Johan Commelin
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
jmc@math.uni-freiburg.de

Onderzoek

Liquid Tensor Experiment

Het *Liquid Tensor Experiment* betreft een project om de in 2019 door Dustin Clausen en Peter Scholze bewezen hoofdstelling van liquide vectorruimtes met behulp van een computer te verifiëren. In de achterliggende maanden heeft een team van wiskundigen dit project grotendeels afgerond. Johan Commelin vertelt in dit artikel wat het project inhoudt.

Op 5 November 2020 schreef Peter Scholze een blogpost [8, 9] op de weblog van het Xenaproject van Kevin Buzzard. In deze blogpost poneerde hij een uitdaging om recent werk in de liquide wiskunde met behulp van een computer formeel te verifiëren. Een divers team wiskundigen, waaronder ikzelf, is deze uitdaging aangegaan.

Liquide wiskunde [6] is een deelgebied van gecondenseerde wiskunde [7], wat op zichzelf een nieuw vakgebied in de wiskunde is. Deze wiskunde is in de afgelopen jaren door Dustin Clausen en Peter Scholze ontwikkeld. Liquide wiskunde beoogt technieken uit de homologische algebra beschikbaar te maken in de functionaalanalyse. Ze baseert zich daarbij op een fundamentele stelling over de reële getallen, die met recht de hoofdstelling van de liquide wiskunde genoemd mag worden. Het bewijs van deze stelling is gecompliceerd en maakt gebruik van nieuwe technieken. Scholze schrijft hierover: "I spent much of 2019 obsessed with the proof of this theorem, almost getting crazy over it. In the end, we were able to get an argument pinned down on paper, but I think nobody else has dared to look at the details of this, and so I still have some small lingering doubts." [9]

Vanwege de fundamentele plaats van deze stelling in het werk van Clausen en Scholze en de mogelijke toepassingen die liquide wiskunde in de toekomst kan vinden binnen andere vakgebieden van de wiskunde, was er veel aan gelegen ook het laatste spoortje twijfel weg te nemen. In de woorden van Scholze: "I think this may be my most important theorem to date. (It does not really have any applications so far, but I'm sure this will change.) Better be sure it's correct…" [9] Computer-gecontroleerde bewijzen kunnen de zekerheid bieden die hier nodig is.

In dit artikel bespreek ik eerst wat computerbewijzen zijn. Vervolgens geef ik een zeer beknopte uitleg over liquide wiskunde. Dit hoofdstuk is vrij technisch, maar de details zijn niet essentieel voor de rest van het artikel. Ten slotte geef ik een overzicht van wat het Liquid Tensor Experiment heeft bereikt.

Liquid Tension Experiment

De naam van het project is een verwijzing naar de progressieve rockband *Liquid Tension Experiment*, waar Peter Scholze en ik beiden fan van zijn. Deze band bracht in 1998 en 1999 twee albums uit, waarna een radiostilte volgde van ruim twintig jaar.

Op 14 december 2020, minder dan tien dagen na het verschijnen van Scholze's eerste blogpost [9], kondigde de band op Twitter hun album *Liquid Tension Experiment 3* aan. Dit album verscheen in april 2021 en bevat onder andere een bonusnummer met de titel 'View from the Mountaintop'. Scholze schrijft in zijn tweede blogpost: "It feels like the main theorem is some high plateau with a wonderful view, but the way there leads through a large detour, to attack the mountain from the other side, where it is dark and slippery, and one has to climb up a certain steep wall; and no other pathways are seen left or right." [5] Nog enkele titels uit dit album die opvallend goed bij het Liquid Tensor Experiment passen, zijn: 'Beating the Odds', 'Liquid Evolution' en 'Solid Resolution Theory'.

Computerbewijzen

Het meeste wiskundige onderzoek wordt gedaan in de klassieke stijl: met een doos krijtjes bij het bord, of met pen en papier. Dit zijn beproefde hulpmiddelen om gedachten te ordenen, vast te leggen en te delen. In de laatste decennia zijn er echter ook speciale wiskundige computerprogramma's ontwikkeld. Naast de computeralgebra-pakketen die voor allerlei berekeningen geschikt zijn, zijn er ook programma's die in staat zijn om wiskundige definities, stellingen en bewijzen te lezen en te controleren. Daarvoor moet die wiskunde wel in een speciale wiskundige computertaal geschreven worden. De taal die we gekozen hebben voor het Liquid Tensor Experiment heet Lean.

Vogelvlucht door de geschiedenis

De Nederlandse wiskundige N.G. de Bruijn heeft na zijn fundamentele onderzoek in de analyse en getaltheorie een voortrekkersrol genomen in het onderzoek naar computerprogramma's die wiskundige bewijzen verifiëren. In Eindhoven ontwikkelde hij het programma *Automath* en in 1975 voltooide zijn student L.S. van Benthem Jutting de Automath-vertaling van Landau's *Foundations of Analysis*.

In de daaropvolgende decennia zijn vele andere systemen ontwikkeld, met hun eigen accenten en variaties. Sommige systemen (met name Mizar en Isabelle/ZF) zijn gebaseerd op verzamelingenleer, andere kiezen, geïnspireerd door de theorie van programmeertalen, voor type-theoretische fundamenten (Coq, Isabelle/HOL, Lean). Het ene systeem kiest voor snelheid (Metamath), het andere legt de focus op leesbaarheid (Naproche). Voor een verdere vergelijking van al deze systemen verwijs ik graag naar het werk van Freek Wiedijk [11]. Naar mijn mening is de nieuwkomer Lean een zorgvuldig gebalanceerd systeem dat het best bruikbaar is voor wiskundigen.

In deze systemen zijn al meerdere noemenswaardige wiskundige resultaten geverifieerd: de priemgetalstelling, de vierkleurbaarheidsstelling, de Feit–Thompsonstelling (iedere eindige groep met oneven orde is oplosbaar), het bewijs van Hales van het Keplervermoeden, en de onafhankelijkheid van de continuümhypothese. Voor verdere informatie, zie [1, 2].

Lean

Lean is een functionele programmeertaal met speciale ondersteuning voor proposities en bewijzen. Het brein achter Lean is Leonardo de Moura, een onderzoeker van Microsoft Research [4]. Hij heeft Lean steeds verder ontwikkeld, en inmiddels met versie 4 een stabiele en bijzonder goed voor wiskunde bruikbare taal beschikbaar gesteld.

Om Lean (of een willekeurig andere wiskundige computertaal) te kunnen gebruiken, is ook een bibliotheek nodig van wiskundige stellingen en bewijzen, die vervolgens gebruikt kunnen worden als bouwsteen om complexere stellingen te formuleren en bewijzen te formaliseren. De wiskundige bibliotheek van Lean heet mathlib [10]. Rondom Lean en mathlib is een levendige gemeenschap van wiskundigen en informatici ontstaan [12]. In het jaar 2020 hebben ruim honderd mensen de inhoud van de mathlib-bibliotheek verdubbeld naar bijna 500 000 regels wiskundecode. De gemeenschap houdt ook een overzicht bij van de wiskunde die in een doorsnee bachelorcurriculum behandeld wordt en die in mathlib beschikbaar is [13].

Potentiële toepassingen van een digitale wiskundige bibliotheek

- Stellingen en bewijzen worden tot in de kleinste details gecontroleerd door de computer. Er kunnen daardoor geen foutjes in de bewijzen sluipen.
- Er kunnen specialistische zoekmachines gemaakt worden die onderzoekers helpen bij het vinden van resultaten. Voorbeelden hiervan zijn Sledgehammer voor Isabelle en `library_search` voor Lean.
- Computers kunnen zelf op zoek gaan naar bewijzen. Dit is een vakgebied dat volop in ontwikkeling is, en waar interessante resultaten worden geboekt. Voorlopig zal het nog wel even duren voordat wiskundigen hun baan kwijtraken aan computers, want de beste computerprogramma's kunnen nog niet tippen aan een eerstejaars wiskundestudent. Maar soms gaan ontwikkelingen sneller dan verwacht. Zo had niemand verwacht dat computers de wereldkampioen Go zouden verslaan toen dat in 2016 toch ineens gebeurde. Ook nu al kan de computer een heel nuttige bijdrage leveren door allerlei kleine tussenstapjes in te vullen en daarbij de wiskundige achter het toetsenbord wat werk uit handen te nemen.
- Wiskundige publicaties kunnen focussen op het uitleggen van intuïtie en de grote patronen, en kunnen voor de precieze details verwijzen naar deze computer-gecontroleerde bewijzen.

Oneindig veel priemgetallen in Lean

Bij wijze van voorbeeld geven we hier een Lean-bewijs van de aloude stelling van Euclides dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

```
theorem (n : ℕ) : ∃ p > n, p.prime :=
begin
  let N := n! + 1,
  let p := nat.min_fac N, -- the minimal prime factor, if N ≠ 1
  have : n! > 0 := by library_search,
  have : N > 1 := by library_search,
  have : N ≠ 1 := by library_search,
  have : p.prime := by library_search,
  have : p > n,
  { by_contra' : p ≤ n,
    have : ¬p ∣ 1 := by library_search,
    have : p ∣ n! := by library_search,
    have : p ∣ N := by library_search,
    have : p ∣ 1 := by library_search,
    contradiction },
  finish,
end
```

Het bewijs is opgebroken in kleine stapjes. Lean is in staat om met behulp van een zoekactie door de bibliotheek te laten zien dat iedere tussenstap volgt uit de voorgaande claims.

Liquide wiskunde

Gecondenseerde wiskunde

Gecondenseerde wiskunde biedt een algebraïsch alternatief voor topologie. Vanuit een categorie-theoretisch oogpunt levert dit veel voordelen op. Zo is bijvoorbeeld de categorie van topologische abelse groepen geen abelse categorie: als $\mathbb{R}^\delta$ de verzameling van reële getallen met de discrete topologie aanduidt, dan is de identiteitsafbeelding $\mathbb{R}^\delta \to \mathbb{R}$ een continu homomorfisme met triviale kern en cokern, maar het is geen isomorfisme. Daarentegen is de categorie van gecondenseerde abelse groepen wel een abelse categorie met zeer goede eigenschappen. (Gecondenseerde verzamelingen/groepen/ringen worden 'geïmplementeerd' als schoven van verzamelingen/groepen/ringen voor de pro-étale Grothendiecktopologie op de categorie van pro-eindige verzamelingen. Voor dit artikel volstaat het om over gecondenseerde objecten na te denken als 'objecten met een topologisch sausje'.)

Abelse categorieën zijn van cruciaal belang in de homologische algebra, die op haar beurt een belangrijk gereedschap vormt in hedendaagse getaltheorie en algebraïsche meetkunde. Gecondenseerde wiskunde opent de gereedschapskist van de homologische algebra voor objecten die topologisch van aard zijn, zoals bijvoorbeeld topologische vectorruimtes over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, maar ook over meer exotische lichamen zoals de p-adische getallen $\mathbb{Q}_p$. Voor een topologische ring R vormen gecondenseerde R-modulen in het algemeen een goed algebraïsch analogon van topologische R-modulen.

Om de volledige slagkracht van de homologische algebra te benutten, moet er echter ook een tensorproduct van gecondenseerde R-modulen zijn dat zich 'goed' gedraagt. Typisch is het wenselijk dat het tensorproduct van 'complete' objecten zelf ook 'compleet' is, en dit is voor het naïeve tensorproduct niet het geval. In de functionaalanalyse is het topologische tensorproduct een notoir lastig concept. Grothendieck heeft er zijn proefschrift [3] over geschreven, waarin hij nucleaire ruimtes introduceerde. Vergeleken met algemenere lokaal-convexe topologische vectorruimtes hebben nucleaire ruimtes als voordeel dat er een 'canoniek' tensorproduct van nucleaire ruimtes is.

Analytische ringen

Gecondenseerde wiskunde beantwoordt al deze subtiliteiten met het concept *analytische ring* [7, §7]. Een analytische ring $\mathcal{A}$ bestaat uit een onderliggende gecondenseerde ring $\underline{\mathcal{A}}$, samen met een axiomatische notie van 'vrije, complete' $\mathcal{A}$-modulen. Voor de resulterende notie van $\mathcal{A}$-modulen is er een goed 'gecompleteerd' tensorproduct. Men kan vervolgens aan iedere commutatieve ring R een 'discrete' analytische ringstructuur toekennen. Op natuurlijke wijze hebben p-adische ringen als $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Q}_p$ (en veel algemener *Huberringen*) een analytische ringstructuur die hun p-adische topologie weerspiegelt.

Analytische ringen stapelen een flinke dosis abstractie bovenop de toch al abstracte gecondenseerde wiskunde. Gelukkig is er een belangrijke stelling die grip geeft op de categorie van $\mathcal{A}$-modulen. Stelling 7.5 van [7] toont aan dat $\mathcal{A}$-modulen een volle deelcategorie vormen van de categorie van gecondenseerde $\underline{\mathcal{A}}$-modulen, die gesloten is onder alle limieten, colimieten en extensies. Vrij gezegd, betekent dit dat vrijwel iedere constructie van $\underline{\mathcal{A}}$-modulen die toegepast wordt op $\mathcal{A}$-modulen, zelf weer een $\mathcal{A}$-moduul oplevert.

De reële getallen

Voor discrete ringen en voor p-adische ringen bestaan er dus analytische ringstructuren. De hoofdstelling van liquide vectorruimtes [6, Stelling 6.5] toont aan dat ook de reële getallen een analytische ringstructuur toelaten die de gebruikelijke topologie op $\mathbb{R}$ weerspiegelt. Hierbij moet meteen worden opgemerkt dat deze liquide analytische ringstructuur afhangt van een reële parameter $0 < p \leq 1$, en dat er dus oneindig veel analytische ringstructuren op $\mathbb{R}$ bestaan. De modulen over deze analytische ringen noemen we p-liquide vectorruimtes. Iedere p-liquide vectorruimte is tevens p'-liquide, voor alle $0 < p' \leq p$.

Op een natuurlijke manier kunnen Banachruimtes en nucleaire Fréchetruimtes opgevat worden als p-liquide vectorruimtes, voor alle $0 < p \leq 1$. Vanwege bovengenoemde stelling 7.5 van [7] zijn dus ook alle producten, sommen, en algemener limieten, colimieten en extensies van dergelijke objecten opnieuw p-liquide vectorruimtes. Er zijn bijvoorbeeld extensies van Banachruimtes die zelf geen Banachruimte zijn, maar die dus wel p-liquide zijn.

Voor alle p is het p-liquide tensorproduct compatibel met het topologische tensorproduct van nucleaire vectorruimtes. Anderzijds is het p-liquide tensorproduct niet compatibel met de klassieke tensorproducten van Banachruimtes. Tevens is voor $p' < p$ het p'-liquide tensorproduct in het algemeen niet compatibel met het p-liquide tensorproduct.

Analytische meetkunde

In de algebraïsche meetkunde kent men aan iedere commutatieve ring A een affien schema toe, het spectrum Spec(A). Deze affiene schema's kunnen vervolgens aan elkaar gelijmd worden tot algemene schema's. Op analoge wijze kan men aan iedere commutatieve analytische ring $\mathcal{A}$ een analytisch spectrum AnSpec(A) toekennen. En deze analytische spectra kunnen vervolgens aan elkaar gelijmd worden tot *analytische ruimtes*.

Deze nieuwe meetkundige wereld generaliseert veel klassieke meetkundige concepten. Allereerst kan ieder schema opgevat worden als analytische ruimte, omdat elke ring een discrete analytische ringstructuur heeft. Daarnaast vormen ook objecten uit de p-adische meetkunde, zoals adische ruimtes (en in het bijzonder perfectoïde ruimtes) voorbeelden van analytische ruimtes. Ten slotte maakt de hoofdstelling van liquide vectorruimtes het mogelijk om ook meetkundige objecten over $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ als analytische ruimte op te vatten. Voorbeelden hiervan zijn differentieerbare variëteiten over $\mathbb{R}$, of holomorfe variëteiten over $\mathbb{C}$.

Clausen en Scholze laten zien dat deze nieuwe technieken leiden tot beknopte bewijzen van klassieke resultaten als coherente dualiteit voor schema's, Serredualiteit en eindigheid van coherente cohomologie voor compacte complexe variëteiten, en het vergelijkingsisomorfisme tussen algebraïsche en analytische De Rham-cohomologie. Voor al deze bewijzen geldt dat de complexiteit van het bewijs verpakt wordt in de machinerie van analytische ringen: het eigenlijke bewijs laat zich reduceren tot een eenvoudige berekening over $\mathbb{Z}$ of de eenheidsschijf in $\mathbb{C}$.

Dit ondersteunt de claim dat de hoofdstelling van liquide vectorruimtes een krachtige 'black box' is. Scholze schrijft: "With this theorem, the hope that the condensed formalism can be fruitfully applied to real functional analysis stands or falls. I think the theorem is of utmost foundational importance, so being 99.9% sure is not enough." [9]

Het experiment

De uitdaging van Scholze is om de volgende stelling met behulp van een computer te verifiëren.

Stelling (Clausen–Scholze). *Zijn $0 < p' < p \leq 1$ reële getallen, zij S een pro-eindige verzameling en zij V een p-Banach ruimte. Zij $\mathcal{M}_{p'}(S)$ de ruimte van p'-maten op S. Dan geldt*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Cond(Ab)}}(\mathcal{M}_{p'}(S), V) = 0$$

voor alle $i \geq 1$.

Het formalisatieproces van deze stelling hebben we in twee delen gesplitst. Het eerste deel betreft de zeer technische Stelling 9.4 van [6], en het tweede deel reduceert het einddoel tot deze Stelling 9.4.

Het eerste deel is tegen het einde van mei 2021 afgerond. Dit is ook het gedeelte van het bewijs waar Scholze nog lichte twijfels bij had. Het bewijs maakt gebruik van een variant op exacte complexen van genormeerde groepen, waarbij het belangrijk is om de norm van elementen goed te beheersen door allerlei geschikt gekozen constanten. Tijdens het formalisatieproces werden de gebruikelijke typefouten en onnauwkeurigheden gevonden, en af en toe moest een lemma een beetje worden aangepast. Scholze schrijft hierover in een tweede blogpost: "This was precisely the kind of oversight I was worried about when I asked for the formal verification. ... The proof walks a fine line, so if some argument needs constants that are quite a bit different from what I claimed, it might have collapsed." [5]

In grote lijnen is het bewijs van [6] gevolgd. Het team dat aan de formalisatie werkt, schrijft ook aan een 'informele' LaTeX-versie van het bewijs, met kruisverwijzingen naar de Lean-versie [14]. Deze *blueprint* is nog sterk aan verandering onderhevig, en zal in de komende maanden gepolijst worden.

De snelheid waarmee de eerste mijlpaal bereikt werd kwam voor velen als verrassing. Jordan Ellenberg schrijft: "I didn't grasp something like Lean would so quickly become authentically helpful at the frontiers of math." [16] Zelf had ik aanvankelijk ingeschat dat we ongeveer een jaar nodig zouden hebben voor de eerste mijlpaal.

Het tweede deel van het experiment is op moment van schrijven in volle gang. Onderdeel hiervan is het opzetten van de theorie van gecondenseerde abelse groepen. Het technische resultaat uit het eerste deel is een uitspraak over complexen van genormeerde groepen, waarbij gecondenseerde wiskunde geen directe rol speelt. Voor de vertaalslag naar de Ext-groepen van gecondenseerde abelse groepen die in bovengeciteerde stelling voorkomen, wordt in [6] gebruikgemaakt van een zogeheten Breen–Deligne-resolutie. Dit is een technisch resultaat in de homologische algebra, en het bewijs dat Breen–Deligne-resoluties bestaan maakt gebruik van homotopietheorie. In samenwerking met Scholze hebben we een gerelateerde techniek ontwikkeld die zowel eenvoudiger te bewijzen alsook eenvoudiger toe te passen is.

Het team

Begin 2021 is er rondom het project spontaan een team ontstaan dat bestaat uit wiskundigen en af en toe ondersteund wordt door informatici. De samenwerking wordt georganiseerd via de online Lean-chatroom [15]. De meeste teamleden hebben elkaar nog nooit in levende lijve ontmoet en kennen elkaar vanwege hun gemeenschappelijke interesse in Lean. Rondom de klok worden er bijdragen aan de code toegevoegd, vanuit Noord-Amerika, Europa en Australië. Peter Scholze heeft veelvuldig deelgenomen aan discussies in de chatroom om bewijzen toe te lichten of alternatieven te schetsen.

Op moment van schrijven bestaat het kernteam uit: Riccardo Brasca, Kevin Buzzard, Johan Commelin, Heather Macbeth, Patrick Massot, Bhavik Mehta, Scott Morrison, Filippo A.E. Nuccio, Damiano Testa en Adam Topaz. Verdere bijdragen en technische ondersteuning zijn geleverd door: Reid Barton, Alex J. Best, Mario Carneiro, Floris van Doorn, Gabriel Ebner, Rob Lewis, Yakov Pechersky, Ben Toner en Eric Wieser.

Bewijsassistent

Computerprogramma's als Lean worden soms ook wel *bewijsassistenten* genoemd. Over het algemeen is die assistentie voornamelijk toekomstmuziek, en voert pedante verificatie de boventoon. Tegelijk is er op specifieke punten wel degelijk assistentie mogelijk. Wanneer een theorie (in de zin van de logica) *beslisbaar* is, dan kan men een algoritme schrijven dat automatisch bewijzen of tegenvoorbeelden genereert voor uitspraken in die theorie. Bekende voorbeelden hiervan zijn de Euclidische meetkunde en de theorie van geordende abelse groepen.

Juist bij het Liquid Tensor Experiment is er ook op een andere manier sprake van assistentie. De kern van het bewijs is ingewikkeld. Zo ingewikkeld dat het erg moeilijk is het volledige bewijs in het 'werkgeheugen' van het brein te houden. (Het is goed mogelijk dat in de toekomst een eenvoudiger bewijs deze complicaties wegneemt.) Bij verschillende pogingen om het bewijs met pen en papier te doorgronden, liep ik vast op deze complexiteit. Iemand gaf mij de volgende vergelijking: Wanneer men een tekst wil begrijpen die geschreven is in een taal die men erg zwak beheerst, dan is het moeilijk om de tekst van begin tot einde door te lezen. Maar de eerste twee regels lukken vaak nog wel. En nadat die twee regels zorgvuldig vertaald worden naar de moedertaal, wordt de betekenis van de daaropvolgende regels ineens duidelijker.

Op dezelfde manier zijn we stap voor stap door het bewijs in [6] heen gekropen. Telkens hebben we een lemma, of een paar regels, vertaald naar Lean. Daarna werd vaak de volgende bewijsstap duidelijker, totdat uiteindelijk de volledige bewijsstructuur helder was. Scholze geeft aan dat dit proces ook voor hem verhelderend werkte: "During the formalization ... this made me realize that actually the key thing happening is a reduction from a non-convex problem over the reals to a convex problem over the integers." [5]

Meer weten?

- Lean leren: https://leanprover-community.github.io/learn.html
- Zulip chatroom: https://leanprover.zulipchat.com
- LTE blueprint: https://leanprover-community.github.io/liquid

Referenties

1 Jeremy Avigad, The mechanization of mathematics, *Notices Amer. Math. Soc.* 65(6) (2018), 681–690.

2 Kevin Buzzard, Proving theorems with computers, *Notices Amer. Math. Soc.* 67(11) (2020), 1791–1799.

3 Alexandre Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer. Math. Soc.* 16 (1955), Chapter 1: 196 pp., Chapter 2: 140 pp.

4 Leonardo de Moura e.a., The Lean theorem prover (system description), in *International Conference on Automated Deduction*, Springer, 2015, pp. 378–388.

5 Peter Scholze, Half a year of the Liquid Tensor Experiment: Amazing developments, 2021, https://xenaproject.wordpress.com/2021/06/05/half-a-year-of-the-liquid-tensor-experiment-amazing-developments (bezocht op 05-10-2021).

6 Peter Scholze, Lectures on analytic geometry, 2019, www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf.

7 Peter Scholze, Lectures on condensed mathematics, 2019, www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf.

8 Peter Scholze, Liquid Tensor Experiment, *Experimental Mathematics* 0.0 (2021), 1–6.

9 Peter Scholze, Liquid Tensor Experiment, 2020, https://xenaproject.wordpress.com/2020/12/05/liquid-tensor-experiment (bezocht op 05-10-2021).

10 The mathlib community, The Lean mathematical library, in *Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs, CPP 2020, New Orleans, LA, January 20–21, 2020*, 2020, pp. 367–381.

11 https://www.cs.ru.nl/~freek.

12 https://leanprover-community.github.io.

13 https://leanprover-community.github.io/undergrad.html.

14 https://leanprover-community.github.io/liquid (work in progress).

15 https://leanprover.zulipchat.com.

16 https://twitter.com/JSEllenberg/status/1401177931800530948.