Rob van Oord
Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 27ste Nationale Wiskunde Dagen

Hallo, horen jullie mij? De kortste NWD

De Nationale Wiskunde Dagen konden dit jaar vanwege de coronamaatregelen niet fysiek plaatsvinden. In plaats daarvan heeft de organisatie een online mini-NWD georganiseerd op vrijdagmiddag 29 januari. Deelnemer Rob van Oord doet verslag.

Door COVID-19 werd de NWD dit keer geheel digitaal gehouden. Alle geplande workshops, waaronder die van Marjan Botke en mij, zijn doorgeschoven naar (hopelijk) volgend jaar. Bij wijze van voorpret kregen we een 'blijde doos' opgestuurd. Daarin een aantal artikelen en flyers. Een SodaStream-waterfles waaruit je je dorst kon lessen tijdens de sessie achter je laptop die middag. Twee chocoladerepen van wiskundemethodes, alsof er maar twee smaken van zijn... Een bouwplaat van een torentje naar ontwerp van Henk van der Vorst en een mondkapje met de tekst "IK ♡ WISKUNDE". Met een loep kon je de formule van het hartje lezen: $x^2+\left(y-\sqrt[3]{x^2}\right)^2=1$. Meteen naar even geprint met Geocadabra! Op internet vond ik ook nog andere formules voor een hartje, onder andere

$$[x=16\sin^3(t),\quad y=13\cos(t)-5\cos(2t)-2\cos(3t)-\cos(4t)].$$

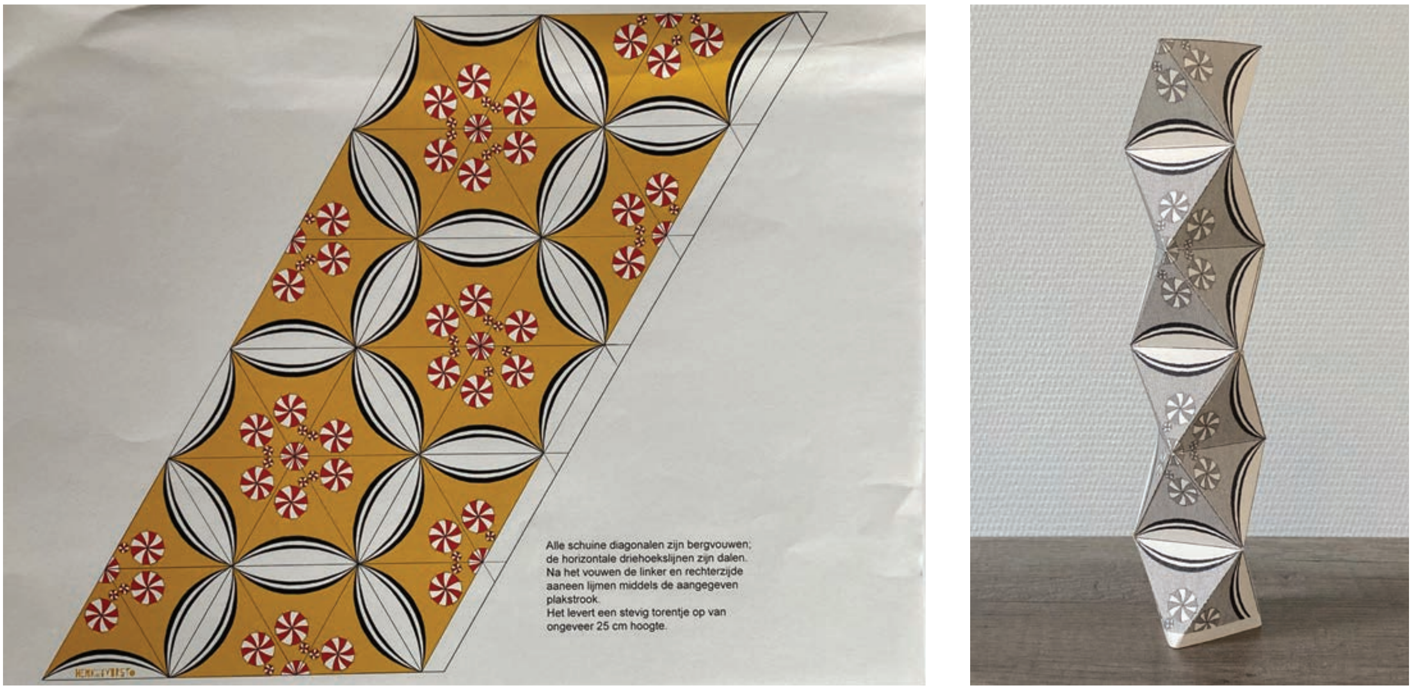
Figuur 1 Mondkapje uit de 'blijde doos'.

Zoom

Met ongeveer 350 collega's werden we via Zoom op de hoogte gehouden van alle activiteiten. Naast het enorme logo van de NWD stond Joke Daemen tussen een kunstwerk van Koos Verhoef en een torentje van Henk van der Vorst. Zo kondigde zij alle onderdelen van de NWD aan. Er was een lounge waarin je elkaar kon ontmoeten. Ik zag vele bekende collegavrienden die ik graag even wat wilde vragen of zeggen. Maar we waren allen ge*mutet*, ofwel monddood gemaakt. Ik kon wel met hen chatten, maar nadat ik verschillende berichtjes had ingetikt kreeg ik ze niet verzonden. Met Enter lukte het in elk geval niet. Ik heb het patroon van het torentje op karton geprint, dan wordt het steviger. Met een passer gaatjes op de eindpunten van de vouwlijnen geprikt zodat de dalvouwen op de achterkant geritst kunnen worden. Maar het vouwen na het ritsen van alle vouwlijnen is best nog lastig. Het resultaat zie je in Figuur 2 rechts.

Lezing van Manjul Bhargava

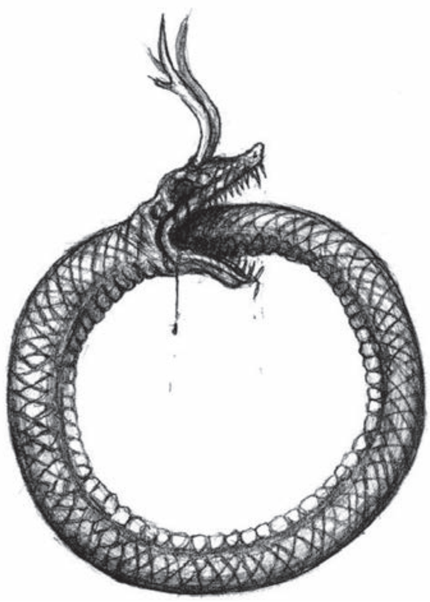
Met bemoedigende woorden opende Robbert Dijkgraaf vanuit Princeton deze 27ste editie. Hij liet weten dat data de toekomstige ontwikkelingen in wiskunde bepalen. Hij introduceerde de spreker van de enige lezing aan, de Indiase wiskundige Manjul Bhargava. Manjul werd in zijn jeugd via zijn grootvader, die dichter was, geïnspireerd door Indiase poëzie en muziek. In zijn lezing legde hij uit hoe nauw de po-



Figuur 2 Bouwplaat van een torentje naar ontwerp van Henk van der Vorst. Rechts het resultaat.

ezie in het Sanskriet en ritme verbonden zijn met wiskunde. Elke lettergreep van een gedicht heeft een lengte van 1 tel (k) of 2 tellen (L). Elke regel duurt 8 tellen. Je kunt nagaan dat er op dit gegeven 34 verschillende regels mogelijk zijn. LLLL, kkkkkkkkk, LLLkk, LLkkkk, Lkkkkkk geeft $1+1+\binom{5}{3}+\binom{6}{2}+7=34$ manieren.

Het aantal mogelijkheden met lettergrepen van 1 of 2 tellen bij regels met n tellen is het n-de getal uit de rij $(1,2,3,5,8,\ldots)$ van Fibonacci. Bij de Indiase cultuur zijn deze getallen sinds 700 v.Chr. bekend als Virahanka-getallen. Manjul legde de recursie van deze getallen als volgt uit. $v(0)=1$: k; $v(1)=2$: kk of L. Het aantal mogelijkheden voor een regel met 1 tel meer is de optelling van het aantal manieren van de vorige term, waarachter 1 korte lettergreep komt (van 1 tel) en het aantal van die daarvoor, elk $+1$ lange lettergreep (van 2 tellen) erachter. Kort gezegd voor $n>2$ geldt $v(n)=v(n-1)+v(n-2)$, dit is juist de recursie van de Fibonacci-getallen. Ik moest denken aan een telprobleem dat ik in mijn lessen deed over het aantal manieren waarop een kikker over een beek heen kan springen met n stapstenen erin. Een kikker kan per sprong 1 of 2 stenen verder springen. Dit leidt ook tot een Fibonacci-getal voor het aantal manieren waarmee hij naar de overkant kan springen, met 1 of 2 stenen tegelijk. Deze leidraad bij de Indiase gedichten mondde uit in een vuistregel ya ma ta ra ja bha na sa la ga, waarbij de onderstreepte lettergrepen 2 tellen zijn en de niet-onderstreepte 1 tel. In deze vuistregel zitten alle 8 mogelijkheden die je hebt met 3 lettergrepen verscholen. Met nullen en enen wordt de rij 0111010001. Elk drietal opeenvolgende cijfers in deze rij is verschillend van alle andere, ga maar na: $011, 111, 110, 101, 010, 100, 000$ en 001. Soms wordt deze rij afgebeeld als een slang die in zijn eigen staart bijt. De 0 en 1 op het eind overlappen dan de 0 en 1 aan het begin. Dus een rondje met 01110100, waarin ook alle drietallen met 0 en 1 geborgd zitten.

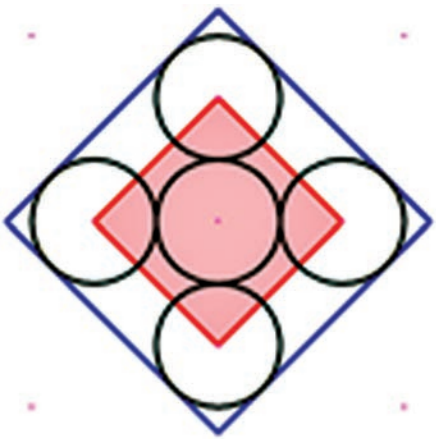


Figuur 3 Een slang die in zijn eigen staart bijt.

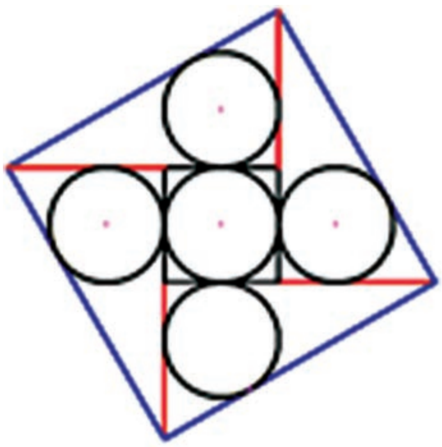
Er passeerden nog wat metrische woorden waarop wij de maat konden meeklappen. In een zaal vol met klappende collega's zou het een mooi effect gegeven hebben. Nu zat je in je eentje achter je beeldscherm te klappen.

Pubquiz

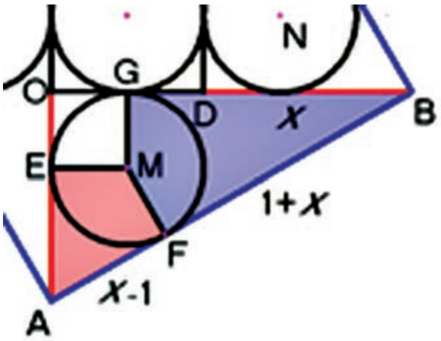
Na de lezing van Manjul kwam het frivole deel van de NWD, een pubquiz. Van tevoren was er de mogelijkheid om je met een team op te geven. Wij waren team 68. Wij, captain Yvonne Bik, Marjan Botke, Henk Hietbrink, Peter Kop en ik. Op papier een goed team, dacht ik. Marjan had een link gemaakt voor een team in Zoom. Via een klik werden we daardoor aan elkaar gekoppeld voor overleg bij de quiz. Ik klik en zie mijn hoofd op het scherm en roep "Hallo horen jullie mij?" De verbinding is gelegd. Maar tijdens de quiz kon ik de vragen, antwoordenbladen en de filmpjes maar moeilijk vinden. Al maar klikken op menu's en linkjes. Ik wist vaak niet waarover het ging. Ook al mailde Henk mij de vragen. Zoals gewoonlijk waren er veel vragen over films en muziek. Daar weet ik niet veel van. De puzzeltjes waren interessant, we waren helaas vaak te laat met inzenden van de (goede) antwoorden. We zijn er bij de eerste puzzel al ingetuind, misleid door het voorbeeld. Hoe groot is het kleinste vier-



Figuur 4 De 1,5-metervraag.



Figuur 5 De Japanse puzzel.



Figuur 6 Uitwerking oplossing Japanse puzzel.

kant waarin je met vijf personen (zonder dikte) kunt staan met inachtneming van de 1,5-meterregel. Wat vroeger vaak normaal was, in een hoek staan, waren we vergeten. Het roze vierkant is de oplossing. Wij hadden het blauwe vierkant met oppervlakte $(\frac{3}{\sqrt{2}}+1{,}5)^2\,\mathrm{m}^2$ in plaats van $(\frac{3}{\sqrt{2}})^2 = 4{,}5\,\mathrm{m}^2$. Zie Figuur 4.

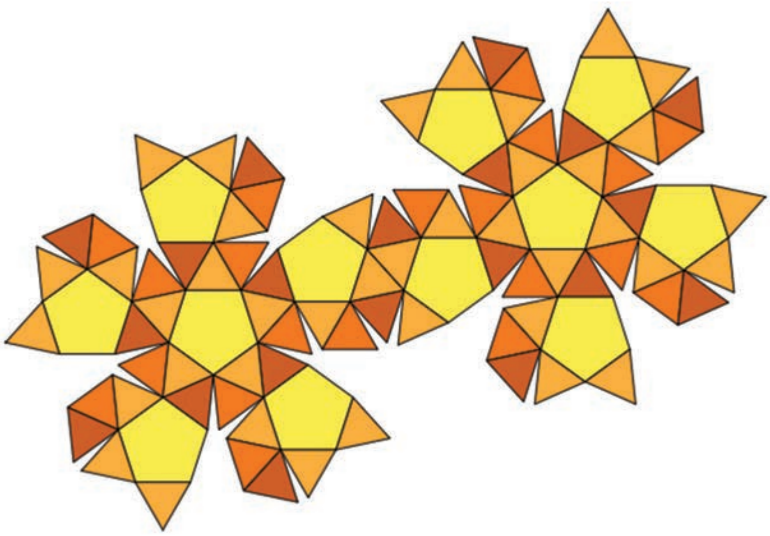
De Japanse puzzel bestaat uit vijf cirkels in een vierkant. De zijden van het vierkant zijn raaklijnen aan de buitenste cirkels die twee aan twee snijden op een van de raaklijnen van de binnenste cirkel. Zie Figuur 5. Eerst moet je analyseren hoe het figuur is opgebouwd. Henk heeft de vraag over hoeveel procent van het vierkant wordt bedekt door de vijf cirkels intussen met GeoGebra opgelost. Deze puzzel was lastiger.

Voor dit verslag heb ik de oplossing uitgewerkt. Er blijkt dat de vier congruente driehoeken alle halve gelijkzijdige driehoeken zijn. Zie Figuur 6. Stel de straal van de cirkels op 1. Bij analyse heb ik gebruikgemaakt van de regel dat raaklijnen loodrecht op de straal staan. Dus $AB \perp MF$ en $AB \perp BC$ (de driehoeken zijn tekens ten opzichte van elkaar een kwart slag ($90°$) gedraaid). De driehoeken OAB en $DB(C)$ zijn congruent. Stel $AO = x$, dan is ook $BD = x$. Verder is $OE = ME = MG = OG = GD = 1$ (straal). $AEMF$ en $BFMG$ zijn vliegers. Dus $AF = AE = x-1$ en $BF = BG = 1+x$, geeft $AB = AF + BF = x-1+1+x = 2x$. Nu geldt $\cos(\angle OAB) = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, dus $\angle OAB = 60°$. $\triangle AEM$ is een ook halve gelijkzijdige driehoek. $EM = 1$, dus $AM = 2$ en $AE = \sqrt{3}$. $OA = x = 1+\sqrt{3}$, dus $AB = 2x = 2+2\sqrt{3}$. De dekkingsgraad van de vijf cirkels is dus

$$\frac{5\pi}{(2+2\sqrt{3})^2}\cdot 100 = 52{,}6\%.$$

Dit had Henk ook.

De vraag over het aantal plakrandjes dat nodig is om een kubus mee dicht te plakken (7) was een eitje. Toen kwamen vragen over een veelvlak met heel veel zijvlakken.



Figuur 7 Bouwplaat van de stompe dodecaëder.

Er werd een deel van een bouwplaat getoond. Dat hoorde bij de bouwplaat van de stompe dodecaëder (*snub dodecahedron*). Dit is meer mijn terrein. Gelukkig had Marjan een plaatje van de volledige bouwplaat bij de hand. Zie Figuur 7. Er zijn 92 zijvlakken: 12 vijfhoeken en 80 gelijkzijdige driehoeken (gzd), waarvan 20 gzd op de plaatsen van de hoekpunten van de oorspronkelijke dodecaëder en $12 \times 5 = 60$ gzd op de zijden van de 12 vijfhoeken. Er zijn 150 ribben: van de $3 \times 80 = 240$ zijden op de driehoeken, worden $5 \times 12 = 60$ zijden, gemeen met de vijfhoeken, enkel geteld en worden de $240 - 60 = 180$ overige zijden, die de driehoeken met elkaar gemeen hebben, dubbel geteld; dus totaal $60 + 90 = 150$ ribben. Er zijn 60 hoekpunten: alle $5 \times 12 = 60$ hoekpunten van de vijfhoeken tellen mee. Een behoorlijk volumineus geval. Ik zie dat op de websites https://enacademic.com/dic.nsf/enwiki/174894 en https://memim.com/snub-dodecahedron.html de aantallen edges en vertices zijn verwisseld. Foei. Wij kwamen tot 60 plakrandjes om een bouwplaat ervan mee dicht te plakken. Bij nader inzien zijn dit er 59. Immers, in de bouwplaat aan de buitenkanten zie je 8 keer hetzelfde patroon rondom een vijfhoek met 9 ribben al aan elkaar tot aan de vijfhoek ertussenin, in het midden nog 2 keer 9, en nog 1 waarmee beide helften aan elkaar zitten. Dus 91 van de 150 zitten al aan elkaar. Nog 59 plakrandjes nodig om de resterende ribben te kunnen plakken. Ik eindig met de felicitaties voor het winnende team 'unQnown'. Ik vraag me af hoe zij zo snel tot zo veel goede antwoorden konden komen. Maar Joke zei dat het een team met experts in puzzelen was. Volgend jaar graag weer een live NWD, waar ik niet hoef te vragen "Hallo horen jullie mij?"