Wim Caspers
Lyceum Ypenburg, Den Haag, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examen vwo wiskunde B 2021

Hoe moeilijk kan het zijn?

In 2020 sloten leerlingen hun vwo-opleiding af zonder een Centraal Examen te hebben afgelegd. Voor de volgende lichting ging dat examen wel door. Overigens werden de spelregels aangepast. Kandidaten konden het examen spreiden over drie tijdvakken en bovendien mochten de examens van twee vakken herkanst worden in plaats van maar een. En bij de uitslagbepaling mocht een vak buiten beschouwing worden gelaten, afgezien van Nederlands, Engels en wiskunde. Maar de examens zelf, zijn die te vergelijken met de examens van de afgelopen jaren? Wim Caspers beschrijft wat hem opviel in het wiskunde B-examen van 2021.

De leerlingen in het examenjaar 2021 hebben zich onder bizarre en sterk wisselende omstandigheden moeten voorbereiden. Afgezien van persoonlijke omstandigheden (besmetting, quarantaine, ziekte en erger) werd de lesstof steeds op een andere manier aangeboden. Vanaf maart 2020 gebeurde dat eerst een periode met begeleiding op afstand en vervolgens door online onderwijs tot het einde van het voorexamenjaar. Het examenjaar begon normaal op school, maar vanaf december op anderhalve meter onderlinge afstand, veelal resulterend in hybride onderwijs; de helft van de week vanuit huis de les volgen en de andere helft van de week in het lokaal.

Het was voor docenten ingewikkeld om in de gaten te houden of hun leerlingen nog wel aan de gebruikelijk eisen voldeden. De traditionele manier of gebruikelijke frequentie van toetsen kon vaak niet gevolgd worden, dus het beeld werd vertroebeld. Aan het eind van het voorexamenjaar werden de gebruikelijke bevorderingsnormen minder streng gehanteerd en dus was het spannend om te zien hoe de kandidaten door het Centraal Examen zouden komen. Hoe zwaar zou hen het examen wiskunde B vallen en zijn de examens in dit bijzondere jaar van hetzelfde niveau als anders?

Het inschatten van de moeilijkheidsgraad van een examen is een verraderlijke bezigheid. Wanneer je het examen een keer hebt doorgewerkt, lijkt het op het tweede gezicht een stuk overzichtelijker, laat staan wanneer je een hele stapel uitwerkingen van leerlingen beoordeeld hebt. Door omstandigheden had ik het examen wiskunde B uit het tweede tijdvak nog niet gezien. Deze bespreking was dus een uitgelezen gelegenheid om het onbevangen te bekijken en de moeilijkheidsgraad ervan in te schatten.

Gewaarschuwd door een N-term van $2{,}1$ richten we ons eerst maar eens op de laatste opgave omdat daar het venijn zich pleegt op te houden. En inderdaad. In de opgave 'Driehoek in een cirkel' is sprake van een raaklijn k door de oorsprong O aan een

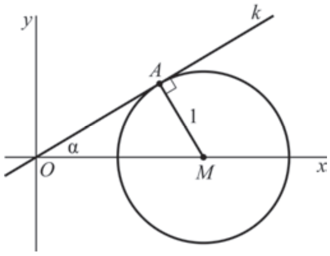
De N-term

Ieder examen wordt achteraf voorzien van een N-term: een getal tussen de 0 en (in principe) 2, waarmee de score van een kandidaat omgezet kan worden naar een cijfer. Ruwweg komt het erop neer dat een leerling die de helft van het aantal te behalen punten scoort in geval $N=0$ als cijfer een $4{,}5$ krijgt toegekend, in geval $N=1$ een $5{,}5$ en in geval $N=2$ een $6{,}5$. Voor het examen wiskunde B uit het tweede tijdvak werd achteraf als N-term $2{,}1$ vastgesteld, buitengewoon hoog. Het vaststellen van een N-term kende afgelopen jaar een bijzondere procedure. Normaal gesproken is het uitgangspunt daarbij, dat het vaardigheidsniveau van de kandidaten elk jaar hetzelfde is. Omdat dat in dit bijzondere jaar niet vanzelfsprekend was, werd ook de inschatting van de moeilijkheidsgraad door docenten in ogenschouw genomen, evenals de N-termen van de afgelopen jaren. Bovendien was er, als altijd, ruimte voor bijstelling vanwege onvolkomenheden in het examen. In dit tweede tijdvak waren de deelnemers kandidaten die het examen spreidden en dus wiskunde B voor het eerst maakten, gemengd met kandidaten die na deelname in het eerste tijdvak opgingen voor hun herexamen. Dit maakte het bepalen van een N-term nog wat ingewikkelder.

Voor wie precies wil weten hoe de N-term dit jaar bepaald werd:
https://www.examenblad.nl/nieuws/20210219/normering-centrale-examens-2021/2021

Driehoek in cirkel

figuur 1



Een lijn k gaat door de oorsprong O en maakt een hoek α met de positieve x-as, met $0° < \alpha < 90°$.

Op de positieve x-as ligt een punt M zo dat de cirkel met middelpunt M en straal 1 lijn k raakt. Punt A is het raakpunt en hoek OAM is dus $90°$.

In figuur 1 is de situatie voor een bepaalde waarde van α weergegeven.

De coördinaten van $A(x_A, y_A)$ kunnen worden uitgedrukt in α.

5p **15** Bereken de waarde van α waarvoor $x_A = \frac{1}{2}$. Geef je eindantwoord in hele graden.

Figuur 1 Vraag 15, onderdeel van de laatste opgave uit het examen vwo wiskunde B 2021.

cirkel met middelpunt M en straal 1, en een raakpunt A met $x_A = \frac{1}{2}$ (zie vraag 15 in Figuur 1). Nu ben ik vergeten te vertellen dat de hoek die k maakt met de positieve x-as α genoemd wordt. De vraag is om α te berekenen. Vlak ervoor wordt bij wijze van hint (?) uitnodigend opgemerkt dat de coördinaten van A kunnen worden uitgedrukt in α.

Als je figuur 1 uit de opgave probeert na te maken in bijvoorbeeld GeoGebra, ligt het niet voor de hand om te beginnen met het tekenen van de raaklijn. Het lijkt gemakkelijker om te beginnen met het kiezen van M, dan een cirkel met straal 1 te tekenen en een raaklijn door O aan de cirkel te tekenen. Aha, in plaats van de coördinaten van A uit te drukken in α, dringt zich een heel andere oplossing op. De poollijn van O ten opzichte van de cirkel is de lijn $x = x_A$ en in dit speciale geval dus $x = \frac{1}{2}$. Maar gebruikmakende van een vergelijking van de cirkel

$$(x - x_M)^2 + y^2 = 1$$

levert eerlijk delen als vergelijking van de poollijn

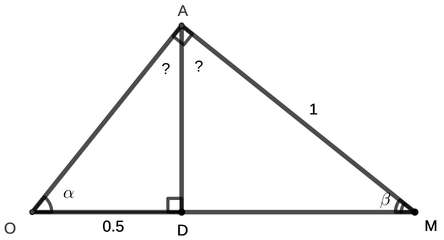
$$-x_M(x - x_M) = 1$$

en daarmee vind je

$$x_M = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}$$

waarmee α snel te bepalen is.

De sturende opmerking om de coördinaten van A uit te drukken in α, leidt tot oplossingen waar geen raaklijn aan te pas komt. En inderdaad blijkt de situatie niet wezenlijk te veranderen wanneer je cirkel en raaklijn weglaat. Uiteindelijk komt het neer op het plaatje getoond in Figuur 2.



Figuur 2

Opeens wemelt het van de gelijkvormige driehoeken en vertoont het vraagstuk grote overeenkomsten met sommetjes uit de vierde klas, inderdaad op te lossen door OD uit te drukken in α, maar voor leerlingen met een goed geheugen misschien ook wel met verhoudingstabellen. Kortom, de opzet van deze opgave dwingt de kandidaat buitengewoon soepel door de verschillende domeinen van zijn kennis te bewegen. De tekening of juist de hint kunnen onbedoeld een rookgordijn opwerpen.

Dat het vraagstuk gesteld is uitgaande van een raaklijn, lijkt onhandig, maar blijkt in de volgende vraag van de opgave goed uit te komen (zie vraag 16 in Figuur 3). Daarin laat men α naar 0 naderen en uiteindelijk mag de oppervlakte berekend worden van een gelijkbenige driehoek met tophoek $45°$ en gelijke zijdes van lengte 1. Dat is dan wel weer te doen.

Vlak ervoor, in vraag 14, werd de administratieve kracht van de kandidaten op de proef gesteld. Gegeven werd voor $x > 0$,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

met afgeleide

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

De raaklijn aan de grafiek van f in een punt P snijdt de x-as in een punt S. Gevraagd werd exact de maximale waarde van de x-coördinaat van S te berekenen. Veel kandidaten zullen ervoor gekozen hebben een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt $P(p, e^{-\frac{1}{p}})$ op te stellen van de vorm

$$y = \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}} \cdot x + b$$

om daarna x op te lossen uit

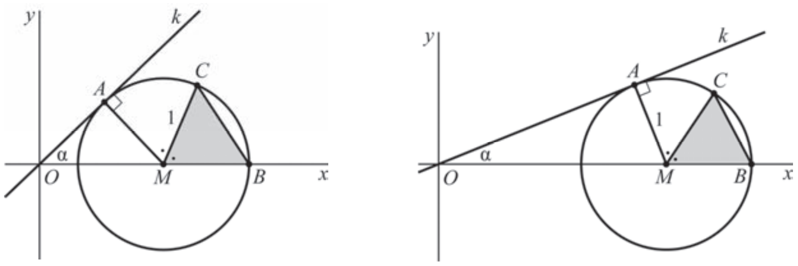
$$0 = \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}} \cdot x + e^{-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}} \cdot p.$$

Als je dan niet flink vereenvoudigt, loop je de kans daarna een redelijk ingewikkelde uitdrukking te maximaliseren door het nulstellen van een nare afgeleide. In het beoordelingsmodel wordt als vorm voor de vergelijking van de raaklijn gekozen voor

$$y - e^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}} (x - p).$$

Het rekent in het vervolg net iets makkelijker. Ik ben bang dat leerlingen die vorm niet op grote schaal aangeleerd hebben gekregen. Toch maar eens mee beginnen.

Kandidaten die minder vertrouwd waren met het manipuleren van wortels en loga-



Als α nadert naar 0, neemt de oppervlakte van driehoek MBC af tot een grenswaarde.

5p **16** Bereken exact deze grenswaarde.

Figuur 3 Vraag 16, onderdeel van de laatste opgave uit het examen vwo wiskunde B 2021.

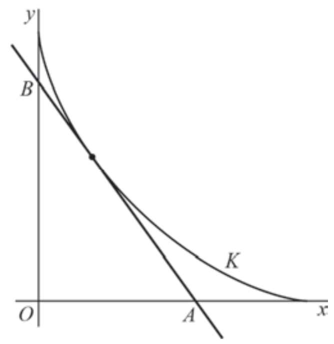
Kromme K

De kromme K is gegeven door de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \text{ met } 0 < t < \tfrac{1}{2}\pi$$

In de figuur is kromme K getekend. Ook is voor een waarde van t in het bijbehorende punt van K de raaklijn aan K getekend.

figuur



De helling in het punt $(x(t), y(t))$ van K kan worden berekend met: $-\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

3p **1** Bewijs dit.

Een vergelijking van de raaklijn in het punt $\big(x(t), y(t)\big)$ van K is:

$$y = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}x + \sin(t)$$

3p **2** Bewijs dat deze vergelijking juist is.

De raaklijn snijdt de x-as in punt A en de y-as in punt B.

3p **3** Bewijs dat de lengte van het lijnstuk AB constant is.

Figuur 4 De eerste opgave uit het examen vwo wiskunde B 2021.

ritmes hadden tegen die tijd al het nodige voor de kiezen gehad in de opgaven over wortelgrafieken en bankenformules. Onderwerp in de ene opgave waren de grafieken van $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{2x}$, leidend tot redelijk standaard rekenwerk met primitieven en afgeleiden van wortels. In de andere opgave werd de formule

$$T = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

voor de verdubbelingstijd bij een groeipercentage van p beschouwd, en werden de benaderingen $T_1 = \frac{70}{p}$ en $T_2 = \frac{72}{p}$ met elkaar vergeleken.

En kandidaten die het onderwerp goniometrie voor het gemak maar buiten beschouwing gelaten hadden bij bestudering van de stof (ja, dat komt voor) waren in de eerste opgave al op de koffie gekomen. Zie Figuur 4. De ontdekking bij vraag 3 dat de kromme precies beschreven wordt door een ladder van lengte 1 die langs de muur en over de grond naar beneden glijdt, zal aan hen voorbijgegaan zijn.

Het geheel overziend doen de kandidaten die dit examen voldoende maakten niet onder voor hun collega's uit voorgaande jaren. Het eerste tijdvak kende een qua spreiding in de onderwerpen vergelijkbaar examen, al bleven de uitdrukkingen in de berekeningen wat eenvoudiger. Als N-term werd $1{,}5$ vastgesteld. Het derde tijdvak kreeg als N-term $1{,}6$ mee. Ook daar weer een mooie spreiding over de verschillende domeinen van het examenprogramma, maar die versie kende weer wat ingewikkelder formulewerk. Zo werd bijvoorbeeld gevraagd te bewijzen dat

$$\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x)\cos(2x).$$

In de toen nog net niet actuele opgave over hoogwater werd gevraagd de afgeleide $\frac{dC}{dT}$ te bepalen van de capaciteit van de rivier, waarbij

$$C = a - b\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right).$$

En er werd gevraagd te laten zien dat de functie f gegeven door

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$$

als inverse functie heeft

$$f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1},$$

om gewapend met die kennis de inhoud van een omwentelingslichaam te berekenen dat ontstaat door wentelen van een vlakdeel om de y-as. Een mooi rijtje opgaven om het schooljaar 2021–2022 mee te beginnen. Dan weten ze meteen waar de lat ligt.