO| = |DP| : |CP|$ en wij noemen $r := |OP|$ en $\theta := \angle BOP$.

Stelling 3. *In het boven beschreven mechanisme beschrijft P een kromme die in de poolcoördinaten (r, θ) geven wordt door de vergelijking*

$$\left(\frac{r}{2} - c \cos \theta\right)^2 = b^2 - a^2 \sin^2 \theta.$$

Bewijs. Allereerst tonen we aan dat tijdens de gehele beweging de drie lijnstukken AD en OP als ook CB evenwijdig blijven, want het trapezium $ACBD$ is spiegelsymmetrisch waarbij P en O volgens de definitie van O elkaars spiegelbeelden moeten zijn. Analoog met onze eerdere benaming zetten we $u := |AD|$ en $v := |CB|$. De vierhoek $ACBD$ is een koordenvierhoek en met de stelling van Ptolemaeus berekenen we het product van u en v door $u \cdot v + 2b \cdot 2b = 2a \cdot 2a \Leftrightarrow u \cdot v = 4(a^2 - b^2)$.

Laat T het snijpunt van AB en CD zijn en noem S het midden van AD en R het midden van CB . Verder noemen we $z := |MT|$, waarbij M het middelpunt is van AB . Dan geldt

$$u = 2|AS| = 2|AT| \cos \theta$$

en

$$v = 2|BR| = 2|BT| \cos \theta.$$

En bovendien geldt $|AT| = (a + z)$ en $|BT| = (a - z)$. Dus hebben we:

$$\begin{aligned} u &= 2|AT| \cos \theta = 2(a + z) \cos \theta, \\ v &= 2|BT| \cos \theta = 2(a - z) \cos \theta. \end{aligned}$$

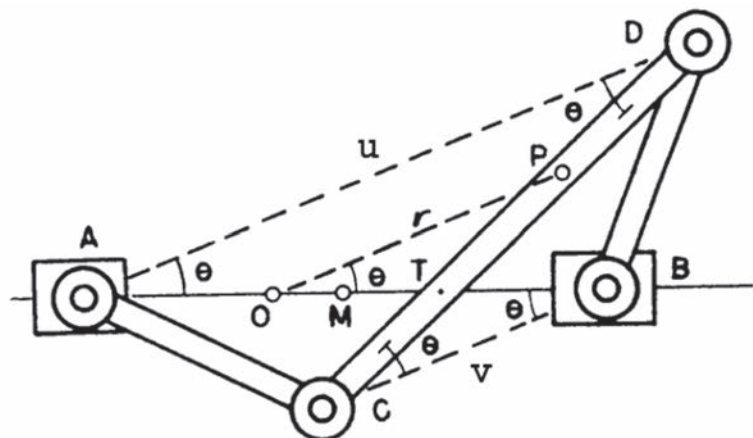
Als wij deze uitdrukkingen u en v nu vermenigvuldigen, verkrijgen we nog een andere uitdrukking voor het product van u en v die we aan de eerder gevonden uitdrukking $u \cdot v = 4(a^2 - b^2)$ gelijk zetten:

$$u \cdot v = 4(a^2 - z^2) \cos^2 \theta = 4(a^2 - b^2).$$

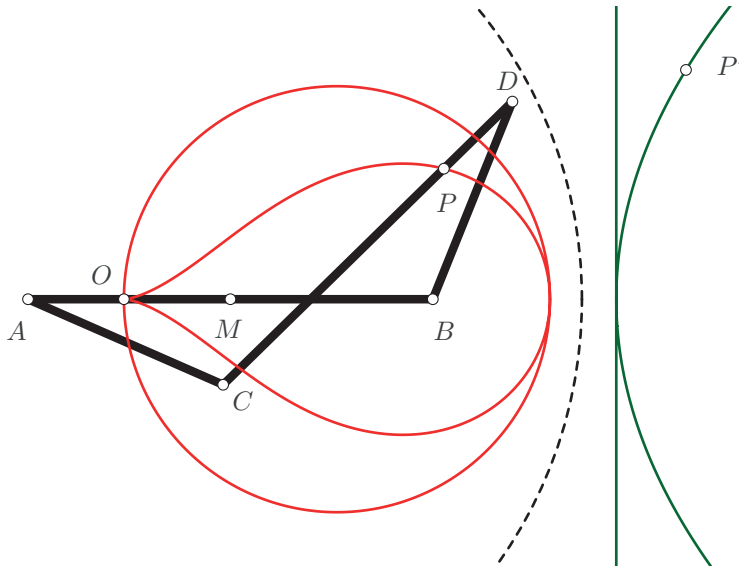
Dit kunnen we ook anders schrijven als volgt:

$$z^2 \cos^2 \theta = b^2 - (1 - \cos^2 \theta) a^2.$$

Er geldt $r = 2(c + z) \cos \theta$ oftewel $\frac{r}{2} - c \cos \theta = z \cos \theta$ en dat vullen we nu in deze formule in om dan de volgende vergelijking van



Figuur 7 Een koppelmechanisme op een algemeen contra-parallelogram.



Figuur 8 Een kromme met een parabool als spiegelbeeld in de cirkel.

de kromme, die door P wordt getekend, in poolcoördinaten (denk om $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$) te verkrijgen:

$$\left(\frac{r}{2} - c \cos\theta\right)^2 = b^2 - a^2 \sin^2\theta. \quad \square$$

Nu nemen we een inversor $OEFP'P'$ zoals in Figuur 6 ter hand, zodat bij de cirkelinversie met centrum O het punt P op P' terecht komt en voor een zeker positief getal ρ oftewel $\chi := \frac{1}{2}\rho^2$ geldt: $r \cdot r' = \rho^2 = 2\chi$ waar $r' := |OP'|$. De vergelijking in poolcoördinaten (r', θ) voor P' is dan

$$\begin{aligned} (\chi cr' \cos\theta)^2 \\ = b^2 r'^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) - a^2 r'^2 \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Uitgeschreven in cartesische coördinaten ($x = r' \cos\theta$ en $y = r' \sin\theta$) is dit

$$(x - cx)^2 = b^2(x^2 + y^2) - a^2 y^2.$$

Nu sorteren we de termen anders en vinden de vergelijking van een kegelsnede:

$$(a^2 - b^2)y^2 - (b^2 - c^2)x^2 - 2c\chi x + \chi^2 = 0.$$

Het is een ellips bij $c > b$, een parabool bij $c = b$ en een hyperbool bij $c < b$. Het is niet moeilijk na te gaan dat door een geschikte keuze van a , b en c elke kegelsnede door deze formule kan worden beschreven. Wij hebben dus de volgende stelling bewezen:

Stelling 4. Een willekeurige kegelsnede kan worden verkregen door de spiegeling in een cirkel van een door een contra-parallellogram getekende koppelkromme.

In Figuur 8 is een dergelijk mechanisme voor een parabool (plus een lijn) afge-

beeld, waarbij de inversor door de gestippelde reflectiecirkel is gerepresenteerd. Er zijn ook nog andere eenvoudige stangenmechanismen voor kegelsneden. Een nogal ingewikkeld maar systematisch stangenmechanisme voor een parabool leren we nu in het vervolg kennen.

Elke algebraïsche kromme tekenen

Nu vragen we ons af welke krommen überhaupt door stangenmechanismen te tekenen zijn. Het was al helemaal niet makkelijk om een lijn te tekenen. Bij kegelsneden werd het nog ingewikkelder. Wat dan te denken over hogere krommen?

En toch zullen we in relatief kort bestek kunnen laten zien, dat je elk deel van een willekeurige reële algebraïsche kromme door een stangenmechanisme kunt tekenen. Deze stelling staat bekend als *Universaliteitsstelling van Kempe* en zij werd in 1876 door Sir Alfred Bray Kempe (1849–1922) in een korte notitie bewezen [2]. Tot de dag van vandaag is dit een volledig geldig bewijs en een stuk schitterende wiskunde. Wij zullen het bewijs van Kempe hier algemeen voorstellen en – om het goed te begrijpen – zijn constructie telkens meteen aan het voorbeeld van een parabool in detail uit gaan stippen.

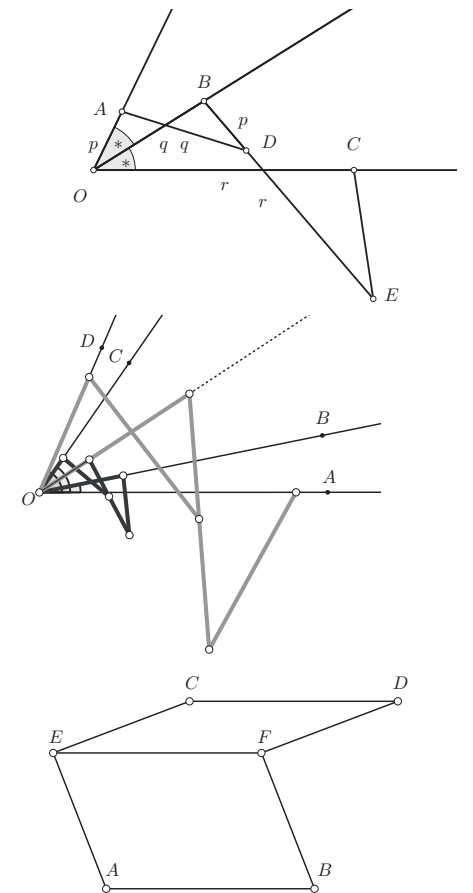
Verdubbeling en optelling van hoeken

Een van de diepe inzichten van Kempe met betrekking tot stangenmechanismen betreft het verdubbelen van hoeken door *contra-parallellogrammen*. Als je, zoals in Figuur 9 (boven) twee voldoende lange stangen a en b in het vlak hebt, die in een

punt O samen een hoek φ vormen en een derde stang c in O aan de kant van b , die je zo wil plaatsen dat ook de hoek tussen b en c van grootte φ zal zijn, dan kies je lengtes p , q en r met de eigenschap dat $p : q$ zich verhoudt als $q : r$ en je kiest verder punten A , B en C op a , b en c zodat $|OA| = p$, $|OB| = q$ en $|OC| = r$.

Aan A maak je een stang s_A van lengte q , aan B een stang s_B van lengte r en aan C een stang s_C van lengte p vast. Het uiteinde van s_A zet je op een punt D op s_B zodat $|AD| = q$ is en het uiteinde van s_B verbind je ten slotte met het uiteinde van s_C in een punt E . De contra-parallellogrammen $OBDA$ en $OCEB$ zijn gelijkvormig omdat alle corresponderende driehoeken dezelfde verhoudingen van de zijden hebben. Hieruit volgt dat $\angle BOA = \angle COB$.

Een dergelijke dubbele contra-parallellogram kun je nu gebruiken om verschillende dingen te bereiken. Je kunt daarmee hoeken *halveren* en *verdubbelen*. Ingezet voor dit doeleinde noemt Kempe het gereedschap *The Reverser*. Als in de tekening hier rechts twee van de stralen OA , OB of OC gegeven zijn, dan kun je zo ook de derde bepalen. Dat wil zeggen dat we hiermee



Figuur 9 *The Reverser*, *The Additor* en *The Translator*.

hoeken kunnen *verdubbelen* ofwel *halveren*. Dit komt goed van pas als we hoeken bij elkaar willen optellen of van elkaar willen aftrekken. Als in het mechanisme in Figuur 9 (midden) bijvoorbeeld de hoeken $\angle AOB$ en $\angle AOC$ gegeven zijn, dan is

$$\angle AOD = \angle AOB + \angle AOC.$$

Als aan de andere kant de hoeken $\angle AOD$ en $\angle AOC$ gegeven zijn, dan is

$$\angle AOB = \angle AOD - \angle AOC.$$

Het op een dergelijke manier gehanteerde gereedschap heet bij Kempe *The Additor*. Als twee hoeken θ en ϕ door twee stangen ten opzichte van een derde referentiestang gegeven zijn, dan kunnen we voor natuurlijke getallen m en n een stang construeren die ten opzichte van deze derde stang een hoek heeft van $m\theta + n\phi$. En natuurlijk kunnen we er ook nog elke vaste hoek α , dat wil zeggen een hoek die tijdens de beweging niet verandert, bij optellen, zodat we ten slotte alle hoeken $m\theta + n\phi + \alpha$ kunnen maken.

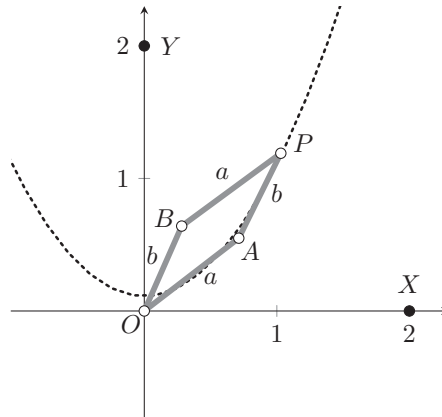
De laatste voorbereiding voor het bewijs bestaat erin dat we beseffen dat je bij elke stang een evenwijdige stang ergens in het vlak kunt construeren. Dat doen we, zoals in Figuur 9 (onder) afgebeeld, door twee parallelogrammen te gebruiken. Dan is AB evenwijdig met CD . Kempe noemt dit mechanisme *The Translator*.

Het bewijs van de stelling van Kempe

Een algemene reële algebraïsche kromme is gegeven als de verzameling van alle nulpunten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ van een reële veelterm $\Phi(x, y)$, dat wil zeggen alle (x, y) , waarvoor geldt: $\Phi(x, y) = 0$. De parabool, waarvoor we hier exemplarisch een stangenmechanisme bouwen is gegeven als de nulpuntsverzameling in \mathbb{R}^2 van de vergelijking (in onze concrete constructie is $c = 0,2$)

$$\Phi(x, y) = x^2 - y + c = 0.$$

Anders gezegd, gaan we een concreet stangenmechanisme maken voor de grafiek van de functie $f(x) = x^2 + c$. Het basismechanisme (zie Figuur 10) voor ons algemeen stangenmechanisme is een parallelogram $OAPB$, waarbij het hoekpunt O vast aan de oorsprong van het coördinatenstelsel is verbonden. Het daar tegenoverliggende punt P (staat weer voor ‘pen’) zal dan onze parabool gaan tekenen. Met dit mechanisme kunnen we alle punten in een zelfgekozen deel van het vlak bereiken. De zijden van het parallelogram zullen de lengtes



Figuur 10 Het basismechanisme.

a en b hebben, die we zo kiezen, dat met name het deel van de kromme, waarin wij geïnteresseerd zijn, bereikbaar is. (In ons concrete voorbeeld is $a = 0,9$ en $b = 0,7$.)

Het idee is nu dat we aan dit basismechanisme een aantal verdere mechanismes vast gaan hangen, tot dat er een eindpunt van een stang ontstaat, dat alleen nog maar op een verticale lijn op en neer kan lopen mits P op de kromme ligt. Daar zetten we dan een mechanisme tegenaan, die een lijn kan tekenen zoals bijvoorbeeld de rechtgeleiding van Peaucellier–Lipkin.

Allereerst geven we de hoeken van het basismechanisme een naam:

$$\theta := \angle XO A \quad \text{en} \quad \phi := \angle XO B.$$

Het punt $P = (x, y)$ heeft dan de coördinaten

$$x = a \cos \theta + b \cos \phi$$

en

$$y = a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right),$$

waarbij voor een hoek φ de uitdrukking $\cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$ hetzelfde is als $\sin \varphi$. Omdat wij bij alle punten uiteindelijk naar de x -coördinaat zullen kijken, gaan we hier alleen maar met de cosinusfunctie aan de slag. Voor de verdere operaties is daarom dan ook een regel van belang, die laat zien hoe het product van de cosinuswaarden van twee hoeken als som van cosinuswaarden kan worden geschreven. Het is de regel (ook bekend als één van de *prosthaphaeresis* formules):

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

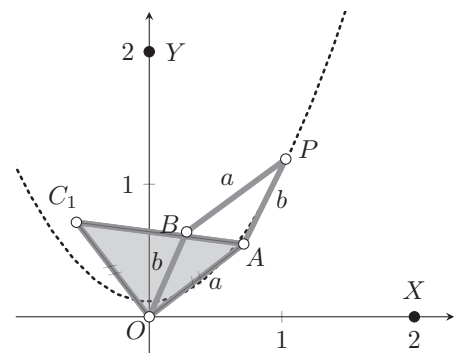
en in het bijzonder $2 \cos^2 \alpha = \cos(2\alpha) + 1$. Deze regel is makkelijk in te zien als gevolg van de optellingstheorema voor $\cos(\alpha - \beta)$ en $\cos(\alpha + \beta)$.

Als we met punt P de kromme doorlopen, dan moet voor coördinaten (x, y) van een punt P op de kromme gelden dat $\Phi(x, y) = 0$. Deze vergelijking geeft ons dus een eis, die de vrijheid waarin P in het basismechanisme verkeert, beperkt: $\Phi(x, y)$ moet gelijk aan nul zijn.

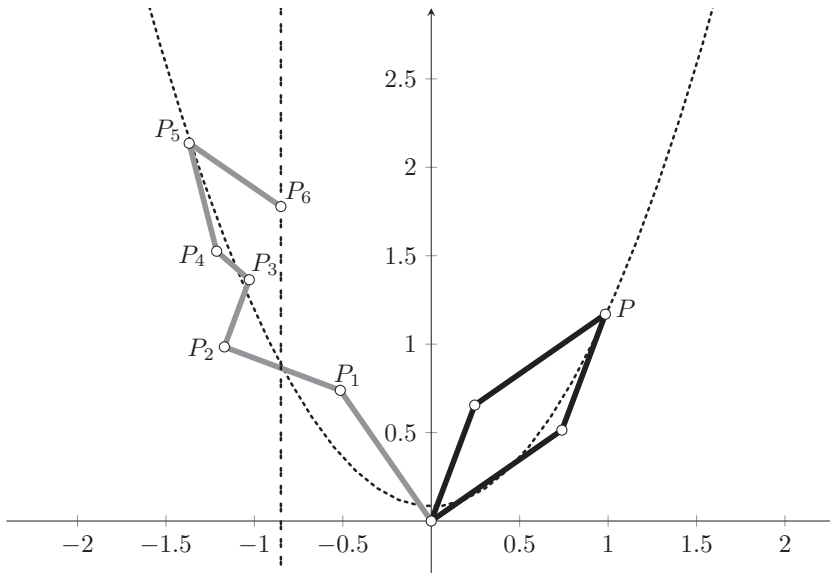
Omdat de algemene constructie anders een beetje abstract zou kunnen lijken, is het op dit moment een goed idee om eerst concreet naar ons voorbeeld te kijken en te laten zien hoe daar het stangenmechanisme ontstaat. Hier wordt de vergelijking $\Phi(x, y) = x^2 - y + c = 0$ als volgt uitgewerkt met onze formule voor producten van cosinustermen:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= (a \cos \theta + b \cos \phi)^2 \\ &\quad - a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + c \\ &= a^2 \cos^2 \theta + b^2 \cos^2 \phi \\ &\quad + 2ab \cos \theta \cos \phi - a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + c \\ &= \frac{a^2}{2}(\cos(2\theta) + 1) + \frac{b^2}{2}(\cos(2\phi) + 1) \\ &\quad + ab(\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)) \\ &\quad - a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + c \\ &= -a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \cos(2\theta) + \frac{b^2}{2} \cos(2\phi) \\ &\quad + ab \cos(\theta + \phi) + ab \cos(\theta - \phi) \\ &\quad + \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + c\right) = 0. \end{aligned}$$

Bij elk van deze termen kunnen we, uitgaande van ons basismechanisme, nu een mechanisme bouwen, waarvan het eindpunt deze desbetreffende term als x -coördinaat heeft. Bijvoorbeeld zien we in het mechanisme van Figuur 11 dat het punt C_1 bij elke stand van het basismechanisme de x -coördinaat $-a \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ zal hebben. Op



Figuur 11 Een mechanisme voor de term $-a \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$.



Figuur 12 De keten van stangen $OP_1P_2P_3P_4P_5P_6$.

een analoge wijze construeren we een punt C_2 dat bij elke stand van het basismechanisme de x -coördinaat $-b \cos(\phi - \frac{\pi}{2})$ heeft.

Met behulp van *The Reversor*, *The Multiplier*, *The Additor* en *The Translator* is het mogelijk om stangenmechanismes met punten C_1, \dots, C_6 te bouwen, zo dat de x -coördinaat van punt C_3 de term $\frac{a^2}{2} \cos(2\theta)$ is en de x -coördinaat van punt C_4 bij $\frac{b^2}{2} \cos(2\phi)$ zal zijn. En verder kunnen we nog mechanismes met punten C_5 respectievelijk C_6 met de x -coördinaat $ab \cos(\theta + \phi)$ respectievelijk $ab \cos(\theta - \phi)$ vinden. Vatten we dit samen, dan hebben we –uitgaande van ons basismechanisme – punten C_1, \dots, C_6 geconstrueerd met de volgende eigenschappen:

- C_1 heeft x -coördinaat $-a \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$,
- C_2 heeft x -coördinaat $-b \cos(\phi - \frac{\pi}{2})$,
- C_3 heeft x -coördinaat $\frac{a^2}{2} \cos(2\theta)$,
- C_4 heeft x -coördinaat $\frac{b^2}{2} \cos(2\phi)$,
- C_5 heeft x -coördinaat $ab \cos(\theta + \phi)$,
- C_6 heeft x -coördinaat $ab \cos(\theta - \phi)$.

Deze x -coördinaten van C_1 tot en met C_6 opgeteld zijn dan $-\left(\frac{a^2+b^2}{2} + c\right)$.

Nu komt *The Translator* in het spel. Hiermee kunnen we beweeglijke steigers gaan bouwen die ervoor zorgen dat we ons stangenmechanisme op kunnen bouwen zodat punten P_1, \dots, P_6 ontstaan met de eigenschap dat $P_1 = C_1$ en verder dat voor $i = 2, \dots, 6$ geldt $P_{i-1}P_i$ is bij elke stand van het basismechanisme evenwijdig en even lang als OC_i . In Figuur 12 is de keten van

lijnstukken $OP_1P_2P_3P_4P_5P_6$ te zien. Hiervoor construeren we met behulp van *The Translator* mechanismes die stapsgewijs voor $i = 2, 3, 4, 5, 6$ de stang OC_i evenwijdig verschuiven zodat O op P_{i-1} terecht komt. Zodoende vinden we dus het punt P_6 wiens x -coördinaat bij elke stand van het basismechanisme, waarbij het punt $P = (x, y)$ aan de vergelijking $\Phi(x, y) = 0$ voldoet, gelijk is aan

$$-\left(\frac{a^2+b^2}{2} + c\right).$$

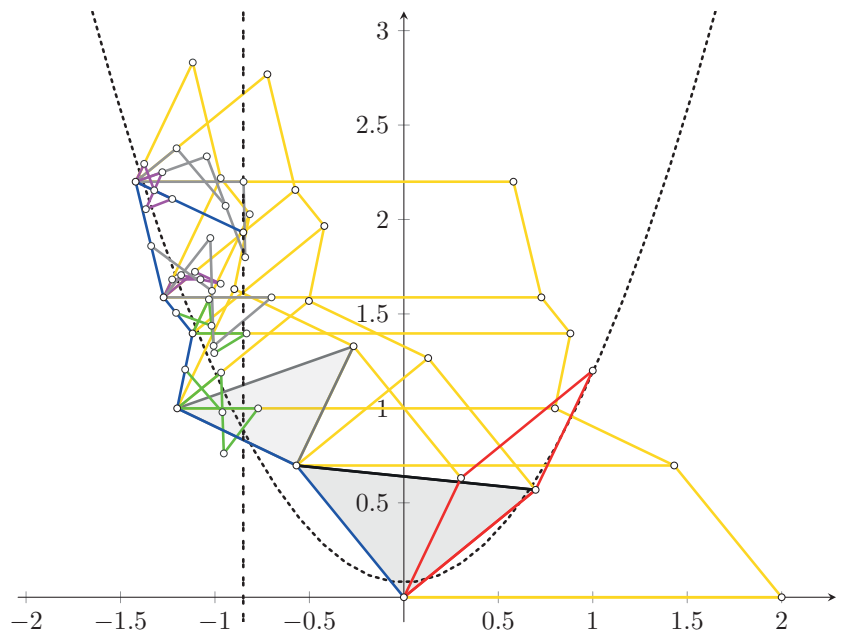
Als nu omgekeerd het hele mechanisme door de beweging van P zo wordt ingesteld, dat P_6 op de lijn $x = -\left(\frac{a^2+b^2}{2} + c\right)$

komt te liggen, dan geldt voor de coördinaten (x, y) van P dat zij aan de vergelijking $\Phi(x, y) = 0$ moeten voldoen, want we hebben gezien: $\Phi(x, y) = 0$ is equivalent met de eis dat de x -coördinaat van P_6 gelijk is aan $-\left(\frac{a^2+b^2}{2} + c\right)$. Hiermee is duidelijk dat we de parabool door een stangenmechanisme kunnen maken.

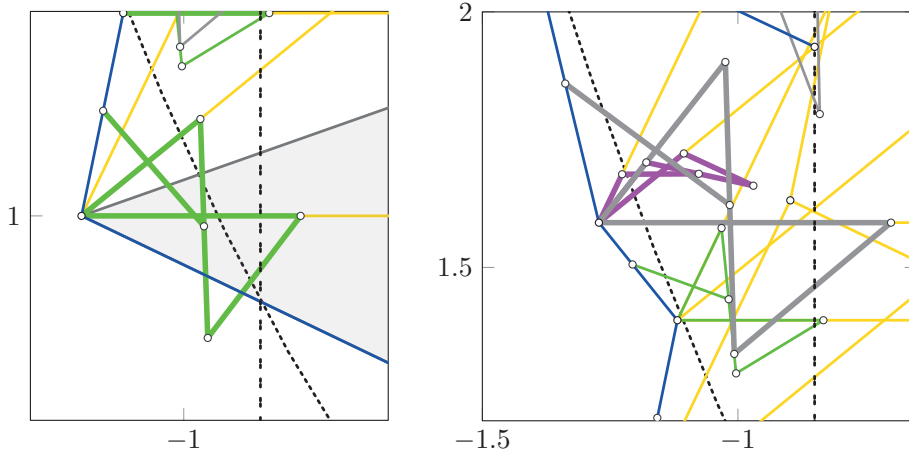
Gaan we hier serieus werk van maken dan lijkt dit op het eerste gezicht een zootje maar de manier van werken is echter duidelijk. In Figuur 13 is het basismechanisme en daaraan vastgemaakt het hele mechanisme met de vele translatoren (in geel) in de vorm van parallellogrammen als een soort steiger te zien.

Aan het einde van de reeks blauwe stangen vinden we het punt P_6 dat wordt gedwongen op een lijn te lopen. Hier moet dan nog een mechanisme tegenaan worden gezet, waarbij P_6 op een verticale lijn wordt gedwongen.

Zover het idee. Concreet zien we dat er drie verschillende soorten mechanismes zijn. Allereerst zijn er twee mechanismes met gelijkbenige rechthoekige driehoeken om de termen $-a \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ en $-b \cos(\phi - \frac{\pi}{2})$ te maken. Verder hebben we twee keer een mechanisme voor de verdubbeling van hoeken (zie Figuur 14), verantwoordelijk voor de termen $\frac{a^2}{2} \cos(2\theta)$ en $\frac{b^2}{2} \cos(2\phi)$. En ten slotte nog twee mechanismes voor het optellen, respectievelijk aftrekken van hoeken (zie eveneens Figuur 14). Hierdoor worden $ab \cos(\theta + \phi)$ en $ab \cos(\theta - \phi)$ gemaakt.



Figuur 13 Het gehele mechanisme voor de parabool.



Figuur 14 Links *The Multiplier*: mechanisme voor de verdubbeling van een hoek en rechts *The Reverser* en *The Additor*: mechanisme voor het optellen van hoeken.

Nu weer terug naar het algemene geval. De vergelijking $\Phi(x, y) = 0$ wordt met de bovengenoemde prosthaphaeresis-regel uitgewerkt en we vinden dat een som met maar eindig veel van nul verschillende cosinustermen en met $\alpha_{m,n} \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, van het volgende soort een constant getal c moet zijn

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} A_{m,n} \cos(m\theta + n\phi + \alpha_{m,n}) = c.$$

Bij elk van deze termen $A_{m,n} \cos(m\theta + n\phi + \alpha_{m,n})$ zullen we, uitgaande van ons basismechanisme, nu met behulp van ons *The Reversor*, *The Multiplier*, *The Additor* een mechanisme bouwen, waarvan het eindpunt $C_{m,n}$ de term $A_{m,n} \cos(m\theta + n\phi + \alpha_{m,n})$ als x -coördinaat heeft. Deze mechanismes en hun eindpunten nummeren we nu in een rij van N punten C_1, C_2, \dots, C_N . De som van al de x -coördinaten van al deze punten is dan constant (niet noodzakelijk c omdat er bij de uitwerking nog verdere constanten kunnen ontstaan zoals bij de parabool).

The Translator zorgt er nu voor dat bij punt C_1 , dat we nu ook P_1 noemen, de horizontale richting en de hoeken θ en ϕ ter

beschikking staan. Hiermee wordt dan met behulp van het mechanisme van C_2 een punt P_2 geconstrueerd zodat P_1P_2 evenwijdig aan en even lang is als OC_2 . Weer gebruiken wij *The Translator* om bij punt P_2 de horizontale richting en de hoeken θ en ϕ voor het verdere mechanisme ter beschikking te hebben. Met het mechanisme voor C_3 construeren wij een punt P_3 zodat P_2P_3 evenwijdig aan en even lang is als OC_3 . Zo gaan we door tot dat we een punt P_N hebben geconstrueerd.

Op deze manier bouwen we ons stangenmechanisme op zodat punten P_1, \dots, P_N ontstaan met de eigenschap dat $P_1 = C_1$ en verder dat voor $i = 2, \dots, N$ geldt: $P_{i-1}P_i$ is bij elke stand van het basismechanisme evenwijdig en even lang als OC_i . Daarmee vinden we dus het punt P_N wiens x -coördinaat bij elke stand van het basismechanisme gelijk aan een bepaalde constante is dan en slechts dan als P op de kromme ligt. Alle hulpmechanismes zoals de (contra-)parallellogrammen of de lijnvoering door bijvoorbeeld een cirkelinvorsor kunnen willekeurig worden uitvergroot, zodat je in elke stap een zo groot bereik van het des-

betreffende mechanisme ter beschikking hebt als dat telkens nodig is.

Hiermee is duidelijk, dat we de gegeven kromme door een stangenmechanisme in het door het basismechanisme gegeven gebied kunnen tekenen en de geldigheid van deze uitspraak is volledig aangetoond.

Andersom is elke door stangenmechanismes geconstrueerde kromme ook deel van een algebraïsche kromme, wat we hier niet aan zullen tonen (zie [5, p. 30]). Daarmee geldt dat de door stangenmechanismes tekenbare krommen precies alle reëel algebraïsche krommen zijn.

Stelling 5 (Universaliteitsstelling van Sir Alfred Bray Kempe). *Bij elk begrensd deel van een willekeurige reële algebraïsche kromme bestaat een stangenmechanisme, waarmee dat deel van de kromme te tekenen is.*

Tot slot

Stangenmeetkunde is een fantastische omgeving voor elementaire meetkunde. Tegenwoordig is de studie van stangenmechanismes veel verder gevorderd dan alles wat we hier hebben laten zien. Zij worden met behulp van algemene kinematische theorie (bijvoorbeeld door de kinematische afbeelding van Eduard Study), met gevorderde algebra (quaternionen, Clifford-algebra's et cetera) en met reële en complexe algebraïsche meetkunde, met moduli-ruimtes en veel ander indrukwekkend gereedschap uit de moderne wiskunde bestudeerd. Een bekend klassiek boek over gevorderde kinematica is bijvoorbeeld *Theoretical Kinematics* van Oene Bottema en Bernard Roth [1]. Naast abstract werkend wiskundige was Oene Bottema een fervent pleitbezorger voor elementaire meetkunde, zie [3]. Hij was bovendien een van de eerste sprekers in de vakantiecursus voor wiskunde in het jaar 1946. \dots

Referenties

- O. Bottema en B. Roth, *Theoretical Kinematics*, Dover Publications, 1991.
- A.B. Kempe, On a general method of describing plane curves of the n th degree by linkwork, *Proceedings of The London Mathematical Society* VII(102) (1875), 213–216.
- T. Koetsier, Oene Bottema (1901–1992), in M. Ceccarelli, ed., *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science*, History of Mechanism and Machine Science, Vol. 1, Springer, 2007, pp. 61–68.
- Robert C. Yates, *Curves and Their Properties*, Classics in Mathematics Education A Series, Volume 4, National Council for Teachers of Mathematics, 1974.
- Walter Wunderlich, *Ebene Kinematik*, BI-Hochschultaschenbücher, 1970.