

Jasper van de Kreeke

*Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.d.c.vandekreeke3@uva.nl*

Evenement Zomerkamp Berlijn, 17–21 augustus 2020

Afgeleide categorieën in de tuin

Het afgelopen coronajaar zag heel wat conferenties, workshops en zomerscholen in het water vallen. Een domper voor veel beginnende onderzoekers, die in normale tijden volop van deze evenementen gebruikmaken om nieuwe wiskunde te leren, contacten te leggen en ideeën uit te wisselen. Jasper van de Kreeke, promovendus aan de Universiteit van Amsterdam, bleef echter niet bij de pakken neerzitten en organiseerde een zomerkamp in de tuin van zijn ouders in Berlijn. Het werd een van de weinige wiskundige-evenementen die live plaatsvonden tijdens de COVID-19-zomer. In dit artikel blikt hij terug op zijn experiment.

Met dank aan de deelnemers: Severin Barthelemy, Dominic Bunnnett, Lorenzo Dasti, Simon Felten, Felix Küng, Alejandra Rincón Hidalgo, Tom Sutherland.



Het conferentiecentrum

Het idee

Er is veel bericht over universiteiten die dicht gingen, sport en muziek die onmogelijk werden. Maar na de eerste schok kwam ik geheel tot rust en begon aan een intensieve periode van toewijding aan de wiskunde. Ik kreeg inzicht in wat mijn begeleider Raf Bocklandt me al maanden voorgoochelde, kon me zijn onderzoeksvragen eigen maken en het lukte me door te dringen tot concrete vragen waarop hij het definitieve antwoord niet wist.

In mei vorig jaar bleek de eerste coronagolf doorstaan. Mijn ouders wonen aan de rand van Berlijn en hebben hun rommelige tuin de afgelopen jaren enorm opgeruimd. “Jasper, heb je niet zin een kamp bij ons te organiseren?” Hun aanbod sloot precies aan bij wat ik nodig had: ik zou medepromovendi uitnodigen, we zouden samen aan wiskunde werken en ik zou mijn vragen ter debat stellen. Zij konden kamperen in de tuin en het open-air-karakter zou het evenement coronaproof maken.

De wiskunde

In mijn promotie heeft mijn begeleider me aan het werk gezet om na te denken over twee invarianten van A_∞ -categorieën: sta-



Aan het werk

biliteitscondities en deformaties. Een A_∞ -categorie is een soort categorie die naast de gewone compositie ook nog hogere producten heeft.

De eerste invariant bestudeert alle mogelijkheden om in een categorie C bepaalde objecten stabiel te noemen zodat ieder object een filtratie heeft waarin er in iedere stap een stabiele component bij komt. In de twintigste eeuw hebben Mumford [4] en King [3] antwoorden op deze vraag gevonden in het geval vectorbundels en modulen, en in 2001 ontwikkelde Bridgeland [1] in 2001 een concept van stabiliteitscondities dat ook werkt voor A_∞ -categorieën.

Het concept van deformaties kun je als volgt benaderen: Stel A is een algebra, dus een vectorruimte met een bilineair product $\mu: A \times A \rightarrow A$. Voor welke η is dan $\mu + \eta$ nog steeds een bilineair product? Deze vraag kun je ook voor de hogere producten stellen en zo kom je uit bij deformaties van A_∞ -categorieën.

Planning

Wie zou ik uitnodigen, en waaraan zouden we samen werken? Ik besloot promovendi te gaan winnen onder het overkoepelende thema ‘Derived Categories, Stability Conditions and Deformations’ en alle deelnemers de gelegenheid te geven vraagstukken in te sturen die zij op het kamp wilden oplossen.

Eind juni, nul deelnemers. Ik had de poster gemaild naar hoogleraren en promovendi, maar de aanmeldingen lieten op zich wachten. Overgaand naar mijn ultima ratio verstuurde ik mijn poster uitein-

delijk ook via de Europese mailinglijsten eager-gen-l en am-l. Eén dag later de verassing. Ik kreeg niet alleen aanmeldingen van promovendi, maar ook postdocs wilden meedoen. We werden een groep van acht. Na een eerste kennismaking via Zoom kregen we ook een eigen dynamiek: Severin nodigde Dominic en mij uit om van tevoren al gedachten uit te wisselen.

Vraagstukken voor het kamp

Eindelijk was het zover en zondag arriveerde Lorenzo, na twintig uur in de bus! De volgende dag kwamen ook de anderen en begonnen we met mini-presentaties waarin iedereen kon vertellen over zijn vraagstuk. Hiervoor had ik trouwens een schoolbord bij de lagere school uitgeleend.

Mijn eigen take: Laten we inzoomen op het geval van een *punctured surface* S . Dat is een gesloten oppervlak met een aantal punten eruit geknipt. Hiervan kun je een Fukaya-categorie $Fuk(S)$ maken met als objecten de krommen op dit oppervlak en als morfismen hun snijpunten. In het jaar 2014 publiceerden Haiden, Katzarkov en Kontsevich [2] een lang artikel waarin zij een groot deel van de stabiliteitscondities van een Fukaya-categorie van dit type bepalen.

Hoe bouwen deze legendarische auteurs die stabiliteitscondities? Door een uitgebreide analyse van de categorie $Fuk(S)$ concludeerden zij dat zogeheten kwadratische differentiaal op S stabiliteitscondities op $Fuk(S)$ opleveren.

In het voorjaar was ik op een ambitieus idee gekomen, echt iets om met mijn peers te bespreken: Als stabiliteitscondities op $Fuk(S)$ deels overeenkomen met meetkundige data op S , en we plakten twee dergelijke oppervlakken aan elkaar, dan zouden we een stabiliteitsconditie op het geplakte oppervlak moeten krijgen.

En nog een idee legde ik voor aan de groep: Raf had voorgesteld kwadratische differentiaal op bepaalde oppervlakken te interpreteren als A_∞ -deformaties van de afgeleide categorie van coherente schoven op S . Dit zou een correspondentie tussen stabiliteitstructuren en deformaties van verschillende categorieën opleveren. Maar ik had eerst een goed concept voor A_∞ -deformaties nodig, en hier had ik hulp voor nodig van mijn deelnemers.



Muziekavond

Groepsdynamiek

Mooie werkgroepjes vormden zich. “Where is my Dom?”, klonk het af en toe en dan maakte Alejandra kenbaar dat zij op zoek was naar haar oud-collega. Ook Lorenzo had met Alejandra en Felix steeds weer mooi debat. Zelf was ik veel in overleg met Severin en Tom. Achter de schermen moesten veel verantwoordelijkheden verdeeld worden. Mijn broer ging in ruil voor een zakgeldverhoging eten maken, en ik zou het initiatief nemen voor wandelingen door het bos of lunch bij café Koppelschänke.

’s Avonds na ons wiskundig werk namen we echt de tijd om op een andere manier samen bezig te zijn. Er werd gekaart. Severin en ik speelden muziek uit de Huit Morceaux van Glière. Later kwam mijn broer erbij en jamden we met zijn vijven liederen als *Tell Me Ma* terwijl de anderen zongen.

Woensdag was de fietsexcursie door Berlijn. Reichstag, Siegestsäule en Museumsinsel, we besloten ook over het eindeloze Tempelhofer Feld te fietsen dat nog tot 2010 een Berlijns vliegveld was geweest, en we eindigden in multicultureel stadsdeel Kreuzberg. Tussendoor was het Felix gelukt contact op te nemen met een oude kennis, wat de groep een gezamenlijk Koreaans diner opleverde.

DGLA, Frobenius en Takeda

De diverse input van mijn peers heeft me echt verder gebracht. Zo hielp Severin me aan de A_∞ -DGLA, een tool waarmee je A_∞ -deformaties kunt beschrijven. Verrassend genoeg bleek deze zowel voor de moduli-ruimte van deformaties als ook voor deformaties boven een ring R geschikt te zijn.

Simon en Tom hadden het steeds weer over Frobenius-structuren die op ruimten



Een coronaproof groepsportret

van stabiliteitscondities en deformaties zouden bestaan. Zij hebben mijn ogen voor dit onderwerp geopend.

Verder claimde ik groots dat stabiliteitscondities geplakt zouden kunnen worden en hintte Tom me er uiteindelijk op dat zijn collega uit Berkeley dit al had opgelost. We hebben er uitgebreid naar gekeken. Takeda [5] bleek bewezen te hebben dat stabiele krommen op een gedeeld oppervlak slechts aan één kant liggen en concludeerde inderdaad dat stabiliteitscondities bijeen kunnen worden geplakt.

Lessons learned

Na een week plezier kreeg ik bij de feedback-ronde te horen dat op ons kamp veel meer discussie mogelijk was geweest dan op de gemiddelde conferentie. Dit format zou meer bekend moeten worden, was het oordeel. We bleken echt geluk te hebben

gehad met de timing. De coronacijfers waren laag en pas in de verte zag je een tweede golf komen. Maar omdat er bijna geen andere evenementen live plaatsvonden was het kamp misschien juist een succes *vanwege* Corona.

Na het kamp was de wiskunde zo tastbaar dat ik kon beginnen een artikel te schrijven over deformaties van Fukaya-categorieën van punctured surfaces. Mij is ook duidelijk geworden dat ik naast punctured surfaces ook naar hogere dimensies zou moeten kijken. Iets voor volgende keer? Vele fenomenen zoals plakbaarheid zijn daar vooralsnog een mysterie.

Intussen is het me gelukt samen met Tom een groepje samen te stellen om deze zomer verder te gaan met dit werk, te gast bij het IAS in Princeton. Of we naar Amerika kunnen is nog onduidelijk, en anders organiseer ik met plezier weer een nieuw kamp... ☺

Referenties

- 1 T. Bridgeland, Stability conditions on triangulated categories, *Annals of Mathematics* 166(2) (2007), 317–345.
- 2 F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich, Flat surfaces and stability structures, *Publications mathématiques de l’IHES* 126(1) (2017), 247–318.
- 3 A. King, Moduli of representations of finite dimensional algebras, *The Quarterly Journal of Mathematics* 45(4) (1994), 515–530.
- 4 D. Mumford, Projective invariants of projective structures and applications, *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, pp. 526–530.
- 5 A. Takeda, Relative stability conditions on Fukaya categories of surfaces, arXiv:1811.10592.