Boekbesprekingen

Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview

Dylan P. Thurston (ed.)

What's Next? The Mathematical Legacy of William P. Thurston

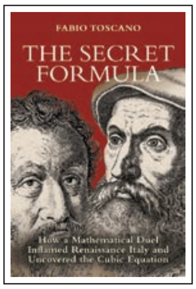
Annals of Mathematics Studies, AMS-205
Princeton University Press, 2020
vi + 425 p., prijs $75.00
ISBN 9780691167770

Fieldsmedaillewinnaar William P. (Bill) Thurston was een visionair meetkundige. Het is onmogelijk om deze bespreking niet met een aantal feiten uit zijn uitzonderlijke biografie te beginnen. Sinds zijn vroege jeugd oefende hij iedere dag 'visualisatie' (misschien omdat hij door aangeboren scheelzien geen dieptezicht had), waardoor hij, naar eigen zeggen, echt kon navigeren in vier en vijf dimensies. In navolging van zijn moeder, textielontwerper, was hij een fervent doe-het-zelver met een werkplaats waar hij van alles in elkaar knutselde. Deze vaardigheid was klaarblijkelijk erfelijk, ik herinner me dat een van zijn zoons, wiskundige en editor van het besproken volume, in onze woonkamer met stoelen, touw en paraplu's in de weer was om iets te illustreren. Om de stijl van Thurston te leren kennen is het de moeite waard om het korte YouTube-filmpje *Knots to Narnia* te bekijken waarin hij een groot touw ophangt en erdoor 'tussen werelden op en neer gaat' om uit te leggen waarom de klaverknoop niet te ontrafelen is. Hij had sterke meningen over wiskunde-onderwijs, gevormd, zo lijkt het, door zijn vrije opvoeding en het feit dat hij als peuter in Nederland naar een montessori-peuterspeelzaal ging en daarna niet meer kon aarden in het rigide Amerikaanse schoolsysteem; daarom was hij gaan studeren aan het New College of Florida, waar geen cijfers worden gegeven maar studenten eigen doelen stellen en die bespreken met tutoren.

Het briljante werk van Thurston is uitzonderlijk visueel en meetkundig, en minimalistisch aan de algebra-kant. Als jonge wiskundige loste hij bijna alle vermoedens in de theorie van bladeringen op, hij veralgemeniseerde het vermoeden van Poincaré naar zijn 'Geometrisatievermoeden', een classificatieresultaat voor alle meetkundige vormen in drie dimensies (jaren later door Perelman bewezen), hij onthulde verbanden tussen complexe transformatiegroepen en 3D-meetkunde, complexe dynamica, enzovoort. Typerend zijn de aantekeningen van zijn college over 'Geometry and Topology of 3-manifolds', online beschikbaar en gedeeltelijk ook als fysiek boek. Ik heb hier zelf de theorie van vezelproducten van orbifolds uit geleerd; de hoeveelheid plaatjes en concrete voorbeelden is overweldigend; het zijn *moeilijke* voorbeelden waarvan het doorgronden normale sterfelijke personen als mijzelf veel tijd kost, maar dan heb je ook wat.

Het hier besproken boek bevat hoofdzakelijk onderzoeksartikelen naar aanleiding van lezingen bij een conferentie uit 2014, georganiseerd na het plotse overlijden van Thurston op 65-jarige leeftijd aan zeldzame neuskanker. Studenten en beroemdheden uit de laag-dimensionale topologie zijn van de partij met substantiële onderzoeksbijdragen, zo ook een update van het ongepubliceerde werk uit 2012 van Thurston zelf aan lamineringen. Wat opvalt is dat de meeste artikelen een leesbare, 'meetkundige' inleiding hebben, en sommige zelfs — volledig in Thurston-stijl — vol staan met voorbeelden en plaatjes. Het boekwerk zal vooral experts in 3D-meetkunde, meetkundige groepentheorie en dynamica kunnen bekoren. Neem als voorbeeld het artikel van Delecroix en Zorich waarin bestudeerd wordt hoe een biljartbal beweegt door een vlak waarin een regelmatig patroon van rechthoekige obstakels is geplaatst. De bal wijkt generiek na lange tijd t ongeveer $t^{2/3}$ van zijn startpositie af (het zogenaamde 'wind-bomen-model' van P. & T. Ehrenfest uit 1912; brownse beweging zou $t^{1/2}$ opleveren). In dit artikel bewijzen ze dat de diffusiesnelheid $2/3$ uit het rechthoekige geval soms willekeurig dicht bij 0 komt voor meer ingewikkelde, niet-convexe figuren ('gefluister'), en vragen of het ook dicht bij 1 kan ('kreten'). Na een toegankelijke inleiding vliegen de lezer al snel de methoden uit de Hodge-theorie van moduliruimten van platte oppervlakken om de oren.

Zorgvuldig uitgegeven, modulo een paar rare drukfouten in de referenties van sommige artikelen, lijkt het vooral een werk voor de kenner, die zal smullen van de met verrassende inzichten volgestopte 400 pagina's. *Gunther Cornelissen*



Fabio Toscano

The Secret Formula

How a Mathematical Duel Inflamed Renaissance Italy and Uncovered the Cubic Equation

vertaald uit Italiaans door Arturo Sangalli
Princeton University Press, 2020
viii + 161 p., prijs \$24.95
ISBN 9780691183671

Als er ooit (het boek is reeds in 2009 als *La Formula Segreta* gepubliceerd in het Italiaans) een spannend boek is verschenen over een wiskundig onderwerp, dan is het wel dit boek. Intriges, passie, geheimen, menselijke zwakheden, ze komen alle voorbij in het soepel geschreven verhaal van de speurtocht naar de oplossingsmethode van de algemene derdegraadsvergelijking. De reden dat dit welbekende verhaal nog maar weer eens wordt verteld is dat Toscano — nog meer dan daarvoor gedaan is — de beweegredenen van de hoofdpersonen (Scipio Dal Ferro, Ludovico Ferrari, maar vooral Niccola Tartaglia en Gerolamo Cardano) heeft willen duidelijk maken. Dat hij dat op een dergelijke, uitermate gedetailleerde manier überhaupt heeft kunnen doen is niet alleen te danken aan de respectievelijke officiële publicaties (al dan niet met toestemming van de concurrent), maar vooral aan de grote hoeveelheid brieven en persoonlijke notities die op wonderbaarlijke wijze tot nu toe bewaard zijn gebleven.

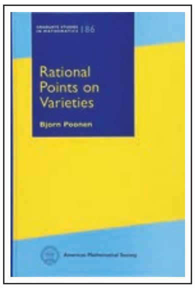
Niccola Tartaglia (hoofdpersoon 1) toonde zich bijvoorbeeld in die notities en brieven zeer bewust van het belang dialogen aan te gaan met andere wiskundige experts of liefhebbers teneinde zichzelf verder te ontwikkelen. Hij (en met hem anderen) werd niet alleen ingeschakeld om antwoorden of advies te geven op het gebied van diverse economische, bouwkundige en technische vragen, maar ook uitgedaagd om wiskundige problemen op te lossen; het was in die tijd (eind vijftiende, begin zestiende eeuw, alhoewel dat ook al eeuwen daarvoor het geval was) namelijk heel gewoon om een wiskundig duel aan te gaan, waarbij de winnaar niet alleen roem en prestige voor zichzelf (en voor zijn draagkrachtige opdrachtgever) vergaarde, maar vaak ook een geldbedrag kreeg of een salarisverhoging en soms zelfs een aanzienlijke verbetering van zijn positie kon verwezenlijken. De ongeschreven regel was wel dat een probleem slechts kon worden aangeboden aan de uitgedaagde indien de aanbieder het probleem zelf kon oplossen (of tenminste de oplossing kende, wat niet hetzelfde is). Precies dat maakte dat Tartaglia weigerde te geloven dat de indiener van de vergelijking $x^3+3x^2=5$ zelf in staat zou zijn deze op te lossen met behulp van een algemene regel, simpelweg omdat die op dat moment niet bestond en zelfs voor onmogelijk werd gehouden. Er was wel een *meetkundige* manier bekend (Omar Khayyam, reeds in de elfde eeuw) om de (strikt positieve) oplossingen van derdegraadsvergelijkingen te construeren en er waren ook benaderingsmethoden bekend (onder anderen Fibonacci, in de dertiende eeuw), maar er was nog geen algemene algebraïsche formule.

De doorbraak kwam in 1535, toen Tartaglia als eerste de oplossingsmethode publiceerde van vergelijkingen van het type $x^3+bx=c$ (en ook van het op dat moment als anders beschouwde type $bx+c=x^3$) en die bleek later een cruciale stap in het vinden van de algemene oplossingsmethode van een willekeurige derdegraadsvergelijking.

Enter Gerolamo Cardano. Na een periode als medicus begon Cardano (hoofdpersoon 2) zich steeds meer te bewegen op het gebied van de wiskunde, tot het punt dat hij (in 1539) Tartaglia benaderde om zijn toestemming te krijgen de eerder genoemde formule op te kunnen nemen in een boek waar hij op dat moment de laatste hand aan legde en dat uiteraard daardoor enorm aan belang zou winnen. Dat Tartaglia niet happig was iemand anders de credits te laten opstrijken voor zijn (enorme) prestatie is voorstelbaar, maar net zo voorstelbaar (gezien de desinteresse van Tartaglia zelf iets te willen publiceren en het grote belang voor het boek van Cardano) was ook de vraag van Cardano. Het uiteindelijk toch verschijnen van dat boek (bekend als *Ars Magna*) in 1545 — *met* de gewraakte oplossingsmethode, maar *zonder* toestemming van Tartaglia — markeert niet alleen het begin van de controverse die in dit boek uitvoerig wordt beschreven, maar is niets anders dan het begin van de moderne algebra, want de stap naar de complexe getallen (waarvoor in 1572 door Rafael Bombelli het pad werd geëffend) was nu nog maar een relatief kleine (hoe imposant ook op zichzelf) in vergelijking met de enorme stap die zojuist gezet was.

Voor het (somtijds zelfs dramatische) vervolg van deze controverse, uiteraard meenemende het niet te onderschatten belang van Scipio Dal Ferro (de waarschijnlijk eerste *ontdekker* van de algemene oplossingsmethode van een derdegraadsvergelijking) en van Ludovico Ferrari (een trouwe discipel van Cardano en de ontdekker van de algemene oplossingsmethode van een vierdegraadsvergelijking), maar ook hoe het verder ging met de protagonisten zelf, moet u dit onderhoudende en bij vlagen zeer spannende boek lezen.

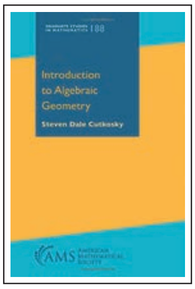
Toscano heeft op indrukwekkende wijze alle (wiskundige en persoonlijke) elementen van het verhaal van een van de meest interessante wiskundige ontdekkingen ooit tot een consistent geheel weten te smeden, een verhaal waar iedere middelbare scholier met wiskunde B en wiskunde D in het profiel (en dus ook een toekomstige wiskundestudent) en zeker iedere wiskundeleraar kennis van zou moeten nemen, al was het alleen maar om het doorzettingsvermogen, de toewijding, de rivaliteit, de passie en zelfs de pijn te ervaren die nodig zijn geweest om de wiskunde en de wiskundigen van de zestiende eeuw significant verder te brengen na een gigantische periode van stilstand (althans op dit terrein) van zo'n 3000 jaar... *Joop van der Vaart*



Bjorn Poonen

Rational Points on Varieties

AMS Graduate Studies in Mathematics, Vol. 186
American Mathematical Society, 2017
xv + 337 p., prijs $83.00
ISBN 9781470437732



Steven Dale Cutkosky

Introduction to Algebraic Geometry

AMS Graduate Studies in Mathematics, Vol. 188
American Mathematical Society, 2018
xii + 484 p., prijs $83.00
ISBN 9781470435189

Wat is een goed boek om algebraïsche meetkunde uit te leren, om standaard feiten te leren en theorie op te zoeken? In deze bespreking beschrijven we twee net verschenen leerboeken en vragen wij ons af of zij voor deze kwalificatie in aanmerking komen. Om beide leerboeken op waarde te kunnen schatten binnen het vakgebied, vertel ik eerst iets over de ontwikkeling van dit vak, door een paar hoogtepunten te beschrijven.

In de negentiende eeuw zien we de eerste grote ontwikkelingen. Riemann, Klein en Hurwitz bewijzen nieuwe resultaten en ontwikkelen nieuwe inzichten. Hun werk is nog steeds heel leesbaar, een bron van prachtige informatie.

In de periode daarna is het de *Italiaanse school*, ruwweg de periode van 1885–1935, die nieuwe wegen inslaat; prachtige wiskunde, vol fantasie; *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, 1921, van Francesco Severi stamt uit die tijd, prachtig. Maar de bewijzen en resultaten waren lang niet altijd correct, hoe virtuoos dan ook.

Van der Waerden, Zariski en Weil kwamen met een indrukwekkende algebraïsering van deze meetkunde; we zien dat in *Einführung in die algebraische Geometrie*, 1939–1973, van Van der Waerden, en het monumentale werk *Foundations of Algebraic Geometry*, 1946, van Weil. Dit gaf een prachtige toegang tot toepassingen in de meetkunde en in de getaltheorie; wel leek het of de slinger iets te ver was doorgeschoten, de algebra was gezond, maar de meetkunde vaak moeilijk te ontdekken.

Toepassingen van *algebraïsche topologie* en *analyse* beschreven eigenschappen van algebraïsche variëteiten over de complexe getallen, Hodge vanaf 1930, zie *Principles of Algebraic Geometry*, 1978, van Griffiths and Harris. Uit de Russische school zien we *Basic Algebraic Geometry*, 1977, van Shafarevich.

We zien een grote verzameling leerboeken verschijnen, nog meer gespecialiseerde werken, elk met een eigen doel, die aspecten van de algebraïsche meetkunde beschrijven.

De toepassing van *schoventheorie* gaf toegang tot het modern toepassen van het klassieke idee van Riemann om meetkunde te beschrijven met locale en globale kaarten. Serre en Grothendieck gaven, onder andere gestimuleerd door de *Weil-vermoedens*, 1949, een manier om de algebraïsche meetkunde opnieuw op te zetten in de nieuwe taal van de *schema's*. Prachtig om te lezen en toe te passen; maar de duizenden pagina's die Grothendieck schreef, met verschillende andere auteurs, is niet iets wat je als basistekst, als leerboek, wilt gebruiken. *Algebraic Geometry*, 1977, van Hartshorne daarentegen voorzag wel in die behoefte; bovendien werd daar de brug geslagen tussen de theorie van variëteiten en die van schema's. Ook is er een dynamisch, maar minder systematisch boek van Mumford: *The Red Book of Varieties and Schemes*, 1967.

Een schema wordt gegeven over een willekeurige basisring als verzameling nulpunten van een stelsel polynomen. Bijvoorbeeld een kegelsnede en een raaklijn snijden elkaar; het resultaat is een schema, dat rekening houdt met multipliciteiten en nog meer informatie geeft; het grote voordeel is dat basisoperaties (snijden, producten, en nog veel meer) binnen de categorie van schema's blijven. Een ander voorbeeld: een schema X over $\mathbb{Z}$ geeft een collectie van schema's $\{X_s\}$, elk boven $s:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p$, een familie van meetkundige structuren, maar dan in alle mogelijke karakteristieken; hier zien we hoe we getaltheorie kunnen bestuderen met de theorie van de schema's. Het leek of we de ultieme samenvatting hadden bereikt van mogelijke benaderingen.

We bespreken hier twee recent verschenen boeken die proberen mogelijke lacunes in de huidige literatuur op te vullen, elk op een eigen manier.

Rational Points on Varieties van Bjorn Poonen veronderstelt de lezer vertrouwd te zijn met het boek van Hartshorne, op zijn minst met de eerste twee hoofdstukken daarvan: *Varieties* en *Schemes*, verder met enige voorkennis van algebraïsche getaltheorie en van groepencohomologie. De auteur legt de focus op aspecten van *aritmetische meetkunde*: neem een variëteit V over een lichaam K, bij voorbeeld een eindige uitbreiding van $\mathbb{Q}$, of een eindig lichaam, en beschrijf $V(K)$, de verzameling van punten op V met coördinaten in K. De volgende meningen verwoorden precies het enthousiasme dat een specialist of een beginneling over dit boek van Poonen kan hebben.

> "The book by Bjorn Poonen, a leading expert in the field, opens doors to this vast field for many readers with different experiences and backgrounds. It leads through various algebraic geometric constructions towards its central subject: obstructions to existence of rational points."
>
> Yuri Manin, Max-Planck-Institute, Bonn

> "It is clear that my mathematical life would have been very different if a book like this had been around at the time I was a student."
>
> Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden

Dit boek geeft een mooie balans tussen heel specialistische onderwerpen en het bespreken van basismethoden. Door het bestuderen van specifieke niet-triviale vragen leer je het vak. De auteur helpt daarbij door de tekst steeds te verrijken met waarschuwingen, voorbeelden en vraagstukken. Uitgebreide verwijzingen geven de lezer de mogelijkheid tot verdere verdieping. De uitleg is helder en precies en geeft de lezer voldoende informatie om verder te gaan.

We noemen een paar onderwerpen die besproken worden. Hoofdstuk 3, 'Properties of morphisms': hier zien we veel basisbegrippen. Hoofdstuk 6, 'Étale and fppf cohomology': een prachtig overzicht. Hoofdstuk 7, 'The Weil conjectures'; we zien een uitleg van de Lefschetz-dekpuntenstelling voor differentieerbare variëteiten, en het étale equivalent; lees de heldere uiteenzetting waarom dit aspect de Riemann-hypothese wordt genoemd. Verder: cohomologische obstructies, algebraïsche oppervlakken, en een prachtig overzicht van eigenschappen van rationale en gevezelde variëteiten. Hier zien we het uitgangspunt van de auteur: gebruik dit speciale onderwerp (rationale punten) om een rijk scala van eigenschappen van variëteiten en schema's gedetailleerd te beschrijven.

De auteur heeft kennelijk een aantal duidelijke keuzen gemaakt. Onderwerpen worden besproken, afdoende verwijzingen worden gegeven; de oorspronkelijke bronnen moet de lezer zelf zien te vinden; bijvoorbeeld zien we voor de stelling van Chevalley, over de structuur van algebraïsche groepen, niet een verwijzing naar het oorspronkelijke artikel uit 1960. Echter, een meer complete lijst van verwijzingen voor elke onderwerp had het boek zeker topzwaar en onleesbaar gemaakt. Zo maak je als schrijver duidelijke keuzen wat je wel en wat je niet laat zien van het complexe stramien van dit wijdvertakte vakgebied. De lezer met interesse in de historische achtergronden moet nog werk verzetten om in dat opzicht een compleet overzicht te krijgen.

Naast uitleg en theorie, voorbeelden en waarschuwingen, vinden we veel open problemen. In onderwerpen die besproken worden leidt de auteur ons naar het fascinerende gebied van modern onderzoek in allerlei vormen. Op basis van dit boek kun je heel wat onderwerpen voor scripties en promoties vinden.

Conclusie. Uit de inleiding: "Our ultimate motive is to introduce readers to techniques that they are likely to need while researching arithmetic geometry more broadly. Along the way, we mention open problems and applications that are interesting in their own right." Hierin is de auteur zeker geslaagd. *Rational Points on Varieties* van Bjorn Poonen is een prachtig boek. Hier leer je door de beschrijving van één aspect diepe theorie, vind je veel voorbeelden en krijgen we een uitstekende presentatie van algemene principes en technieken. Het boek kent niet alleen een rijke schakering aan onderwerpen, maar ook een grote precisie; hier leer je het vak uit. Zowel voor de expert, als voor een student met enige achtergrond is het een rijke en mooie bron. Voor mij stond er heel wat informatie in die ik nog niet had. Bovendien is het een heel persoonlijk boek; steeds weer denk ik, al lezend, de auteur zelf tegen te komen, te voelen hoe hij inzicht en enthousiasme op de lezer weet over te brengen. Zijn wiskundige eruditie proeven we bij het lezen van elke bladzijde.

Introduction to Algebraic Geometry van Cutkosky is een heel ander boek. De opzet is een inleiding te geven vanaf de beginselen van de algebra. Hier ligt de focus op variëteiten over een algebraisch gesloten lichaam.

Het eerste hoofdstuk geeft verwijzingen naar wat we nodig hebben uit de commutatieve algebra. Voor het begrijpen van bewijzen is er een grote stapel leerboeken over (commutatieve) algebra nodig. Het gebruikelijke dilemma is: hoeveel heb je daarvan nodig voor je aan de meetkunde kunt beginnen?

Met voldoende voorkennis geeft dit boek een rijke beschrijving van klassieke resultaten. Maar er kleven wel een paar bezwaren aan. Notatie en definities zijn soms verwarrend. Een paar van de vele voorbeelden. Ik weet niet wat onder een 'domein' en een 'priemideaal' verstaan wordt; heeft de ring $R=\{0\}$ met $1=0$ een priemideaal? Zie: "every ring R ... has at least one prime ideal" (pagina 1); maar dit is in tegenspraak met de definitie van een schema.

In de eerste paragraaf is K zowel een ideaal als een lichaam; f in Theorem 2.57 heeft andere eigenschappen dan f in het volgende Corollary 2.58. Het taalgebruik is onzorgvuldig: 'homogeneous set of generators' waar 'set of homogeneous generators' wordt bedoeld, is een van de vele voorbeelden. Tekst en notatie zijn onzorgvuldig; in Proposition 2.211 komt een n voor, waarvan niet duidelijk is of die al vast ligt, of nog gekozen moet worden, en in het bewijs komt er helemaal geen n voor. In (18.8) wordt verwezen naar Proposition 11.14, maar notaties zijn onderling verschillend. Waar ik ook lees in dit boek denk ik: dit zou ik zo niet zeggen, of bevat de tekst zelfs een fout.

Een van de vele voorbeelden: "Suppose that $V\subset X$ is an affine open subset" (pagina 244); de rest van het argument is fout voor $V=\emptyset$; op pagina 245 wordt beweerd dat voor de singuliere locus $Z\subset X$ er geen 'prime divisor' bevat is in $X\backslash Z$; tegenvoorbeelden zijn eenvoudig te geven.

Hier is een ontsporing op elementair niveau. Een element $x\in R$ heet een *nuldeler* als $x\neq 0$ en er een $y\neq 0$ is met $xy=0$ (pagina 3); op pagina 291 wordt *de multiplicatieve verzameling S van niet-nuldelers genomen* (dus $0\in S$) om de totale ring van quotienten $S^{-1}R$ te vormen; de definitie impliceert $S^{-1}R=\{0\}$. Je ziet wat de auteur bedoelt te zeggen, maar het staat er niet.

Onzorgvuldige definities zorgen voor onduidelijkheid. Wat is 'the general fiber' (pagina 454); een definitie ontbreekt; de specialist weet dat 'general fibers' is bedoeld; een discussie over het verschil met 'the generic fiber' ontbreekt; de zoveelste gemiste kans om de lezer echt iets te leren. Een *Cartier divisor* wordt gedefinieerd (pagina 245) als een overdekking met open deelverzamelingen en locale functies daarop; geeft een andere overdekking een andere Cartier divisor? De auteur vertelt niet welk isomorfiebegrip gehanteerd wordt.

De index geeft soms verkeerde informatie (de definitie van een affiene variëteit komt al veel eerder aan de orde dan waar de index je naartoe leidt).

Mijn ervaring is dat studenten (terecht) in de war raken door een onzorgvuldige tekst. Wil je dat iemand die het vak leert uit dit boek deze slechte gewoontes overneemt?

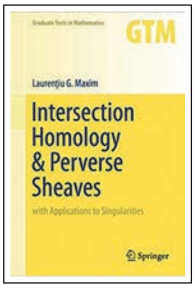
Een fundamenteel bezwaar tegen dit boek is dat begrippen behandeld worden maar dat dat ophoudt zodra het interessant kan worden. Hier is een (van de vele) voorbeelden: Hoofdstuk 19 geeft een inleiding tot snijtheorie; in (19.20), de klassieke stelling van Bézout, 1779 (reeds vermeld door Newton in 1687), geeft dat het aantal snijpunten (multipliciteiten geteld) van twee verschillende irreducibele vlakke krommen van graad d, respectievelijk e, gelijk is aan de. Maar hoe ging dat verder? Van der Waerden, 1938, en Gröbner, 1951, laten zien dat een voor de hand liggende generalisatie niet een gelijkheid oplevert; werk van Weil, 1949, en van Serre, 1958, en vele anderen, legt uit wat wel de goede benadering is. De auteur vermeldt het boek van Fulton, 1984, waar "more general theories are presented". Waarom geeft de auteur niet op zijn minst aan wat de goede vraag is, of er een open probleem is, en wat er na Bézout aan deze theorie gedaan is?

Naast de theorie die algebraïsche variëteiten over een algebraisch gesloten lichaam behandelt, beschrijft dit boek ook in Hoofdstuk 15 'Schemes', generalisaties in schema-taal, en een generalisatie in (15.4) naar 'varieties over nonclosed fields'. Definities zijn slordig en niet compleet. Met deze begrippen ontspoort de tekst op verschillende plaatsen. Een ander bezwaar. Definities worden ad hoc gegeven. In (5.2) wordt het product van twee variëteiten gegeven. Wel de verzamelingstheoretische definitie, niet de definitie als oplossing van een universeel probleem; in het bewijs van Propositie 5.7 komt dit wel terloops om de hoek kijken; wat leert een beginnend student hiervan? We kennen nu de kracht van *representeerbare functoren*; ze worden niet gebruikt in deze tekst. Bovendien is déze definitie van een product, gegeven voor variëteiten over een algebraïsch gesloten lichaam, niet toepasbaar in algemenere situaties, maar de auteur gebruikt wel $X \times Y$ voor schema's zonder verder commentaar. Ik heb een student na het lezen van deze tekst op dit onderdeel serieus verkeerde conclusies zien trekken; hier merk je hoe slecht deze tekst werkt.

Conclusie. Een student die kritisch deze tekst leest kan feiten leren over algebraïsche variëteiten over een algebraïsch gesloten lichaam. Dit boek *Introduction to Algebraic Geometry* van Cutkosky kun je als voorbeeld nemen van hoe je wiskunde niet hoort op te schrijven. Ik begrijp niet hoe de AMS dit manuscript heeft kunnen accepteren.

Frans Oort

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Laurențiu G. Maxim

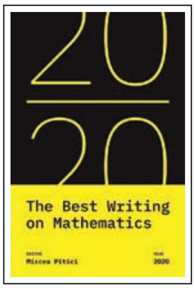
Intersection Homology & Perverse Sheaves

Springer, 2019
ISBN 9783030276430
springer.com/9783030276430

June Barrow-Green, Jeremy Gray, Robin Wilson

The History of Mathematics: A Source-Based Approach
Volume 2

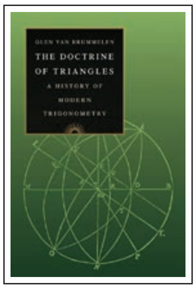
MAA Press, 2021
ISBN 9781470443825
bookstore.ams.org/text-61



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2020

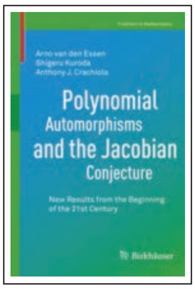
Princeton University Press, 2020
ISBN 9780691207568
press.princeton.edu/books/paperback/9780691207568/the-best-writing-on-mathematics-2020



Glen Van Brummelen

The Doctrine of Triangles
A History of Modern Trigonometry

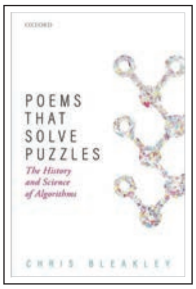
Princeton University Press, 2021
ISBN 9780691179414
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691179414/the-doctrine-of-triangles



Arno van den Essen, Shigeru Kuroda, Anthony J. Crachiola

Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture
New Results from the Beginning of the 21st Century

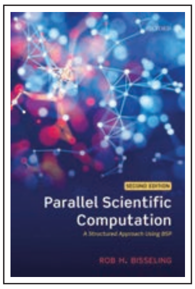
Birkhäuser, 2021
ISBN 9783030605339
springer.com/9783030605339



Chris Bleakley

Poems that Solve Puzzles
The History and Science of Algorithms

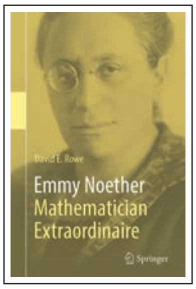
Oxford University Press, 2020
ISBN 9780198853732
global.oup.com/academic/product/poems-that-solve-puzzles-9780198853732



Rob Bisseling

Parallel Scientific Computation
A Structured Approach Using BSP

Oxford University Press, 2020
ISBN 9780198788355
global.oup.com/academic/product/parallel-scientific-computation-9780198788355



David E. Rowe

Emmy Noether
Mathematician Extraordinaire

Springer, 2021
ISBN 9783030638092
springer.com/9783030638092