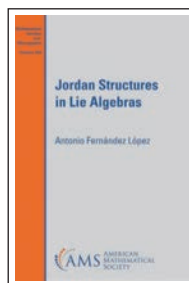


Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Antonio Fernández López

Jordan Structures in Lie Algebras

Mathematical Surveys and Monographs 240
American Mathematical Society, 2019

299 p., prijs \$129.00

ISBN 9781470450861

De auteur heeft als doel om de resultaten over Jordan-algebra's in te zetten voor onderzoek naar de structuur van Lie-algebra's. Hij is daar niet alleen goed in geslaagd maar heeft ook een origineel en goed leesbaar boek geschreven.

De titel van het boek geeft aan dat Jordan-algebra's en Lie-algebra's de centrale onderwerpen zijn. Wie op zoek is naar een goede inleiding in Lie-algebra's, heeft aan de klassieke inleiding *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* van James Humphreys (Springer, 1974) nog steeds een hele goede keuze. Wie het overeenkomstige doel voor ogen heeft voor Jordan-algebra's, raad ik het onderhoudende boek *A Taste of Jordan Algebras* van Kevin McCrimmon (Springer, 2004) aan, dat vol met geschiedenis en goed te volgen bewijzen staat.

Met zijn nieuwe boek doet Fernández López geen moeite om deze twee te overtreffen. Hij heeft een hele andere insteek. Hij ziet ervan af om de grote stellingen over Jordan-algebra's te bewijzen en hanteert een origineel uitgangspunt: hij wil laten zien hoe de resultaten uit de theorie van Jordan-algebra's gebruikt kunnen worden om de structuur van Lie-algebra's te bepalen.

Voor we verder ingaan op de inhoud even een micro-inleiding in de niet-associatieve algebra's uit de titel voor de geïnteresseerde leek. Laat A een associatieve algebra zijn over een commutatieve ring. Breek de vermenigvuldiging $x \cdot y$ van A op in een symmetrisch deel $x \cdot y = x \cdot y + y \cdot x$ en een anti-symmetrisch deel $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$. Hier betekent *symmetrisch* dat de identiteit $x \cdot y = y \cdot x$ (commutativiteit) geldt en *anti-symmetrisch* dat de identiteit $[x, x] = 0$ geldt. Elk van beide vermenigvuldigingen voldoet nog aan een andere belangrijke wet, respectievelijk de *Jordan-identiteit* $(x \cdot x) \cdot (y \cdot x) = ((x \cdot x) \cdot y) \cdot x$ en de *Jacobi-identiteit* $[[x, y], z] + [y, z], x + [z, x], y = 0$. Een *Jordan-algebra* is een niet-noodzakelijk associatieve algebra met een commutatieve vermenigvuldiging die aan de Jordan-identiteit voldoet en een *Lie-algebra* is een niet-noodzakelijk associatieve algebra met een anti-symmetrische vermenigvuldiging die aan de Jacobi-identiteit voldoet.

Terwijl Pascual Jordan het nut zag van Jordan-algebra's voor quantummechanica, waren de Lie-algebra's meer in trek bij wiskundigen, vooral omdat ze optreden als infinitesimale groepen. Lie-groepen en algebraïsche groepen kunnen goed aan de hand van Lie-algebra's bestudeerd worden. Jordan-algebra's staan minder centraal in de wiskundige belangstelling dan Lie-algebra's maar zijn nog steeds actueel in de fysica (zie bijvoorbeeld Michel Dubois-Violette en Ivan Todorov, 'Exceptional quantum geometry and particle physics II', in *Nuclear Physics. B. Theoretical, Phenomenological, and Experimental High Energy Physics. Quantum Field Theory and Statistical Systems* 938 (2019), 751–761). Mede dankzij de indrukwekkende structuurtheorie voor Jordan-algebra's en de steeds sterker aangehaalde band met Lie-algebra's, wordt het voor

veel Lie-algebraïci interessant om toch nog eens naar Jordan-algebra's te kijken.

Net als voor associatieve algebra's kunnen we voor niet-associatieve algebra's A met vermenigvuldiging $x \cdot y$ de begrippen *ideaal* I (een lineaire deelruimte met $A \cdot I \subseteq I$) en *enkelvoudig* (niet-commutatief en geen andere idealen dan 0 en A) invoeren. De aandacht voor Jordan-algebra's en Lie-algebra's gaat in eerste instantie uit naar enkelvoudige algebra's, omdat deze de interessante bouwblokken zijn van meer algemene exemplaren. Voor beide soorten bestaat, in het geval dat de dimensie van A eindig is en de ring van scalars Φ een algebraïsch afgesloten lichaam van bijna elke karakteristiek, een volledige classificatie.

Een belangrijke verbinding tussen Jordan-algebra's en Lie-algebra's is de in de jaren zestig verschenen Kantor–Koecher–Tits- (kortweg: KKT-) constructie. Deze maakt gebruik van het feit dat, voor elke niet-associatieve algebra J over Φ met vermenigvuldiging $x \cdot y$, de algebra $\text{Der}(J)$ van *derivaties*, dat wil zeggen: lineaire afbeeldingen $D: J \rightarrow J$ met $D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y)$, een Lie-algebra is met vermenigvuldiging $[D, E] = D \circ E - E \circ D$, waarbij $\circ$ de samenstelling van afbeeldingen is. Als J een Jordan-algebra is, dan is de Lie-algebra $\text{Der}(J)$ uit te breiden tot een gegradeerde Lie-algebra $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ over Φ . Hierbij wordt de *gradering* gekenmerkt door $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$ voor alle indices i, j met de conventie dat als een index k niet voorkomt in $\{-1, 0, 1\}$, de deelruimte L_k triviaal is. In de KKT-constructie zijn L_{-1} en L_1 kopieën van J en is L_0 (soms iets groter dan) een kopie (als Lie-algebra) van $\text{Der}(J)$.

Welke Lie-algebra's L zijn afkomstig van een KKT-constructie? Daarvoor is dus nodig dat L een gradering heeft. Uit de definitie van gradering volgt dat L_0 een deel-Lie-algebra van L is. Laten we eerst eens kijken naar L_1 . Vanwege symmetrie gedraagt deze zich net zo als L_{-1} . Een gevolg van de gradering is dat $[L, [L, L_1]] \subseteq L_1$. Een lineaire deelruimte L_1 met deze eigenschap heet een *inwendig ideaal*. Als a tot L_1 behoort, dan zal $[a, [a, [a, L]]]$ in $[a, L_1]$ liggen en dus gelijk aan $\{0\}$ zijn. We zeggen dan dat a *nilpotent van index ten hoogste 3* is. Niet elke Lie-algebra heeft dergelijke elementen. Laat Φ nu een algebraïsch afgesloten lichaam zijn van karakteristiek 0 of ten minste 5 en L enkelvoudig en eindig-dimensionaal. Dan heeft L een niet-triviaal nilpotent element van index ten hoogste 3. Afgezien van een klein 5-dimensionaal voorbeeld hebben we dan de volgende dichotomie: ofwel L heeft een *extremaal element* a (dit betekent $[a, [a, L]] = \Phi \cdot a$), ofwel L heeft een nilpotent element a van index 2 (dit betekent $[a, [a, L]] = 0$). In dit laatste geval is er de indrukwekkende classificatie van voornamelijk Premet en Strade ('Simple Lie algebras of small characteristic. VI. Completion of the classification', *Journal of Algebra* 320 (2008), 3559–3604), maar daar gaat het boek niet over en daar ga ik niet verder op in.

In het eerste geval levert de aanwezigheid van een extremaal element a in L over het algemeen een gradering $L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$ met $L_2 = \Phi \cdot a$ op. Het hoofdbestanddeel in de constructie van deze gradering is het Jacobson–Morozov lemma, dat bij a een element b aanwijst met de eigenschap dat het lineaire opspannel van a , b en $h = [a, b]$ in L een enkelvoudige deel-Lie-algebra is. (Dit betekent dat de deel-Lie-algebra isomorf is met de Lie-algebra bestaande uit 2×2 -matrices over Φ met spoor 0, voorzien van de anti-symmetrische vermenigvuldiging beschreven in het begin van deze boekbespreking.) Vermenigvuldiging van links met het element h , vaak aangegeven met ad_h , levert namelijk

een derivatie op (dankzij de Jacobi-identiteit) die als eigenwaarden $-2, -1, 0, 1, 2$ heeft, en de deelruimten L_i zijn de eigenruimten hiervan. In deze situatie is een Jordan-algebra te vinden. Hier is een ultra-korte omschrijving van de constructie: Laat L_a de lineaire ruimte $L \ker(\text{ad}_a^2)$ zijn; dit is het quotiënt van L naar de kern van de lineaire afbeelding ad_a^2 . Geef met $\tilde{x}$ voor $x \in L$ de projectie van x op L_a aan en definieer een vermenigvuldiging op L_a door $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = [\tilde{[x, a]}, y]$. Dit maakt van L_a een Jordan-algebra als 6 invertierbar is in Φ . Het boek van Fernández López geeft aan welke rol deze Jordan-algebra kan spelen in de beschrijving van L en de gradering door middel van een gegeneraliseerde KKT-constructie.

Maar Fernández López beperkt zich niet tot eindig-dimensionale Lie-algebra's. De zojuist genoemde constructie werkt ook in het oneindig-dimensionale geval. Ik kreeg zelfs de indruk dat een hoofddoel van zijn boek niet zozeer bij eindig-dimensionale Lie-algebra's ligt maar bij Zelmanovs classificatie van oneindig-dimensionale enkelvoudige Lie-algebra's met een gradering

$$L = L_{-n} \oplus L_{-n+1} \oplus \cdots \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-1} \oplus L_n$$

voor een natuurlijk getal n over een lichaam Φ van karakteristiek 0 of groter dan $4n$ (zie E.I. Zelmanov, 'Lie algebras with finite gradation', *Matematicheskii Sbornik, Novaya Seriya* 124(166) (1984), 353–392). Dit grootse resultaat bewees Zelmanov een aantal jaren vóór het beperkte Burnside-vermoeden, dat over groepen gaat maar zowel Jordan-algebra's als Lie-algebra's gebruikt en waarvoor hij in 1994 een Fieldsmedaille kreeg. Een van de vroege stappen in het bewijs geeft een basis van nilpotente elementen van index 3. Deze leiden — als boven beschreven — tot Jordan-algebra's, die een centrale rol in het bewijs spelen. Gezien het bestaan van erg veel wilde oneindig-dimensionale enkelvoudige Lie-algebra's, moet er wel een extra voorwaarde als de gradering vervuld zijn om tot een classificatie te kunnen komen.

Ik kreeg de indruk dat Fernández López zijn boek graag gewijd had aan een goed leesbaar bewijs voor deze stelling. Hoewel veel ingrediënten daarvoor aanwezig zijn, geeft hij in zijn inleiding al aan dat zo'n bewijs er niet in zit. Ter compensatie, of als troost, is in het een-na-laatste hoofdstuk de uitdaging geformuleerd om de grotere klasse van Lie-algebra's opgespannen door nilpotente elementen van index 3 te classificeren (voor Φ een lichaam van karakteristiek 0).

Wat ik hierboven beschreven heb gaat vooral over 9 van de 15 hoofdstukken, die 215 van de 281 pagina's eigenlijke inhoud beslaan. De overige 6 hoofdstukken zijn dus voornamelijk kort en behandelen achtereenvolgens een eigenschap van vrije Lie-algebra's, idealen in Lie-algebra's die na uitdeling een Lie-algebra zonder nilpotente elementen van index 2 opleveren, een bewijs van een stelling van Zelmanov in 'Lie algebras with algebraic associated representation', *Matematicheskii Sbornik, Novaya Seriya* 121(163) (1983), 545–561, een Artin-eigenschap die gekoppeld is aan inwendige idealen, en een bewijs dat Banach–Lie-algebra's zonder nilpotente elementen van index 2 maar opgespannen door extremale elementen eindig-dimensionaal zijn. Steeds spelen Jordan-algebra's een rol die uit het bestaan van nilpotente elementen van index 3 (en generalisaties daarvan) een rol. Ook zo wordt het hoofddoel van het boek waargemaakt.

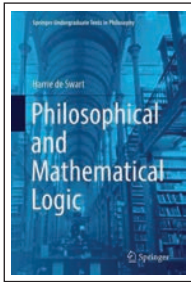
Fernández López geeft veel nuttige verbanden tussen nilpotente elementen van lage index in Lie-algebra's, graderingen, en Jordan-algebra's. Deze informatie geeft de benodigde handvatten

om de Tits-meetkunde van algebraïsche groepen te begrijpen aan de hand van inwendige idealen (zie mijn artikel ‘Inner ideals in Lie algebras and spherical buildings’, *Indag. Math.* 32 (2021), 1115–1138), maar geeft ook inzicht in inwendige idealen van oneindig-dimensionale Lie-algebra's.

Het boek straalt plezier uit. Het uitgangspunt is een uitdaging die de schrijver zichzelf gesteld heeft maar waarin de lezer meegenomen wordt. Er is veel gedaan aan toegankelijkheid van het materiaal voor de lezer. In het eerste hoofdstuk zijn definities van begrippen voor non-associative algebra's als eenheid, ideaal, primaliteit en integriteitsgebied, in grote algemeenheid ingevoerd. Het tweede hoofdstuk is een inleiding in Lie-algebra's. De inleidingen van de hoofdstukken bestaan uit een goede beschrijving van wat er behandeld gaat worden en een motivatie waarom. Aan het eind van elk hoofdstuk wordt de lezer uitgedaagd door opgaven, waar soms later naar verwezen wordt.

De schrijfstijl is zeer vlot en de inhoud zeer goed volgbaar ondanks frequente kleine drukfouten. Voor degenen die meer willen weten over de interactie tussen Jordan- en Lie-algebra's is het boek een aanrader.

Arjeh Cohen



Harrie de Swart

Philosophical and Mathematical Logic

Springer Undergraduate Texts in Philosophy
Springer, 2018

xx + 539 p., prijs €54,49
ISBN 9783030032531

Zoals bekend bieden de uitgaven in deze serie van Springer teksten die op gevorderd-undergraduate niveau vele gebieden van de wijsbegeerte behandelen. Van klassieke filosofie tot hedendaagse onderwerpen. Het voorliggende boek is een typerend voorbeeld van de keuze: hoort het tot de wiskunde, tot de wijsbegeerte of tot beide? Uiteindelijk is deze vraag niet zo belangrijk, laten we het maar op ‘beide’ houden. Het gaat immers alleen om de inhoud. En deze inhoud is in goede handen bij De Swart, emeritus van de universiteit van Tilburg. En bekend van diverse boeken (alleen en samen met anderen) op het terrein van (symbolische) logica, computerwetenschap, verzamelingenleer, wijsbegeerte van de wiskunde. Het volgende citaat aan het begin van het boek geeft duidelijk aan waar hij staat: “Logic is to improve human thinking in order to improve human existence.” (Andrzej Grzegorczyk)

Reflectie met het oog op verbeteren van het menselijke bestaan. Het menselijk bestaan staat hierin centraal; wijsgerig en wiskundig denken ondersteunen deze reflectie. En dan niet zoiets vaags als ‘het bestaan’, maar gerelateerd aan de onmiddellijke realiteit van ons dagelijks leven. “After all, the unparalleled development of the technique in a narrow sense, of the technical technique, one could say, is followed by a hardly less important development of the psychological technique, of the advertising technique, propaganda technique, in short, of means to influence people” en “Against all these known and unknown psychic influences we can forge a weapon by improving our thinking technique. And that such a rein-

forcement of our spirit is required, urgently needed, is my deepest conviction.” (David van Dantzig, 1938, inaugural lecture, Delft, vertaald uit het Nederlands)

De Swart laat er geen twijfel over bestaan dat hij, zoals wij allen, staat op de schouders van hen die ons voorgingen. Heel mooi brengt hij dit naar voren in een stukje ter herinnering aan “my friend and teacher” Johan J. de longh (1915–1999, Radboud Universiteit): “It is the main task of a philosopher to show people that things do not have to be the way they are, that they might be different and that in some cases they should be different.” (Johan de longh) Naast de velen op wiens schouders hij stond, was het bekend dat “He always started his lectures with a short prayer in Latin: Spiritus sancti gratia illuminet sensus et corda nostra [May the grace of the Holy Spirit illuminate our senses and our hearts]. And he always finished his lectures with the following prayer: Gratias tibi agimus, Domine, pro omnibus beneficiis tuis [We thank you, my Lord, for all your blessings]”. Kom daar nu nog eens om!

Na deze standpuntbepalingen wordt het tijd voor de inhoud van dit boek. Toch nog eerst een aantal adviezen aan de lezer hoe hij/zij dit boek moet bestuderen. Geen overbodige luxe, waar vele van hen waarschijnlijk niet gewend zijn om wiskundige teksten te bestuderen. Want de inhoud die volgt is niet te bestuderen op de wijze waarop men doorgaans filosofische en dergelijke werken bestudeert. Daar komt het vaak niet aan op de letterlijke tekst per zin/regel, maar om de inhoud die overgebracht wordt. In dit boek wordt van de lezer/student wiskundige precisie geëist zonder welke het gegarandeerd niet lukt. Om dit over het voetlicht te brengen citeert hij Lewis Carroll die in zijn *Symbolic Logic* and *The Game of Logic* didactische studiewerken geeft aan de student. Helder en to the point. Het ware te wensen dat ook vele van de hedendaagse scholieren en bachelorstudenten wiskunde dergelijke aanwijzingen zouden kennen en opvolgen. Het zou het beheersingsniveau van ons vak ten goede komen.

Het boek behandelt de volgende onderwerpen: propositionele logica; predicated logica; aritmetica en Gödels onvolledigheidsstelling; verzamelingen (eindige en oneindige); filosofische logica: modaal, epistemisch, deontisch, temporaal; taal filosofie; intuïtionisme en intuïtionistische logica; toepassingen van logica en verzamelingentheorie: logische programmering, relationele databases. Een rijke en op undergraduate niveau behoorlijk volledige inhoud. Maar ook een inhoud waarvoor een grote inzet van de student vereist is om zich deze eigen te maken. De didactische aanwijzingen zullen vruchten afwerpen wanneer men deze ter harte neemt en opvolgt.

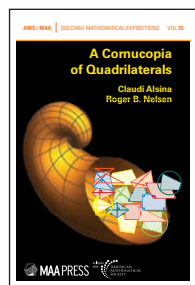
De Swart schenkt grote aandacht aan valide redeneringen en afleidbaarheid in termen van axioma's, tableaux en natuurlijke deductie. Naïeve en formele verzamelingenleer komt aan de orde, Zermelo–Fraenkel en Löwenheim–Skolem, paradoxen, Peano. Natuurlijk komen de diverse denkrichtingen aan de orde zoals Platonisme, Intuïtionisme en dergelijke. Tot slot vinden we in dit boek beschouwingen over valkuilen en onzinnelijke discussiemethodes, een onderwerp dat we in vele soortgelijke boeken node missen.

Uiteraard zou het boek niet compleet zijn als opgaven, oefeningen en dergelijke zouden ontbreken. Talloze relevante oefeningen hebben hun plaats gevonden in dit boek. De oplossingen daarvan zijn eveneens in het boek opgenomen, hetgeen de studeerbaarheid van het werk heeft vergroot.

Het taalgebruik, de wijze van presentatie, de ‘nabijheid’ van de gepresenteerde tekst tot de student, het getuigt allemaal van de grote eruditie van de schrijver en van zijn vermogen om moeilijke zaken helder naar voren te brengen. Niet zodanig dat de student na lezing van een paragraaf zou denken ‘nu begrijp ik het’, vervolgens het boek dichtslaat en het toch niet kan navertellen wat hij/zij gelezen heeft. Integendeel, de tekst straalt begrip uit voor de moeite die de student moet doen om de inhoud de baas te worden en biedt een uitgestoken hand om hem of haar verder te helpen. Per onderdeel geven referenties de lezer aanwijzingen voor verdere studie en aan het eind is een uitvoerige index opgenomen.

Al met al een magistraal boek. De schrijver heeft er naar mijn mening goed aan gedaan om zijn eerdere boek te herzien en te vervolmaken. Het resultaat dat nu voor ons ligt verdient alle denkbare superlatieven.

Wim Kleijne



Claudi Alsina, Roger B. Nelsen

A Cornucopia of Quadrilaterals

MAA Press, 2020

xi + 292 p., prijs \$59.00

ISBN 9781470453121

Dit prachtige boek (u kunt de rest van de recensie overslaan en direct uw bestelling plaatsen) is voor vierhoeken wat *The Secrets of Triangles* (zie de recensie in NAW van maart 2018) was voor driehoeken, namelijk het boek dat op een systematische manier bij elkaar zet wat er zoal over een eenvoudige figuur als een vierhoek in de loop der eeuwen is bedacht (en dat blijkt heel erg veel te zijn) en dat bovendien voor velen van u vermoed ik voor een onverwacht groot deel onbekend zal zijn, althans zo verging het mij.

De opzet van het boek is in elk van de elf hoofdstukken telkens een klasse vierhoeken te behandelen (er worden bijna dertig verschillende typen vierhoeken gedefinieerd, zoals behalve alle bekende ook het mij onbekende Garfield-trapezium, het trilaterale trapezium en nog zo wat), waarvan vrijwel alle de ‘gewone’ convexe tweedimensionale vierhoek betreffen met uiteraard enkele uitstapjes naar ‘ongewone’ vierhoeken, zoals concave vierhoeken of complexe vierhoeken (met een paar elkaar snijdende zijden), maar ook vierhoeken waarvan de hoekpunten niet in een vlak liggen. Elk hoofdstuk bevat een uitdagende maar maakbare serie opgaven (challenges) die aan het einde van het boek gelukkig allemaal (dat is helaas vaak wel eens anders) volledig en kraakhelder worden uitgewerkt.

Een van de (vele) kwaliteiten van het boek is dat de schrijvers (Alsina en Nelsen, respectievelijk werkend in Barcelona, Spanje en Portland, USA) in elk hoofdstuk (of zelfs in vrijwel elke paragraaf) er dus in slagen zeer (in ieder geval voor mij) verrassende eigenschappen of stellingen uit de meer dan overvloedige literatuur (er worden meer dan negentig bronnen genoemd, van het terecht overbekende boek *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry* van David Wells tot vrij obscure tijdschriftartikelen

aan toe) op te diepen, bijvoorbeeld in hoofdstuk 1 al direct de zogenaamde *Newton-lijn*. Als een punt P binnen een convexe vierhoek $ABCD$ (die geen parallellogram is) verbonden wordt met de vier hoekpunten A , B , C en D en de som van de oppervlakten van telkens twee tegenoverstaande driehoeken (dus PAB en PCD of PAD en PBC) gelijk is, dan liggen al die punten P op een lijn (de *Newton-lijn* dus). Spectaculair gevolg is dan ook nog eens dat elk paar overstaande hoekpunten (dus bijvoorbeeld A en C dan even ver af blijken te liggen van die *Newton-lijn*.

Nog een voorbeeldje van de rijkdom van dit boek (we zitten nog steeds in hoofdstuk 1) is de (eenvoudig te bewijzen, maar toch fijne) *tapijtenstelling*. Plaats twee elkaar deels overlappende tapijten in een kamer, dan is de oppervlakte van het overlappende deel gelijk aan de oppervlakte van de niet-bedeekte delen van die kamer dan en slechts dan als de oppervlakte van de kamer gelijk is aan de gezamenlijke oppervlakte van de twee tapijten. Zelfs uit te breiden naar meer dan twee tapijten mits nooit meer dan twee tapijten elkaar gelijktijdig overlappen.

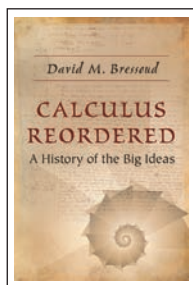
En, wie van u kent de *Stelling van Steiner*? Als in een convexe vierhoek Q (met opeenvolgende zijden a , b , c en d) geldt dat $a + c = b + d$ dan heeft Q een ingeschreven cirkel! Ook het bewijsje daarvan is een pareltje van elegant redeneren. Ik kende ook niet de *formule van Brahmagupta* voor de oppervlakte van een vierhoek (waarvan de mij wel bekende formule van Heron voor de oppervlakte van een driehoek een speciaal geval is met $d = 0$). Verder het *Varignon-parallellogram* dat ontstaat als je de vier middens van de zijden van elke willekeurige vierhoek (dus ook concaaf of complex of driedimensionaal) met elkaar verbindt.

Ik zal (voorlopig even) de verleiding moeten weerstaan te blijven citeren, dus vermeld ik nog dat de schrijvers niet alleen veel (fraaie) dwarsverbanden leggen tussen de hoofdstukken onderling maar ook tussen de gebruikte wiskundige methoden (tussen vectormeetkunde en analytische meetkunde — uiteraard zou ik zeggen — maar ook bijvoorbeeld tussen meetkundige bewijzen en Fibonacci-getallen, toch minder evident, en, ook niet te missen). Ook voor dit boek geldt weer dat de enthousiaste docent die het geluk heeft wiskunde D te mogen geven in bijvoorbeeld een 5 vwo- of 6 vwo-klas uit een enorme hoeveelheid materiaal kan kiezen om bijvoorbeeld de module bewijzen (in dit geval dan de meetkundige bewijzen) tot een hoogtepunt te maken van het curriculum voor het vak wiskunde, maar ik durf wel te stellen zelfs van het complete vwo-curriculum.

Nog enkele toegiften ten slotte. Een zeer verhelderend — bijna woordenloos — meetkundig bewijsje van de fameuze *paradox van Simpson* (je gemiddelde — bij honkbal bijvoorbeeld — is twee jaar achter elkaar hoger dan dat van je tegenstander, maar kan berekend over die twee jaar samen lager zijn). De vele bewijzen van de *Stelling van Pythagoras* worden lustig door het boek heen gestrooid. De zeer fraaie *vlinderstelling*. Verder, dat als een regelmatige vijfhoek, een regelmatige zeshoek en een regelmatige tienhoek alle drie een omgeschreven cirkel hebben met dezelfde straal en de zijden ervan een driehoek insluiten, die driehoek niet alleen rechthoekig is (!), maar dat de twee rechthoekszijden zich dan verhouden als de Gulden Snede (!). Als laatste het al eerder genoemde *Garfield-trapezium* en de daaruit voortvloeiende *Garfield-rechthoek* (niet vernoemd naar de kat, maar naar de in 1880 tot twaalfde president van de Verenigde Staten verkozen James Abram Garfield) die zijn opgebouwd uit drie respectievelijk vier

rechthoekige driehoeken, zeer handig in te zetten bij diverse getaltheoretische problemen en bij betegelingen.

Heel jammer blijft het mijns inziens (mijn enige puntje van kritiek) dat de prijs van zo'n beetje alle boeken van de American Mathematical Society en dus ook van dit (weliswaar fraaie en ook fraai uitgevoerde) boek weer aan de tamelijk hoge kant is (ook vergeleken met boeken van een soortgelijke kwaliteit van andere uitgeverijen) en even jammer is het om — financieel — gedwongen te worden juist dit boek als e-boek aan te schaffen, want je gunt het vooral iedere wiskundestudent en uiteraard andere (al dan niet minder-vermogende) geïnteresseerden zo'n boek op de plank te hebben staan en in de hand te kunnen nemen. *Joop van der Vaart*



David M. Bressoud

Calculus Reordered
A History of the Big Ideas

Princeton University Press, 2019

xvi + 224 p., prijs \$ 29.95

ISBN 9780691181318

Al sinds de jaren vijftig woedt er in de Verenigde Staten een debat over hoe calculus op colleges onderwezen moet worden. David Bressoud heeft daar een heel duidelijke mening over, die in dit boek helder naar voren komt. In zijn visie moet men calculus onderwijzen in de geest en min of meer de volgorde van de historische ontwikkeling. Een argument dat hij in het voorwoord en in de appendix van zijn boek aandraagt, is dat parallel aan die historische ontwikkeling het abstractieniveau toeneemt. Hij meent dat door op een vrij hoog abstractieniveau (= met limieten) te beginnen, veel studenten de draad en het plezier al snel kwijt raken.

In de eerste vier hoofdstukken van het boek beschrijft de auteur de geschiedenis van vier basisideeën van de calculus. Het vijfde en laatste hoofdstuk gaat over de ontwikkelingen in gang gezet na Cauchy. De intuïtie wordt in die periode aangevuld met meer formele bewijzen en een beter begrip en fundering van de reële getallen. Keuzeaxioma en continuïteitshypothese komen in het spel en de calculus wordt reële analyse. Bressoud bespreekt bijdragen aan die reële analyse van onder meer Cantor, Weierstrass, Riemann en Lebesgue. In de appendix bespreekt Bressoud zijn ideeën over calculusonderwijs.

Bressouds vier basisideeën van de calculus vinden we in: Hoofdstuk 1 'Accumulation', Hoofdstuk 2 'Ratios of Change', Hoofdstuk 3 'Sequences of Partial Sums' en Hoofdstuk 4 'The Algebra of Inequalities'. Hoofdstuk 1 gaat over integreren *avant la lettre*, begint met Archimedes' berekeningen van inhoud van de bol en oppervlak van de cirkel, en vervolgt met onder meer berekeningen van het volume van een paraboloid en het oppervlak onder $y = x^k$ volgens Fermat. Hoofdstuk 2 vangt aan met interpolatiemethoden die in India rond 500 A.D. werden ontwikkeld voor het maken van sinus- en cosinustafels. Via Napier, Descartes, Fermat, Wallis, Newton, Leibnitz en de Bernoulli's, eindigt dit hoofdstuk met de klassieke differentiaalvergelijkingen uit de mathematische

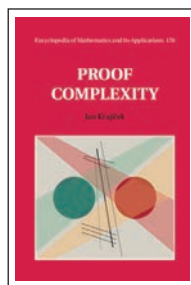
fysica. Hoofdstuk 3 behandelt de geschiedenis van reeksen en bevat secties over het werk van Taylor, Euler, D'Alembert, Lagrange en Fourier. Hoofdstuk 4 gaat over de ontwikkeling van het limietbegrip en continuïteit. Bressoud behandelt het werk van Cauchy en zijn voorgangers en besteedt aandacht aan de moeite die Cauchy had met uniforme continuïteit.

Het boek richt zich vooral tot collegestudenten en is levendig geschreven in een aantrekkelijke stijl. Bressoud legt veel van de wiskunde die hij bespreekt goed uit op het niveau van een eerstejaarscollege of even daaronder. Dat dit wat minder lukt bij meer geavanceerde onderwerpen als Fourieranalyse of de Lebesgue-integraal is niet vreemd. Voor studenten natuurwetenschappen en techniek die iets willen weten over de achtergrond en historie van de calculus die zij moeten leren, is dit een prachtig boek. Dat geldt ook voor hun docenten, ook als zij de opvattingen van Bressoud over onderwijs niet delen.

Calculus Reordered beperkt zich tot de geschiedenis van de calculus. Algebra en meetkunde worden nauwelijks besproken. Van Fermat komen alleen de bijdragen aan de analytische meetkunde aan de orde, Galois wordt niet genoemd en de rol van Gauss in de ontwikkeling van de wiskunde blijft sterk onderbelicht.

Mij stoorde het dat Bressoud ervoor kiest alle wiskundigen voor 1700 als *philosopher* aan te duiden, en die tussen 1700 en 1850 als *scientist*. Zijn argument is dat velen zichzelf ook als wijsgeer zagen, maar toch, op de grafsteen van Van Ceulen (1540–1610) staat echt 'professor in de wisconstige wetenschappen'.

In Hoofdstuk 5 staat een opmerkelijke fout: De Cantor-achtige verzameling die ontstaat door voortdurend in plaats van het middelste $1/3$ interval, het middelste $1/5$ interval te verwijderen, heeft nog steeds maat 0, en geen positieve maat. Op de webpagina van Bressoud staat een lijst met correcties, waar ook deze fout gecorrigeerd is. Deze kleine punten van kritiek nemen niet weg dat Bressoud een leuk en leeswaardig boek over de geschiedenis van de calculus heeft geschreven. *Jan Wiegerinck*



Jan Krajíček

Proof Complexity

Encyclopedia of Mathematics and its Applications 170

Cambridge University Press, 2019

xiv + 516 p., prijs £ 105.00

ISBN 9781108416849

When Alan Turing, in 1936, formulated a notion of 'computable' in terms of the machine which carries his name, he solved at the same time a problem posed by Hilbert, the so-called *Entscheidungsproblem*: decide by an algorithm whether a given formula of first-order logic is a tautology. Turing showed that no such algorithm can exist. Algorithms of the kind Hilbert asked for, are available for *propositional logic*.

Things are different if one considers the fine-structure of computability: restrictions on the consumption of time and memory space during computations lead to so-called 'complexity classes'; also, machines are allowed to operate in non-deterministic fash-

ion. The famous P versus NP problem, still unsolved, asks whether non-deterministic polynomial time computability is strictly stronger than its deterministic counterpart. The subject which studies classes of problems in terms of the resources necessary for their solution, is called complexity theory.

There is a strong connection between complexity theory and logic, and this was a fertile field of exploration between the 1960s and the early 2000s. However, as the author remarks in his Introduction: “For some years now [...] progress has been more in sharpening and generalizing earlier advances [...] but not in fact that much [...] in developing completely new ideas.” It seems the right time, therefore, to write an overview of the field.

One approach to the logical side of complexity theory is to study the lengths of proofs in some calculus (many combinatorial problems can be reduced to problems of this kind); another uses techniques of mathematical logic for the transformation of complexity issues into questions about proofs in propositional logic. A paradigmatic example of a mathematical principle which can

be stated in various forms as a statement about proofs, is the *pigeon-hole principle*.

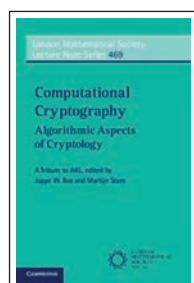
This handbook is divided into 4 parts. Part 1, ‘Basic Concepts’, treats the fundamentals of both complexity theory and proof systems for different kinds of logic. The second chapter treats relations between proofs in so-called *bounded arithmetic* (theories of the rig structure on the natural numbers with only weak forms of induction) and propositional logic proofs. Part 3, ‘Lower Bounds’, is what the author calls the *royal subject of proof complexity*, as the fundamental problems are formulated as questions about lengths of proofs. Finally, in the fourth and last part, problems of a more tentative and wider perspective are discussed.

Each part is divided into chapters and a section ‘Bibliographical and Other Remarks’ concludes each chapter; so the reader can get a view of the development of the topic discussed in the chapter.

This book is in my view an excellent reference manual for a fundamental topic in mathematical logic and theoretical computer science.

Jaap van Oosten

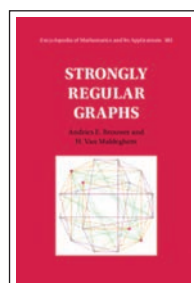
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



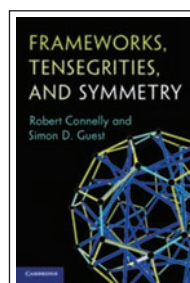
Joppe Bos, Martijn Stam
Computational Cryptography
Algorithmic Aspects of Cryptology
Cambridge University Press, 2021
ISBN 9781108854207
doi.org/10.1017/9781108854207



Hideaki Ikoma, Shu Kawaguchi, Atsushi Moriawaki
The Mordell Conjecture
A Complete Proof from Diophantine Geometry
Cambridge University Press, 2022
ISBN 9781108991445
doi.org/10.1017/9781108991445



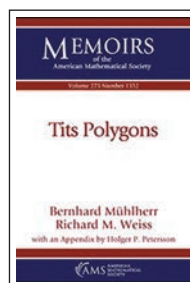
Andries E. Brouwer, H. Van Maldeghem
Strongly Regular Graphs
Cambridge University Press, 2022
ISBN 9781009057226
doi.org/10.1017/9781009057226



Robert Connelly, Simon D. Guest
Frameworks, Tensegrities, and Symmetry
Cambridge University Press, 2022
ISBN 9780511843297
doi.org/10.1017/9780511843297



Lev Bukovský, Eva Coplakova, Klaas Pieter Hart
Verzamelingen en van alles eromheen
Epsilon Uitgaven, deel 96, 2022
ISBN 9789050411905
epsilon-uitgaven.nl/wetenschappelijke-reeks



Bernhard Mühlherr, Richard M. Weiss
Tits Polygons
American Mathematical Society, 2022
ISBN 9781470451011
bookstore.ams.org/memo-275-1352