

Rainer Kaenders

Hausdorff Center for Mathematics
Universität Bonn
r.kaenders@uni-bonn.de

Onderwijs

Meetkunde van de stang: rechte lijn en koppelkrommen

De *Vakantiecursus voor wiskundeleraren* is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en wordt georganiseerd door het Platform Wiskunde Nederland. Sinds 1946 wordt hij jaarlijks gegeven op het Centrum Wiskunde en Informatica te Amsterdam, en later ook aan de Technische Universiteit Eindhoven, vanaf 2020 bij het Academisch Genootschap Eindhoven. Rainer Kaenders, naast Teun Koetsier en Theo Jansen docent van de 75ste vakantiecursus, probeert in een tweeledige bijdrage de rijkdom van de elementaire meetkunde uit de doeken te doen die zich bij de studie van stangenconstructies ontplooit.

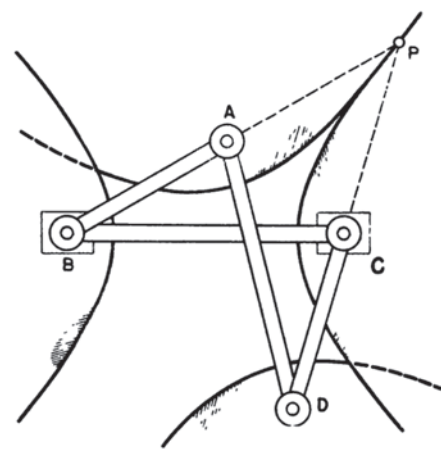
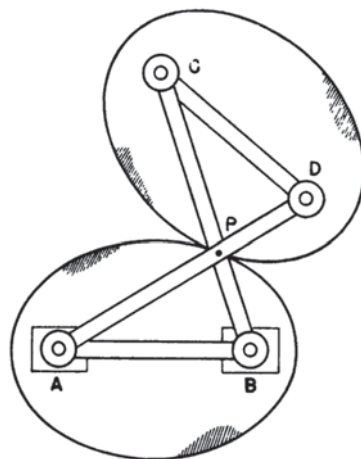
Hoe teken je een rechte lijn?

Hoe teken je een rechte lijn? Een cirkel is makkelijk met een touw of een stang te tekenen. Maar een lijn? Daarvoor heb je een liniaal nodig, maar hoe ga je die weer construeren? In deze bijdrage zal het gebied van stangenmeetkunde en de bijbehorende kinematica aan de hand van basismechanismen worden voorgesteld. Daarbij leren we beroemde schijnconstructies en echte oplossingen van kinematische problemen kennen. De constructie van een rechte lijn, een *rechtgeleiding*, werd in het jaar 1864 door de Franse officier Charles Peaucellier (1832–1919) [13, 14] en onafhankelijk in 1871 door Lipman Lipkin (1840–1876), een Litouws-Joodse student van Pafnuty Chebyshev (1821–1894) in Sint-Petersburg gevonden en in een Belgisch tijdschrift gepubliceerd [11] (vergelijk ook p. 424 in [3]). Ook zijn er twee oplossingen van Harry Hart (1848–1920) uit 1874 en er is een veralgemenisering, de *quadruplanar-inversor* uit 1875 van James Joseph Sylvester (1814–1897). *How To*

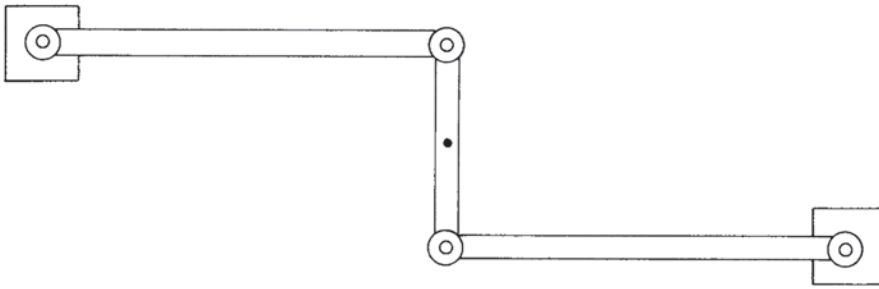
Draw A Straight Line: A Lecture On Linkages is de titel van een beroemd boek dat Alfred Bray Kempe (1849–1922) in het jaar 1877 publiceerde [10]. Het is tot de dag van vandaag een prachtig boek, waarin Kempe zijn fascinatie voor stangenconstructies met de lezer deelt en daarbij de klassieke basisconstructies laat zien.

Wat is een stangenconstructie?

Onder een *stangenconstructie* verstaan we een eindig aantal stangen die door scharnieren aan elkaar zijn verbonden. Soms zetten we één van de stangen vast in het vlak en laten alle stangen ten opzichte van dat vlak bewegen. Af en toe nemen we de stangenconstructie ook in de hand en beschouwen ze als zodanig. Bij een dergelijke constructie verbinden we een pen met een vaste plek op onze stangenconstructie en terwijl wij die constructie in het vlak bewegen, tekent die pen een figuur. Dat kan een deel van het vlak, een kromme of een verzameling van enkele punten zijn.



Figuur 1 Constructies voor ellips en hyperbool door schuivende snijpunten uit het boek van Robert C. Yates [19].



Figuur 2 James Watt's pseudo-oplossing voor het rechte lijn probleem: 'Watt's parallel motion' uit het boek van Kempe.

Sommige constructies zijn wel stangenconstructies maar de daarmee vervaardigde tekeningen van krommen zijn niet door stangenconstructies getekende krommen in de strikte zin die we hier willen hanteren. Bijvoorbeeld de constructies [19, p.183] van Robert C. Yates in Figuur 1 bestaan beiden uit een *contra-parallelogram*, zoals Kempe dit noemde. Soms vindt men ook de benaming *anti-parallelogram*, of minder formeel *vliinderconstructie*, hiervoor. De mechanismen van Yates zijn wel uit te breiden met een tweetal onderling scharnierende op de snijdende stangen schuivende elementen waar de pen aan kan worden vastgemaakt. Het snijpunt P van AD en BC bij de constructie links tekent een ellips en het snijpunt P van BA en DC bij de constructie rechts tekent een hyperbool omdat $|AP| + |BP|$, respectievelijk $|PB| - |PC|$ telkens bij de beweging constant blijven. Je kunt ook makkelijk inzien, dat als AB in het plaatje links en BC rechts vast aan het vlak verbonden zijn, er een bewegelijke ellips rond een vaste draait of twee hyperbolen, een vaste en een bewegelijke, op elkaar afrollen. Het punt P van de pen is echter niet vast met een stang van de constructie verbonden — daarom is de kromme niet door een stangenconstructie getekend in de boven geformuleerde zin.

Tevergeefse pogingen voor een rechte lijn
Volgens de legende was het de befaamde James Watt (1736–1819) die als eerste het probleem opwierp om met een stangenconstructie een rechte lijn te tekenen. Dit probleem bleek lastiger dan verwacht. Vóór dat de oplossing van Peaucellier en Lipkin er was, bestonden er al een aantal pseudo-oplossingen van het probleem. Een van deze pseudo-oplossingen was de stangenconstructie van James Watt zelf (zie Figuur 2), die ook in de bijdrage van Teun Koetsier bij de constructie van de stoommachine een rol ging spelen.

Een ander voorbeeld van een dergelijk mechanisme is *Roberts' linkage*, vernoemd naar Richard Roberts (1789–1864), zie Figuur 3. De constructie bestaat uit een stangenconstructie $ABSR$, waarbij A en B vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle PSR$ aan RS is vastgemaakt en star met RS meebeweegt. In de constructie van Roberts is $|AB| = 2|RS|$ en $|AR| = |RP| = |SP| = |SB|$. Natuurlijk is het mogelijk drie punten op de door het punt P getekende kromme te berekenen en vast te stellen dat ze niet op een lijn liggen. Meetkundig kunnen we dit ook door een argument inzien. Stel dat P op de lijn AB zou liggen. Dan tekenen we de symmetrieassen MR en NS van de altijd gelijkbe-

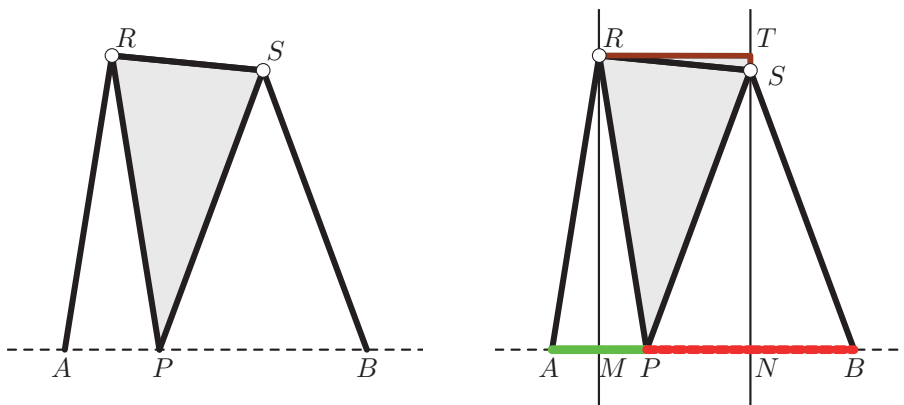
nige driehoeken APR en PBS en trekken de loodlijn door R af op lijn NS met snijpunt T . We zien dat $|MN| = |RT|$ en daarmee bij de rechthoekige driehoek $\triangle RST$ de korte zijde $\frac{1}{2}|AB| = |MN| = |RT|$ gelijk aan de lange zijde $|RS|$ zou moeten zijn, wat de aanname tegenspreekt dat A , P en B op een lijn liggen.

Andere pseudo-oplossingen van het rechte lijnprobleem komen van Chebyshev. Hij studeerde en ontwikkelde 39 jaar lang zulke bijna-rechtere lijnconstructies. Wij zullen er nu één van leren kennen, die in Figuur 4 te zien is, en later een tweede, die 'verwant' is aan deze. Ook wist hij de optimale afmeting voor een bijna-rechtgeleiding van deze constructie te bepalen. (Zie de berekeningen met 'Tschebyschew-systemen' in [17, pp.203–209].)

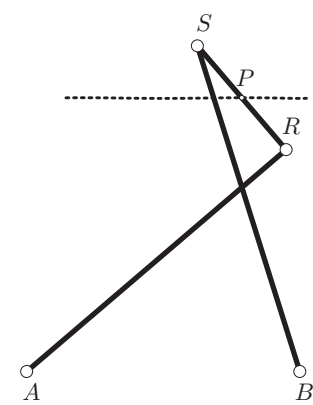
Een rechte lijn tekenen

Nu komen we aan Charles Nicolas Peaucellier en Yom Tov Lipman Lipkin en hun Peaucellier–Lipkin-stangenconstructie toe. Deze maakt gebruik van een basisconstructie, waarmee de spiegeling in een cirkel als volgt kan worden gerealiseerd. We nemen een stangenconstructie $PPFE$ met vier even lange stangen van lengte $b := |PE| = |EP'| = |P'F| = |FP|$ (een stangenruit) en verbinden twee tegenoverliggende hoekpunten E en F met twee even lange stangen van lengte $a := |OE|$, die langer zijn dan de stangen van de stangenruit. De andere einden van deze twee stangen fixeren we in een vast punt O in het vlak (Figuur 5).

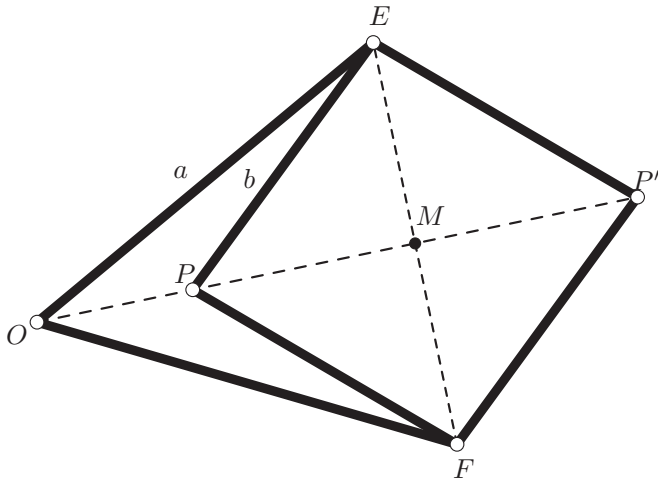
De positie van punt P bepaalt de positie van P' . De bewering is nu dat $|OP| \cdot |OP'|$ voor elke positie van P een constant getal is. Dat betekent dat P en P' elkaars gespiegelden in een zekere cirkel zijn. Een dergelijke stangenconstructie die in staat is vanuit een vast punt O voor elk punt P



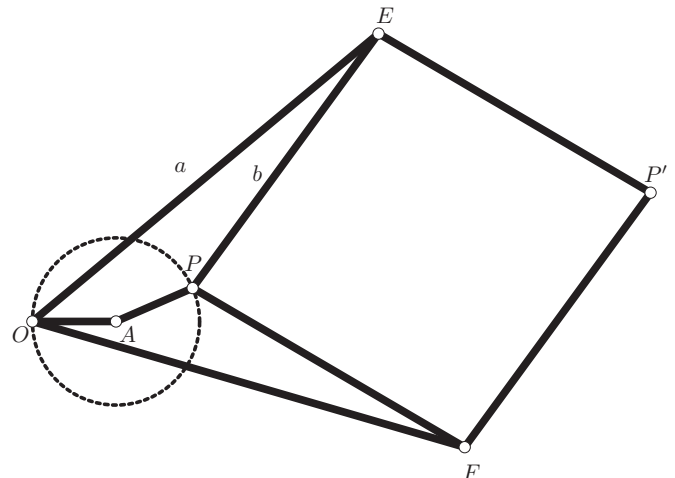
Figuur 3 Stangenconstructie van Richard Roberts.



Figuur 4 Stangenconstructie van Pafnuty Chebyshev.



Figuur 5 Een Peaucellier-Lipkin-inversor.



Figuur 6 Een Peaucellier-Lipkin-stangenconstructie voor een rechte lijn.

een punt P' aan te geven zodat $|OP| \cdot |OP'|$ constant is, heet een *inversor*. Bij een inversie in een cirkel rond O worden cirkels door O op rechte lijnen afgebeeld. De straal van de cirkel waarin wordt gespiegeld ligt in ons geval echter niet voor het oprapen. Hiervoor gebruiken we het volgende eenvoudige maar dikwijls handige lemma.

Lemma 1. Gegeven twee punten F_1 en F_2 en een derde punt L op de rechte lijn F_1F_2 . Wij noemen m de op F_1F_2 loodrechte lijn door L . Dan geldt voor een punt P :

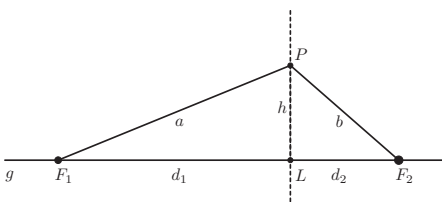
P ligt op m

$$\Leftrightarrow |PF_1|^2 - |PF_2|^2 = |LF_1|^2 - |LF_2|^2.$$

Bewijs. Wij noemen $a := |PF_1|$ en $b := |PF_2|$ en $d_1 := |LF_1|$ en $d_2 := |LF_2|$, zie Figuur 7. Er geldt: $a^2 = d_1^2 + h^2$ en $b^2 = d_2^2 + h^2$ waaruit volgt $a^2 - b^2 = d_1^2 - d_2^2$. $\square$

Kempe noemt de vorm $OFPE$ een *pijl-punt* en de vorm $OFFP'E$ een *vlieger* en concludeert dat $|OP| \cdot |OP'|$ constant en gelijk aan $|OF|^2 - |PF|^2$ is, oftewel dat het volgende geldt.

Stelling 1. Bij de Peaucellier-Lipkin-inversor zijn de punten P en P' elkaars *gespiegelden* aan de cirkel met straal $\sqrt{a^2 - b^2}$ rond het punt O .



Figuur 7

Bewijs. Noem $r := |OP|$ en $R := |OP'|$. Het boven aangetoonde Lemma 1 levert:

$$a^2 - b^2 = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2 = R \cdot r. \quad \square$$

De cirkelinversie aan de cirkel rond O met de straal $\sqrt{a^2 - b^2}$ beeldt een cirkel, die door O verloopt, af op een rechte lijn. Een dergelijke cirkel kunnen we maken als we het punt P dwingen op een vaste cirkel door O met straal a en met een middelpunt A te lopen. En dat is precies wat het Peaucellier-Lipkin-mechanisme doet.

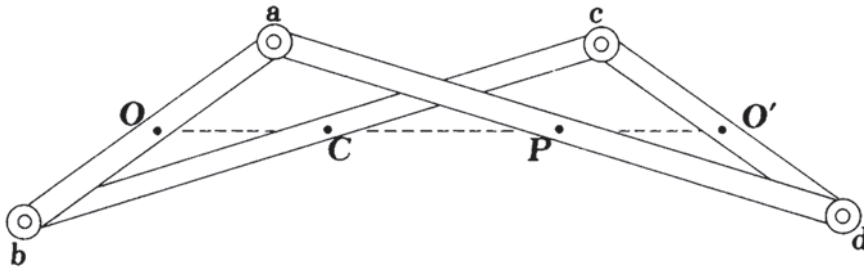
Stelling 2. Bij de Peaucellier-Lipkin-constructie doorloopt het punt P een recht lijnstuk.

Opmerking: De Eindhovense kunstenaar Ivo Schoofs heeft ter gelegenheid van het *Light art festival GLOW Eindhoven* een groot beeld gecreëerd, waarin de Peaucellier-Lipkin-stangenconstructie ingebouwd is. Het gaat om het beeld 'Just because you are a character, doesn't mean you have character', 2016, 22 m x 15 m x 16 m, 6600 kg (zie Figuur 8). Op ivoschoofs.com tref je een leuke video aan waarin hij vertelt hoe het beeld is ontstaan. Bij de vakantiecurus in Eindhoven was hij ook aanwezig.

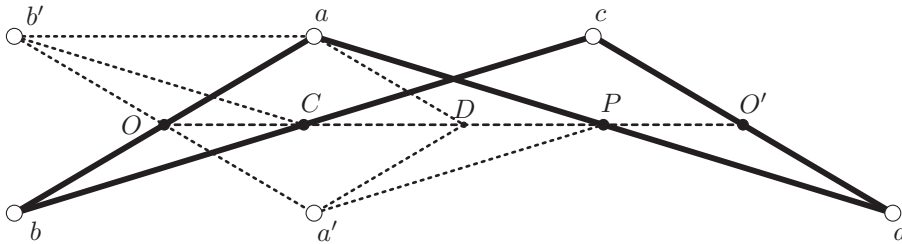
Een alternatieve aanpak voor de constructie van een rechte lijn is de naar Harry Hart (1848–1920) vernoemde *Hart inversor* en gevonden in het jaar 1874 [6,7]. Hij



Figuur 8 Kunstwerk 'Just because you are a character, doesn't mean you have character' van Ivo Schoofs.



Figuur 9 De inversor van Harry Hart, uit *How To Draw a Straight Line?* [10].



Figuur 10

heeft maar vier stangen in plaats van zes bij de Peaucellier–Lipkin-inversor. Wij ontdekken ook hier een *contra-parallelogram*. Voor het volgende nemen we de notatie over uit Figuur 9.

Stelling 3. Bij de Hart inversor zijn de punten C en P elkaars *gespiegelden* aan de cirkel met straal $\sqrt{|Pa|^2 - |Oa|^2}$ rond het punt O .

Bewijs. Zie Figuur 10. De driehoeken $\triangle bcd$ en $\triangle bad$ zijn congruent en hebben dus even grote hoeken en dezelfde hoogte op bd . Bovendien hebben ze dezelfde middenparallel evenwijdig aan bd . De punten $OCPO'$ liggen dus op een lijn s . Als we driehoek $\triangle OPa$ en de driehoek $\triangle OCb$ in s spiegelen, zo dat a op een punt a' en b op een punt b' terecht komt, dan zien we — net als bij Peaucellier–Lipkin — een pijlpunt $bCb'O$ en een vlieger $Oa'Pa$ ontstaan. Nu schuiven we het pijlpunt $bCb'O$ naar rechts, zodat C op P terecht komt.

Wij hebben dus dezelfde situatie als bij Peaucellier–Lipkin. Het is

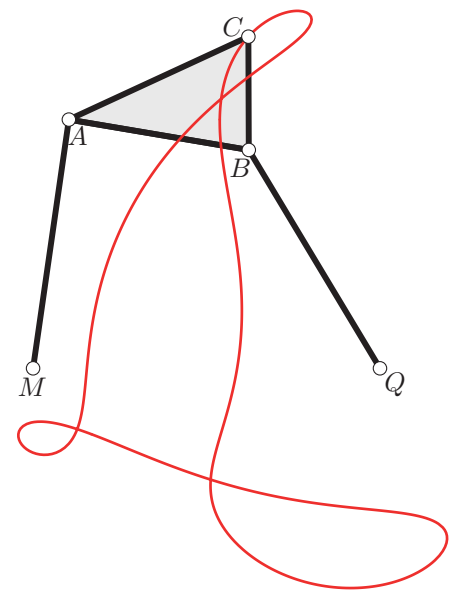
$$|PD| \cdot |PO| = |OC| \cdot |OP| = |Pa|^2 - |Oa|^2.$$

Deze term rechts is constant en daarmee is aangetoond, dat de constructie van Hart een inversor is. $\square$

Klassieke meetkunde van koppelkrommen

Alle voorgestelde bijna-rechteleijnoplossingen van Watt, Chebyshev en Roberts zijn voorbeelden van zogenaamde *koppelkrommen*. Een dergelijke constructie

bestaat uit een stangenvierzijde $MQBA$, waarbij de pivotpunten M en Q vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle ABC$ aan AB is vastgemaakt en star met AB meebeweegt. (Het Franse woord ‘pivot’ betekent zoiets als ‘draaipunt’. Zie de punten M en Q in Figuur 11.) Deze driehoek kan ook ontwaard zijn, dat wil zeggen dat C ook op de lijn AB mag liggen. De aan het vlak verbonden stang MQ heet *pivotstang*, de stang AB noemen we *koppelstang* en de door punt C getekende kromme, dat wil zeggen de meetkundige



Figuur 11 Een voorbeeld van een koppelkromme.

plaats van alle punten in het vlak, die door C bereikbaar zijn, heet *koppelkromme* met stangenvierzijde $MQBA$, pivotstang MQ en vaste driehoek $\triangle ABC$, zie Figuur 11. Al met al spreken we van een *koppelmechanisme*.

Koppelkrommen en pivotcirkel

Nu bestuderen we deze grote klasse van koppelkrommen. In toepassingen spelen deze krommen een belangrijke rol. In Figuur 12 zie je een voorbeeld van een lemniscaatkraan (uit [5]), een voorbeeld van een koppelmechanisme (meer informatie is te vin-

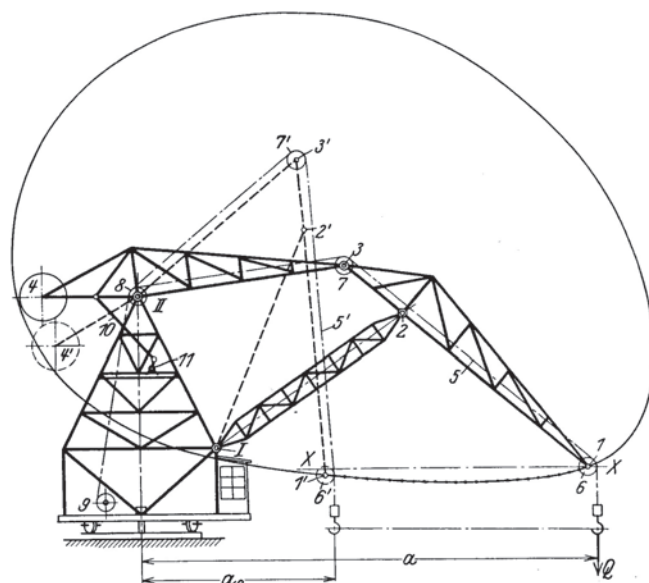
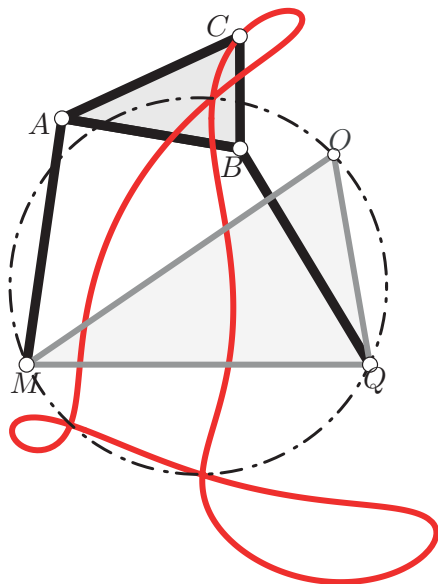


Abb. 882. Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker. (Demag.)
1–2–3 Ausleger; 1–2, II–3 Lenker; 4 Auslegergegengewicht; 5 Hubseil;
6 Auslegerrolle; 7–8 Umlenkrollen zu 5; 9 Hubtrommel; 10 Zugstangen, den
angetriebenen Lenker mit den Kurbeln 11 des Einziehwerks verbindend;
1–1' benutztes Stück der Lemniskate.

Figuur 12 Kraan met koppelkromme (lemniscaatsturing).



Figuur 13 Een koppelkromme en haar pivotcirkel.

den in [9]). In de jaren vijftig vervaardigden Hrones en Nelson een indrukwekkende atlas met ongeveer 10.000 koppelkrommen: een waar monnikenwerk [8]. (Koppelkrommen zijn delen van algebraïsche krommen van graad zes (zie [2, pp.152–154]), dat wil zeggen dat er een veelterm $\Phi(x,y)$ in twee variabelen van graad zes bestaat, zo dat alle punten $P = (x,y)$ op de koppelkromme voldoen aan $\Phi(x,y) = 0$. Wellicht is dit interessante informatie, maar het speelt voor ons hier op het moment verder geen rol.)

Een van de opmerkelijke eigenschappen van koppelkrommen is de ligging van hun dubbelpunten, zo die bestaan. Hiervoor kies je bij een gegeven koppelkromme een punt O zodat de driehoeken $\triangle MQO$ en $\triangle ABC$ gelijkvormig zijn. De omgeschreven

cirkel van $\triangle MQO$ heet de *pivotcirkel* van de koppelkrommenconstructie. Zie Figuur 13. In het boek van A.S. Hall [4] en vergelijkbare werken vinden we de stelling:

Stelling 4. *Bij een koppelkromme liggen alle dubbelpunten op de pivotcirkel en bij elk snijpunt van de kromme met de pivotcirkel hoort een dubbelpunt.*

Bewijs. Zie Figuur 14. Stel dat er een dubbelpunt op de koppelkromme ligt. Dan zijn er twee posities van de driehoek aan de koppelstang: $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ waarbij $C = C'$. Het vaste punt M moet nu ergens op de deellijn liggen van $\angle ACA'$, omdat MA oftewel MA' mogelijke posities van dezelfde stang zijn. Evenzo moet Q op de deellijn liggen van $\angle BCB'$. Hieruit volgt dat $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement $180^\circ - \angle ACB$. Als wij nu bij gegeven M en Q kijken naar de meetkundige plaats van alle punten S waarvoor $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement van $\angle ACB$, dan vinden wij — als gevolg van de stelling over de omtrekshoek — de pivotcirkel. Deze constructie kan moeiteloos worden omgedraaid om te bewijzen dat bij een punt van de koppelkromme op de pivotcirkel twee verschillende driehoeken en daarmee een dubbelpunt behoort. $\square$

Panto- en plagiografen

Om koppelkrommen nog beter te begrijpen, kijken we naar twee basisconstructies. De eerste daarvan is de sinds het begin van de zeventiende eeuw bekende *pantograaf* [15]. Het is een gereedschap om tekeningen uit te vergroten, dat bestaat uit een parallellogram $PABC$, waarbij de zijden CB en AB

op een dergelijke manier verlengd zijn dat minstens in één stand O , P en P' op een lijn liggen. Het mechanisme wordt met het punt O aan het vlak verbonden (Figuur 16).

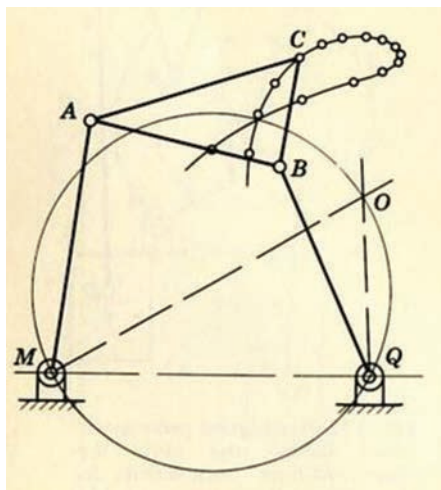
Stelling 5. *Voor elke stand liggen O , P en P' op een rechte lijn. En verder geldt voor het vaste getal $\lambda = \frac{|OB|}{|OC|}$ en elke stand van P , dat $|OP'| = \lambda |OP|$.*

Bewijs. Het bewijs berust direct op de gelijkvormigheid van de driehoeken $\triangle OP'B$ en $\triangle OPC$. $\square$

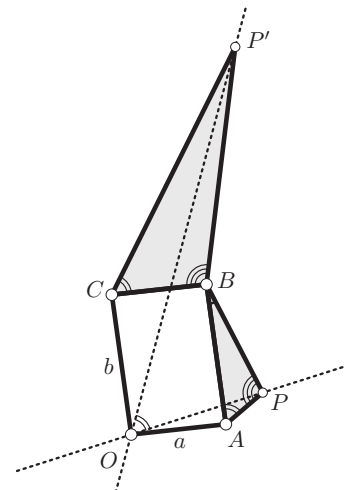
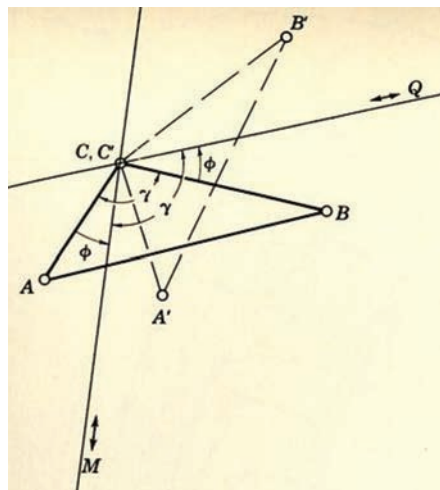
Een veel minder bekende veralgemenisering van de pantograaf is de zogenaamde *plagiograaf* (Figuur 15). Dat is een stangenconstructie bestaande uit een parallellogram $OABC$, waarbij O aan het vlak is vastgemaakt, en driehoeken $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ met punten P en P' , die vast aan de zijden AB en BC zijn verbonden. De driehoeken $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ zijn gelijkvormig en op dezelfde manier georiënteerd, zodat $\angle PAB = \angle BCP'$ is. De plagiograaf wordt ook in het boek van Kempe beschreven en hij vertelt [10, pp. 26–28] dat het gaat om een uitvinding van James Joseph Sylvester (1814–1897), die haar *Plagiograph* of *Skew Pantagraph* noemde.

Stelling 6. *Voor de boven beschreven plagiograaf is de afbeelding, die een punt P op een P' afbeeldt, een draaistrekking met strekfactor $\lambda := \frac{|AB|}{|AP|}$ vanuit het punt O met draaihoek $\theta := \angle PAB = \angle BCP'$.*

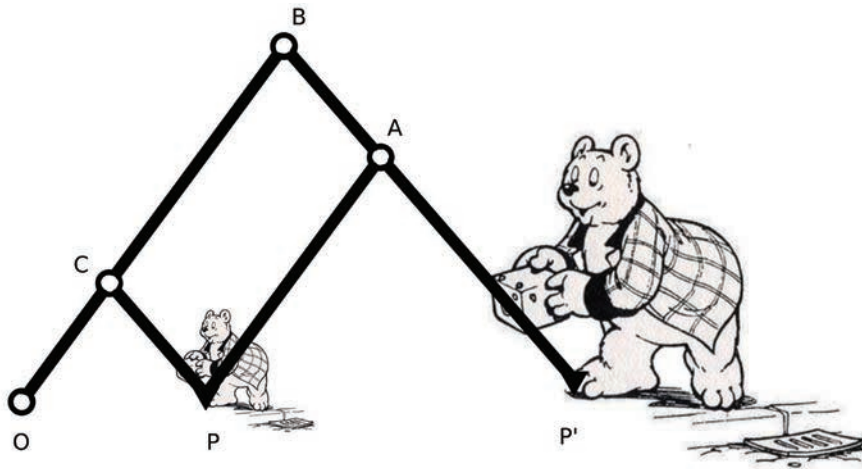
(Een draaistrekking is een draaiing rond O met hoek θ gevolgd door de vermenigvuldiging vanuit O met factor λ .)



Figuur 14 Definitie van een pivotcirkel en bewijsschets bij Stelling 4 (uit het boek van A.S. Hall [4]).



Figuur 15.



Figuur 16 Met een pantograaf kan een tekening worden uitvergroot.

Bewijs. De hoeken $\angle OCP'$ en $\angle PAO$ zijn gelijk omdat $\angle OCB$ en $\angle BAO$ gelijk zijn. De gelijkvormigheid van $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ impliceert

$$\frac{|AP|}{b} = |AP| : |AB| = |BC| : |CP'| = \frac{a}{|CP'|}.$$

Dus is $|AP| : a = b : |CP'|$. Hierdoor zijn ook de driehoeken $\triangle OP'C$ en $\triangle OAP$ omgekeerd georiënteerd gelijkvormig. Het is dus een strekking met een strekfactor van $\lambda = \frac{|AB|}{|AP|}$, dat wil zeggen de verhouding van de benen van de hoek θ , waarvan we nu laten zien dat het de draaihoek is. Noem $\alpha := \angle AOP = \angle CP'O$ als ook $\beta := \angle OPA = \angle P'OC$. De twee hoeken van het parallellogram $\varphi = \angle OCB$ en $\psi = \angle AOC$ voldoen aan $180^\circ = \varphi + \psi$. We vinden voor de draaihoek

$$\begin{aligned} \theta &= \psi - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \varphi \\ &= \angle PAB = \angle BCP'. \end{aligned} \quad \square$$

De door deze stelling gegeven afbeelding die P op P' afbeeldt is op zulke punten P in het vlak beperkt, die door de stangenconstructie kunnen worden bereikt. Maar de afbeelding kan op een unieke manier op het hele vlak worden uitgebreid tot de draaistrekking rond O met draaihoek θ en strekfactor λ , die we Φ_O noemen. Omdat een dergelijke afbeelding Φ een gelijkvormigheidsafbeelding is, geldt in het bijzonder dat zij lijnen op lijnen en cirkels met hun middelpunten op cirkels met de bijbehorende middelpunten afbeeldt.

Een mooie bron voor de inzet van pantograaf en plagiograaf in het wiskunde-onderwijs is het boek van Mareike Mink, *Geometrie entdecken in technischen Anwendungen – Lernumgebungen für MINT-Unterricht mit Alltagsbezug* [12].

Opmerking: Ook de loopconstructie van Theo Jansen getiteld 'The Legsystem. Invented in 1991, a system based on the thirteen holy numbers' in Figuur 17 geeft aanleiding voor een plagiograaf in een koppelmechanisme – althans als wij het schijnbare parallellogram tot een echte parallellogram maken. De loopbaan van de voet is door deze verandering echter wel aanzienlijk minder geschikt om over obstakels te lopen dan de originele constructie van Jansen.

Koppelkrommen en hun verwanten

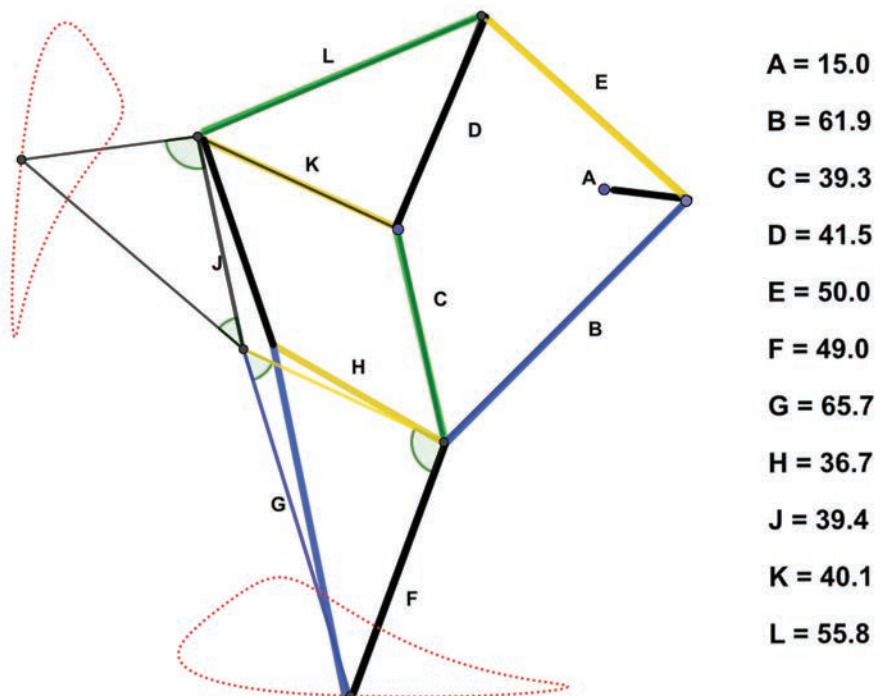
Alleen met elementaire meetkunde be-
wezen Roberts en Chebychev over zulke

koppelkrommen onafhankelijk van elkaar de volgende verrassende stelling (vergelijk [18], of zie ook [16]).

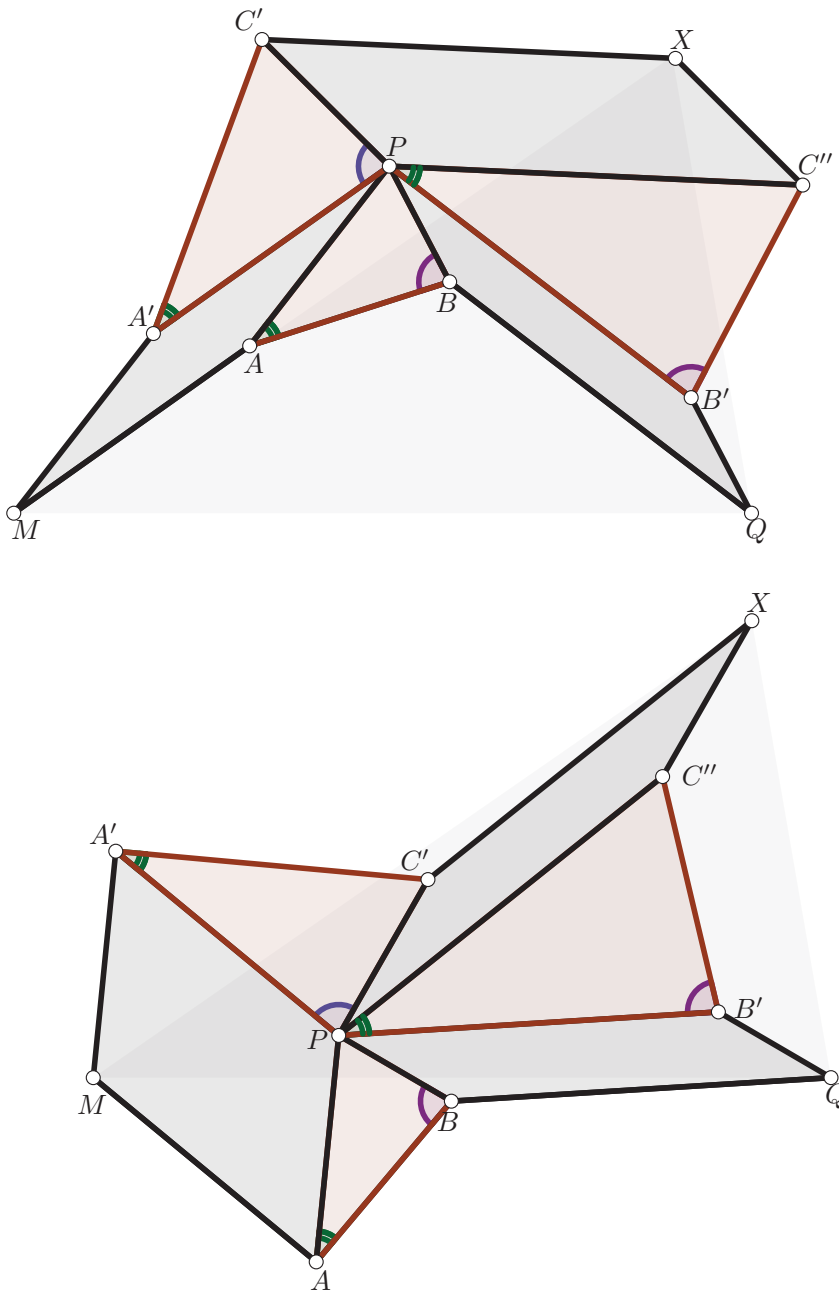
Stelling 7 (Roberts–Chebychev). *Voor een gegeven koppelkromme bestaan er drie koppelmechanismen, die deze koppelkromme voortbrengen.*

Deze drie koppelmechanismen worden *verwant* ('cognate') genoemd. Voor het bewijs is essentieel dat er in de constructie van Figuur 18 uiteindelijk een drietal plagiografen zitten. Wij kijken eerst naar de twee plagiografen met vast punt in M en in Q . Er is telkens een parallellogram met een hoekpunt in M respectievelijk Q en de driehoeken zijn dan juist die twee van de drie driehoeken, die allemaal gelijkvormig zijn met $\triangle ABP$ en aan dat parallellogram grenzen. Wij noemen $a := |BP|$, $b := |AP|$ en $c := |AB|$ als ook $\alpha := \angle BAC$ en $\beta := \angle PBA$. Voor M en Q hebben we dus

- ... de plagiograaf met centrum M . De bijbehorende (op het hele vlak uitgebreide) afbeelding Φ_M is een draaistrekking met draaihoek α en strekfactor $\lambda_M = \frac{b}{c}$ en beeldt B af op C' ,
- ... de plagiograaf met centrum Q . De bijbehorende (op het hele vlak uitgebreide) afbeelding Φ_Q is een draaistrekking met draaihoek β en strekfactor $\lambda_M = \frac{a}{c}$ en beeldt A af op C'' .



Figuur 17 Licht veranderd benenstelsel van Theo Jansens strandbeesten met een geplagiografeerde (maar minder optimale) loopbaan.



Figuur 18 Een koppelmechanisme heeft drie verwante koppelmechanismen.

Bewijs. Voor het bewijs laten we zien dat het punt X een vast punt bij de beweging is. Voor een moment laten we de stangen $C'X$ en $C''X$ uit de constructie weg omdat noch Φ_M noch Φ_Q deze stangen nodig hebben. Dan merken we op dat Φ_M het punt Q afbeeldt op een punt X , waarvoor geldt dat $\angle QMX = \alpha$ en $|XM| : |XQ| = \frac{b}{c}$. Tegelijkertijd geldt ook dat Φ_Q het punt M afbeeldt op een punt X' , waarvoor geldt dat $\angle XQM = \beta$ en $|XQ| : |MQ| = \frac{a}{c}$. Zowel X als ook X' zijn hierdoor gekarakteriseerd. Op grond van gelijkvormigheid geldt $X = X'$.

De lengtes a , b en c als ook de lengtes $|MA|$ en $|QB|$ bepalen via gelijkvor-

migheid alle verdere lengtes van de constructie. Hieruit volgt $|PC''| = \frac{b}{c} |QB|$ en $|PC'| = \frac{a}{c} |QB|$. Nu beeldt Φ_M de cirkel rond Q met straal $|QB|$ af op de cirkel rond X met straal $|XC'|$. En in het bijzonder wordt B op C' op deze cirkel afgebeeld. Dus is $|C'X| = \frac{b}{c} |QB| = |PC''|$.

Φ_Q beeldt de cirkel rond M met straal $|MA|$ af op de cirkel rond X met straal $|XC''|$. En in het bijzonder wordt A op C'' op deze cirkel afgebeeld. Dus is $|C''X| = \frac{a}{c} |QB| = |PC'|$. Daarmee is $PC''XC'$ een parallelogram en X is het eerder geconstrueerde punt. Dit punt blijft dus vast staan als de rest beweegt. $\square$

Nu dat we weten, dat bij elk koppelmechanisme twee verwante koppelmechanismen horen, die dezelfde koppelkromme voortbrengen, zou je kunnen denken, dat je bij elk van deze koppelmechanismen de pivotcirkel kunt tekenen en zodoende de dubbelpunten op de snijpunten van deze cirkels moeten liggen. Bij nader inzien echter zien we dat bij elk van de drie koppelmechanismen de pivotcirkel dezelfde is: het is altijd de omschreven cirkel om de driehoek $\triangle MQX$.

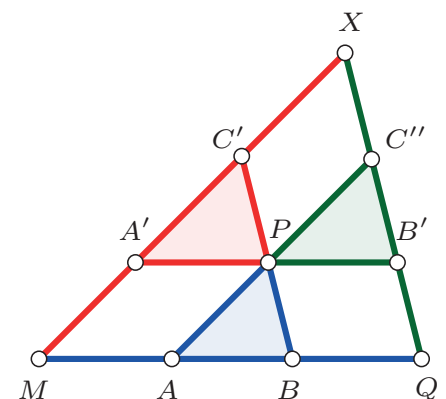
Verwante koppelmechanismen

In de stelling van Roberts en Chebychev is gebleken, dat we bij elke stangenconstructie nog twee andere zulke constructies kunnen vinden, die dezelfde kromme voortbrengen. Dit willen we nu in concrete gevallen bekijken.

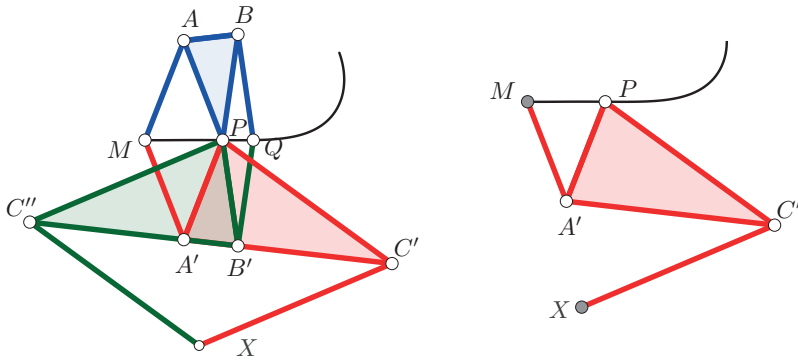
Hiervoor beschouwen we algemene koppelmechanismen. Dus gaan we weer uit van een stangenvierhoek $MQBA$, waarbij M en Q vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle ABC$ aan AB is vastgemaakt en star met AB meebeweegt. Alle andere lijnstukken en punten van het gehele plaatje met de drie koppelmechanismen vinden we door eenduidig bepaalde lijnen. Daarbij houden we schematisch het patroon aan dat in Figuur 19 getoond wordt, een zogenaamd *Cayley-diagram*.

De constructie van Roberts voor een bijna-rechte lijn heeft twee verwante constructies, die elkaars gespiegelden zijn. De constructie gaat vanzelf als desbetreffende driehoeken gelijkvormig gekopieerd en de parallelogrammen volgens het schema gecompleteerd worden (zie Figuur 20).

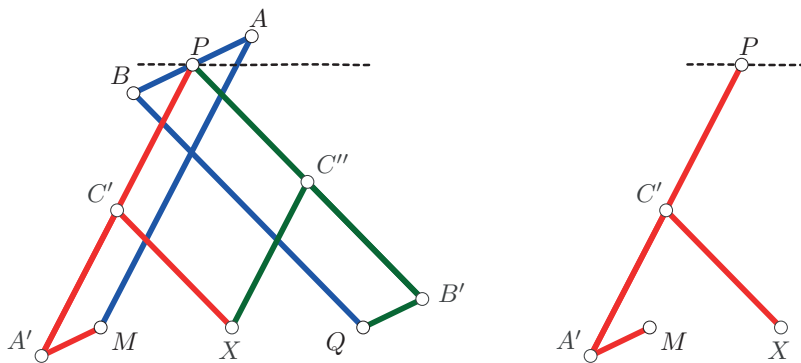
Ook het voorbeeld van Chebychev van een bijna-rechthoekconstructie was een koppelmechanisme en de vraag is, wat zijn twee verwante mechanismen zijn?



Figuur 19 Cayley-diagram.



Figuur 20 De verwante koppelmechanismen bij de bijna-rechthoekconstructie van Roberts.



Figuur 21 De verwante koppelmechanismen bij de bijna-rechthoekconstructie van Chebyshev.

Hierbij is de driehoek $\triangle ABP$ ontwaard, dat wil zeggen dat P ook op de lijn AB ligt. Gaan we ook hier het boven beschreven procedé volgen, dan verkrijgen we de constructie in Figuur 21.

De ‘Chebyshev-schommelconstructie’ is dus verwant met een ‘kraanconstructie’ oftewel ‘ λ -mechanisme’. Zulke kranen hebben de eigenschap dat er een einde op een vrijwel rechte lijn beweegt.

De beroemde looppomp van Chebyshev berust op deze verwante constructie, waarvan voor het *MathFilm festival 2008* een prachtig geanimeerde film werd gemaakt [1]. In deze film wordt ook herkenbaar dat de snelheden van de draaiende kruk en van de bijna-rechte beweging enigszins evenredig zijn.

In de volgende bijdrage bestuderen we in het bijzonder hoe bekende krommen zoals kegelsneden en andere algebraïsche krommen door stangenconstructies kunnen worden geconstrueerd en beantwoorden uiteindelijk de vraag welke krommen überhaupt door een stangenconstructie te tekenen zijn. ☞

Referenties

- 1 Nikolai Andreev (reg.), Die Laufmaschine von Chebyshev, 2 min, in *MathFilm 2008 DVD – Eine Sammlung mathematischer Kurzfilme*, 60 min, K. Polthier, M. Aigner, T. Apostol, M. Emmer, H. C. Hege, U. Weinberg (eds.), Springer, 2008, <http://www.mathfilm2016.de/2008-15>.
- 2 Rudolf Beyer, *Kinematische Getriebesynthese – Grundlagen einer quantitativen Getriebelehre ebener Getriebe*, Springer, 1953.
- 3 Simona-Mariana Cretu, Gigi-Dragos, Cioici-Troaca Emil Soarece en Eugen Marian Paun, Mechanical models for anti-rhomb linkage, in Teun Koetsier and Marco Ceccarelli (eds.), *Explorations in the History of Machines and Mechanisms, Proceedings of HMM 2012*, Springer, 2012.
- 4 A.S. Hall, *Kinematics and Linkage Design*, Prentice-Hall, 1961.
- 5 R. Hänchen, *Winden und Krane, Aufbau, Berechnung und Konstruktion*, Springer, 1932.
- 6 H. Hart, On certain conversions of motion, in *Messenger of Mathematics*, N.S. Vol. 4, 1875, pp. 82–88, 97–100.
- 7 H. Hart, A parallel motion, in *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 6, 1874–1875, pp. 137–139.
- 8 J.A. Hrones en G.L. Nelson, *Analysis of the Four-Bar Linkage, I and II*, The Technology Press of MIT and Wiley, 1951.
- 9 R. Kaenders, Lemniscaten en kranen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8(2) (2007), 112–118.
- 10 Alfred Bray Kempe, *How To Draw A Straight Line: A Lecture On Linkages*, 1877. Herdruk Kessinger Publishing, 2010.
- 11 Lipman Lipkin, Dispositif articulé pour la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en mouvement rectiligne, *Revue Univers. des Mines et de la Métallurgie de Liège* 30(4) (1871), 149–150.
- 12 Mareike Mink, *Geometrie entdecken in technischen Anwendungen – Lernumgebungen für MINT-Unterricht mit Alltagsbezug*, Springer-Spektrum, 2018.
- 13 C.N. Peaucellier, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 21ème Serie 3 (1864), 414–415.
- 14 C.N. Peaucellier, *Mémoires de l'Officier du Génie* 25 (1876), 369–389.
- 15 C. Scheiner, *Pantographice seu Ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum*, Rome, 1631.
- 16 John J. Uicker, Gordon R. Pennock en Joseph E. Shigley, *Theory of Machines and Mechanisms*, Oxford University Press, 2003.
- 17 G.R. Veldkamp, *Kinematica*, Serie Mechanica (2), Scheltema & Holkema, 1970.
- 18 Egbert Verstraten, Cognate linkages the Roberts–Chebyshev Theorem, in: Teun Koetsier and Marco Ceccarelli (eds.), *Explorations in the History of Machines and Mechanisms, Proceedings of HMM 2012*, Springer, 2012.
- 19 Robert C. Yates, *Curves and Their Properties*, Classics in Mathematics Education A Series, Volume 4, National Council for Teachers of Mathematics, 1974.