Piet Groeneboom
Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl

Column Piet grijpt zijn kans

Monty Hall, Marilyn vos Savant en Fermat

Piet Groeneboom schrijft op regelmatige basis in dit blad een column, ditmaal over twee oude veelbesproken problemen.

Monty Hall en Marilyn vos Savant

Het Delftse studieboek [2] voor statistiek start met een aantal voorbeelden. Voorbeeld 1.3 heet 'Cars and goats: the Monty Hall dilemma'. We volgen de expositie in [2], die ook grotendeels in [10] te vinden is.

> On Sunday September 9, 1990, the following question appeared in the 'Ask Marilyn' column in *Parade*, a Sunday supplement to many newspapers across the United States.
>
> "Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors: Behind one door is a car; behind the others, goats. You pick a door, say No. 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say No. 3, which has a goat. He then says to you, 'Do you want to pick door No. 2?' Is it to your advantage to switch your choice?"
>
> Craig F. Whittaker, Columbia, MD

Een probleem in de elementaire discrete kansrekening van uiterst triviale aard, zou je denken, maar misschien niet als je leest over alle opwinding die dit heeft veroorzaakt. Het probleem heet het 'Monty Hall-probleem', omdat het onderdeel was van de show *Let's Make a Deal* van de Canadese radio- en tv-presentator Monty Hall. Zowel Monty Hall als de Amerikaanse statisticus Steve Selvin hadden dit probleem al correct opgelost in 1975 (zie [6]), maar grote bekendheid kreeg het pas na de column uit 1990 van Marilyn vos Savant (IQ 228, zie hieronder), die aanraadt te switchen, waar volgens [10] $10\,000$ brieven op kwamen.

In [9] vinden we de volgende informatie over de opleiding van Monty Hall (en ook de foto op de volgende pagina):

> "Hall graduated with a Bachelor of Science degree from the University of Manitoba, where he majored in chemistry and zoology. He had hoped to go on to medical school, but was not admitted due to secret quotas restricting the number of Jewish students admitted."

In het kader van 'Piet legt het nog één keer uit' bespreek ik nu de oplossing van het Monty Hall-probleem op de manier van *How to Solve It* [5] van Polya, in samenspraak met een klas van kinderen die misschien niet allemaal IQ 228 hebben.

> "Jullie kiezen voor deur 1 in de aanvankelijke keuze. Wat is de kans dat de auto achter de door jullie gekozen deur staat?"
> "Ehhh ..., $\frac{1}{3}$."
> "De quizmaster gaat nu op zijn kop staan. Verandert daardoor jullie kans van $\frac{1}{3}$?"
> "Ehhh ..., nee."
> "In plaats van op zijn kop te gaan staan, opent hij nu een deur waar een geit achter staat (niet jullie deur). Verandert daardoor jullie oorspronkelijke kans van $\frac{1}{3}$ dat de auto achter deur 1 staat?"
> "Ehhh ..., nee."
> "Dus wat is de kans dat de auto achter die andere niet-geopende deur staat?"
> "..."
> "Hint: de som van de kansen is 1."
> "$\frac{2}{3}$?"
> "Goedzo. Is het dus verstandig te switchen?"
> "Ehhh ..., ja."

We kunnen ook zeggen dat we aanvankelijk met deur 1 te doen hebben, met een kans van $\frac{1}{3}$ dat daar die auto achter staat, en een complement dat kans $\frac{2}{3}$ heeft dat daar een auto achter één van de deuren staat. Door de actie van de quizmaster is het complement tot één element teruggebracht dat dus de hele vracht van de $\frac{2}{3}$ kans draagt.

Helaas zie je in de oplossing van dit probleem echter meestal een langdradige opsomming van gevallen. Ik heb nooit zo warm kunnen lopen voor dit probleem ("Jongens, hou nou eens op over Monty Hall!"), maar dat kunnen we niet zeggen van mijn collega's Casper Albers, Richard Gill, Mark van der Laan en Willem Schaafsma. Richard Gill heeft zelfs de discussie in de Wikipedia zo hoog op laten lopen dat hij geschorst is (door de moderatoren). Ik heb deze discussie niet gevolgd, maar Richard heeft mij dit verteld.

Richard Gill zegt in [3]: "The best reason to switch is to be found in von Neumann's minimax theorem from game theory, rather than in Bayes' theorem." Dat de zogenaamde stelling van Bayes (beter 'formule van Bayes', want 'stelling' is een beetje groot woord) er ook weer bij kan worden gesleept had ik nog niet eens verteld, maar ik ga daar nu verder niet op in. Er zijn veel manieren om het probleem ingewikkelder te maken.

Bij een kanotocht van een week in Värmland (Zweden) met een groep academici (en mijn zoon Tim die toen nog op school zat), waarbij we onze tenten opzetten op onbewoonde eilandjes, vertelde de natuurkundige in het gezelschap het Monty Hall-probleem als zijn bijdrage tot de 'bonte avond' aan het eind. Het 'leeft' dus wel.


Monty Hall in 1976

Marilyn vos Savant, die genoemd wordt in het Delftse studieboek voor statistiek, staat in het *Guinness Book of Records* vanwege haar score IQ 228 op de Stanford-Binet-intelligentietest. Zij is lid van de high-IQ societies Mensa International en de Mega Society. Tot haar voordeel moet wel gezegd worden dat ze IQ-tests 'useless' vindt ("Savant sees IQ tests as measurements of a variety of mental abilities and thinks intelligence entails so many factors that 'attempts to measure it are useless'", zie [8]).

Die $10\,000$ brievenschrijvers bij de column van Marilyn, zouden die echt bestaan? Er waren veel PhD's in de wiskunde bij (ik neem aan dat ze dan in ieder geval een gebrekkige scholing in de kansrekening hebben gehad). Mark Haddon citeert wat brievenschrijvers in zijn boekje [4], bijvoorbeeld:

> Robert Sachs, PhD, George Mason University: "I'm very concerned with the general public's lack of mathematical skills. Please help by confessing your error."

En:

> Scott Smith, PhD, University of Florida: "There is enough mathematical illiteracy in this country and we don't need the world's highest IQ propagating more. Shame!"

En nog vier soortgelijke reacties. Erdős zou pas geloofd hebben dat het beter is om te switchen toen hij simulaties had gezien (zie [10]). Dat klinkt toch ook enigszins bizar. Als het waar is, maakt het de bezitters van een laag Erdős-nummer (waaronder ikzelf) toch iets minder trots hierop. Aan de andere kant moeten we misschien wat toleranter zijn voor menselijke zwakheden.

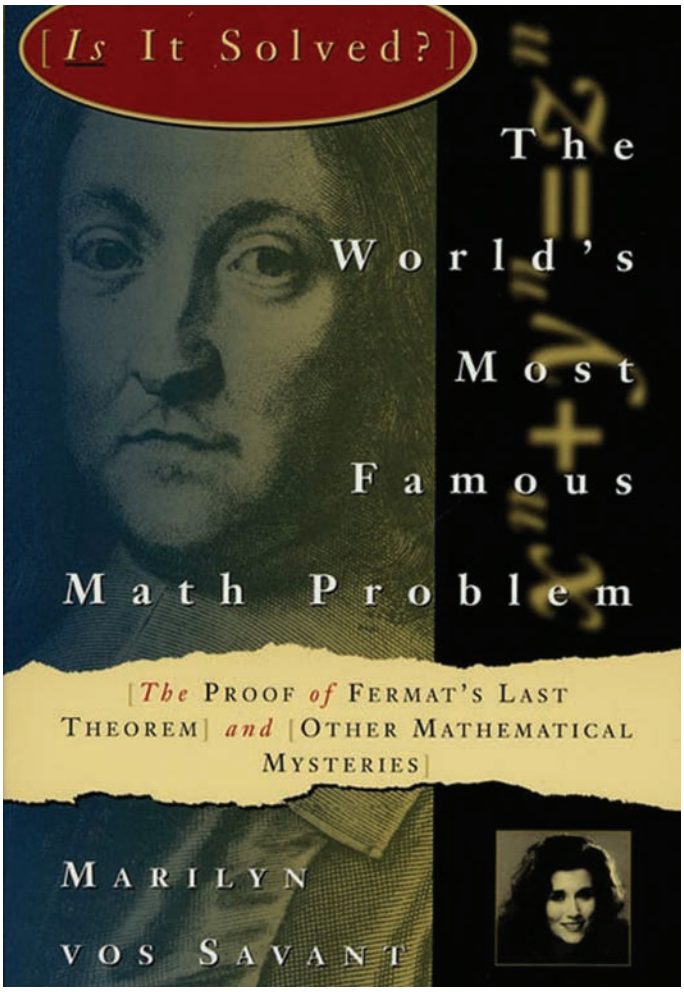
Als er 1000 deuren waren, 999 geiten en 1 auto, en de quizmaster had 998 deuren met een geit erachter opengemaakt, zodat de kans dat de auto achter die ene niet geopende deur van het complement staat inmiddels is opgelopen tot $\frac{999}{1000}$, zou Erdős dan nog steeds hebben gezegd: "Nee hoor, de kans is $\frac{1}{2}$"? Dat is moeilijk te geloven.

Marilyn vos Savant en Fermat

Marilyn vos Savant schreef het boek *The World's Most Famous Math Problem* [7]. Hiermee wordt de 'laatste stelling van Fermat' aangeduid. Ik heb het speciaal voor het schrijven van deze column aangeschaft. Op de buitenkant staat '*Is* It Solved?'.

In de eerste plaats: was er niet ook zoiets als de Riemann-hypothese? Een beroemde uitspraak van Hilbert is: "Als ik wakker zou worden na 1000 jaar geslapen te hebben, zou mijn eerste vraag zijn: is de Riemann-hypothese bewezen?" Hij rept hier niet over Fermat. Ook sprak ik in de vorige eeuw nog als student met een hoogleraar in de topologie die tegen mij zei: "De laatste stelling van Fermat, dat wordt nog wel opgelost deze eeuw, de Riemann-hypothese niet, dat is te moeilijk voor de algebra" (nadat ik gezegd had dat er toch voortgang via de algebra was met de Riemann-hypothese over eindige lichamen). Hij kreeg gelijk. Maar niet dus van Marilyn vos Savant, die om verschillende redenen het bewijs van Andrew Wiles in twijfel trekt.

Nu heeft Marilyn vos Savant geen wiskunde gestudeerd, wel twee jaar filosofie, maar heeft die studie afgebroken om bij haar vader 'in de zaak' te gaan werken, begrijp ik uit [8]. Ook wordt in [8] gezegd: "Reviewers questioned her criticism of Wiles' proof; asking whether it was based on a correct understanding of mathematical induction, proof by contradiction, and imaginary numbers."



Inderdaad, wat te denken van de volgende passage over imaginaire getallen op pagina 60 van haar boek in de sectie "Why Wiles' proof isn't as satisfying as it could be":

> "But how can one prove anything by contradiction? Imaginary numbers are one example. The square root of $+1$ is a real number because $+1\times+1=+1$; however, the square root of -1 is imaginary because -1 times -1 would also be $+1$, instead of -1. This appears to be a contradiction."

Waarom is dit een contradictie? Zij vervolgt met:

> "Yet it is accepted, and imaginary numbers are used routinely. But how can we use them to *prove* a contradiction?" ???

(vraagtekens van mij) Daarna volgt een passage waaruit een misvatting over het wiskundig gebruik van inductie naar voren lijkt te komen. De sectie eindigt met:

> "But the relative merits of inductive versus deductive proofs aside, inductive proofs have relative merits among themselves. To illustrate, let's suppose for a moment that Fermat's last theorem has just been tested with modern hardware for the first time. At your left, there's a powerful computer and a printout of the results, which show the theorem is true for exponents up to four million. At your right, there's a mathematician holding a two-hundred-page document, which concludes, by any form of mathematical logic, that the theorem is true for all numbers. Which do you believe provides the greatest certainty? (Interestingly, if it were only *two* pages long, it would seem more credible.) In short, does anyone believe Fermat's theorem is true any more now than they did before June of 1993?"

Die 200 bladzijden is een thema dat veel terugkomt in haar boek. Verder kun je je ook afvragen wat 'modern hardware' betekent in deze context. Wordt hier niet over het hoofd gezien dat voor dat 'testen' door de computer programma's geschreven moeten worden die gebruikmaken van wiskundige inzichten? Zelfs voor het bekende geval van exponent 4, waarvoor al een bewijs bestaat sinds Fermat (die de 'methode van de oneindige afdaling' bedacht heeft, die natuurlijk wel naar een door Marilyn gewraakte contradictie toewerkt), gaat het toch om een in principe oneindige verzameling mogelijke oplossingen (die er weliswaar niet zijn), dus dat 'testen' is een niet-triviale aangelegenheid.

Na de laatst geciteerde passage komt de volgende korte sectie ('A Possible Fatal Flaw'):

> "A possible fatal flaw in Wiles's proof is whether the same basic arguments could be constructed to hold true for *all* exponents instead of just the exponents equal to or greater than 3. If it could, the same proof would 'prove' the Pythagorean theorem ($x^2+y^2=z^2$) to be false."

Ze bedoelt hier waarschijnlijk te zeggen dat dit zou bewijzen dat $x^2+y^2=z^2$ ook geen oplossingen in positieve gehele getallen heeft. Tja. Wat heeft de auteur gedreven om dit boek te schrijven, vraag je je af.

Een verhelderende bespreking van het boek van Marilyn vos Savant wordt gegeven in [1]. De bespreking eindigt met: "We'd like to thank Sharon Stone, Boris Yeltsin and the Vienna Boys Choir for being such goods sports with all of our faxes, and for (presumably) putting them to the appropriate use." Dit is een toespeling op de manier waarop Marilyn vos Savant Barry Mazur, Ken Ribet and Karl Rubin bedankt in haar 'Acknowledgements': "And a personal 'thank you' to Barry Mazur, Kenneth Ribet and Karl Rubin for being such good sports and for putting up with all of my faxes." Ken Ribet heeft geen enkele herinnering aan contact met haar en bij de anderen was het (indirecte) contact te miniem om 'good sports' genoemd te worden.

Referenties

1 Nigel Boston en Andrew Granville, The world's most famous math problem (the proof of Fermat's Last Theorem and other mathematical mysteries), *Amer. Math. Monthly* 102(5) (1995), 470–473.

2 F.M. Dekking, C. Kraaikamp, H.P. Lopuhaä en L.E. Meester, *A Modern Introduction to Probability and Statistics*, Springer Texts in Statistics, Springer, 2005.

3 Richard D. Gill, The Monty Hall problem is not a probability puzzle, *Stat. Neerl.* 65(1) (2011), 58–71.

4 Mark Haddon, *The Curious Incident of the Dog in the Night-Time*, Vintage, 2004.

5 G. Polya, *How to Solve It – A New Aspect of Mathematical Method*, with a foreword by John H. Conway, Princeton Science Library, Princeton University Press, 2014. Reprint of the second (2004) edition.

6 Steve Selvin, A problem in probability, *The American Statistician* 29(1) (1975), 67.

7 Marilyn vos Savant, *The World's Most Famous Math Problem*, St Martin's Press, 1993.

8 Wikipedia, Marilyn vos Savant, https://en.wikipedia.org/wiki/Marilyn_vos_Savant, 2022.

9 Wikipedia, Monty Hall, https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall, 2022.

10 Wikipedia, Monty Hall problem, https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem, 2022.