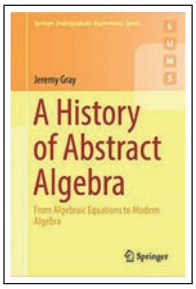
Boekbesprekingen

| Book Reviews



Jeremy Gray

A History of Abstract Algebra

From Algebraic Equations to Modern Algebra

Springer Undergraduate Mathematics Series
Springer, 2018
xxiv + 415 p., prijs €41,41
ISBN 9783319947723

In dit boek worden in dertig hoofdstukken en tien appendices twintig onderwerpen beschreven in de ontwikkeling van de 'moderne algebra'. Dit boek is ontstaan uit verschillende colleges gegeven door de auteur aan de University of Warwick. Het biedt prachtige hoofdstukken, analyses van historische bronnen, en uitvoerige besprekingen van teksten over de geschiedenis van dit onderwerp. Op pagina xv wordt deze lijst van onderwerpen besproken. Aparte hoofdstukken geven mooie beschrijvingen van historisch materiaal. Ik beperk me tot een paar aspecten die in dit boek duidelijk naar voren komen.

De auteur richt zich vooral tot studenten. Bijvoorbeeld: "A good way to test your understanding as your study progresses would be to ask yourself if you have understood these results both as pieces of mathematics and as turning points in the history of mathematics." We zien prachtig materiaal om tot een historisch besef te komen. "There is a particular issue to do with how you handle information when it might be wrong. [...] the more important distinction is between facts and opinions." (pagina xiii).

De auteur geeft instructieve voorbeelden en een mooie discussie "when does a widely shared opinion simply become a fact?" Een dergelijke proces van historische bewustwording zou elke wiskundestudent moeten doormaken.

We vinden hier: "Fermat had shown that odd prime numbers of the form x^2+y^2 are precisely those of the form $4k+1$" (pagina vi). Het is een feit dat Fermat deze bewering deed, en dat we in zijn nagelaten werk niet een bewijs van deze bewering kennen; het lijkt mij onjuist om dit als stelling aan Fermat toe te schrijven als we niet meer informatie hebben; het is goed om hier een *feit* en een *mening* uit elkaar te houden. Voor zover ik weet is het eerste, gepubliceerde bewijs afkomstig van Euler.

In deze bespreking beperk ik me tot een paar onderdelen, om de lezer een indruk te geven wat, naar mijn mening, de sterke en de zwakke aspecten van dit boek zijn.

Een deel van het boek wordt besteed aan de (on)mogelijkheid van constructies met passer en liniaal. Een resultaat is: *een regelmatige n-hoek is te construeren dan en slechts dan als $n = 2^a \times p_1 \times \cdots \times p_t > 2$ met $a \geq 0$ en $t \geq 0$ waar $p_1 < \cdots < p_t$ Fermat-priemgetallen zijn, dat wil zeggen priemgetallen van de vorm $2^{2^j}+1$, met $j \geq 0$; voorbeelden $3,5,17,257,65537,\cdots?\cdots$.* Dit wordt gewoonlijk de Gauss–Wantzel-stelling genoemd. Deze bewering vinden we in Gauss' *Disquisitiones arithmeticae*, §366. Op pagina 107 van het boek dat we bespreken vinden we: "It is true that Gauss's claim was not accompanied by a proof, only a hint that the construction of other polygons [...]. But nor is there any evidence that anyone doubted it, and nor has anyone doubted that Gauss knew how to prove the claim." Is dit een feit of een mening van de auteur dat niemand getwijfeld heeft of Gauss een bewijs had? Hoe kan de lezer hiermee

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview

omgaan? Onvoldoende informatie is verstrekt om dit verder te onderzoeken.

We geven wat details. Op 18-jarige leeftijd loste Gauss dit probleem op in een speciaal geval: de regelmatige 17-hoek is zo te construeren (een fascinerende gebeurtenis in de geschiedenis van de wiskunde). Dit wordt vermeld in de eerste aantekening in zijn *Notizenjournal* op 30 maart 1796; de laatste aantekening, nummer 146, in die verzameling van gedachten die hem invielen, was op 9 juli 1814 (ook een fascinerende tekst: deze 'Last Entry' legt de kiem voor de Weil-vermoedens). Nergens vinden we in deze aantekeningen van Gauss vermelding van de generalisatie naar willekeurige n. Onze auteur Jeremy Gray kent dit materiaal heel goed, hij schreef in 1984 een prachtig commentaar op een Engelse vertaling ervan, maar een verwijzing naar het *Notizenjournal* ontbreekt in dit boek. Gauss schreef zijn baanbrekend werk *Disquisitiones arithmeticae* in 1798 op 21-jarig leeftijd en het werd gepubliceerd in 1801; daarin beschrijft Gauss details en voorbeelden over de constructie van de regelmatige 17-hoek, §345 en verder, en ten slotte bewijst Gauss een *voldoende* conditie op n, in de uitspraak zoals boven vermeld. In dit werk vinden we *geen bewijs van het feit dat de conditie ook nodig is* (dat andere waarden van n niet een construeerbare n-hoek geven). Waarom behandelt Gauss dit niet in zijn *Disquisitiones arithmeticae*? Ik ken geen tekst van Gauss waar de Gauss–Wantzel-stelling volledig bewezen wordt. Daarom ben ik het niet eens met de bewering van de auteur: "nor has anyone doubted that Gauss knew how to prove the claim". Is dit een feit of een mening van de auteur?

Van mijn collega Henk Bos heb ik veel geleerd, onder andere: *trek geen conclusies die je niet kunt maken op grond van de geschreven tekst van de auteur*. We hebben de neiging te concluderen dat de grote wiskundigen, waar we iets van bestuderen, iets niet kónden missen wat we nu zo evident vinden. In al het bekende werk van Gauss vinden we wel de uitspraak, maar niet een compleet bewijs van de Gauss–Wantzel-stelling. Wantzel publiceerde een bewijs in 1837 (kleine lacunes werden later aangevuld). Wat was de reactie van Gauss daarop?

In 1829–1830 publiceerden Nikolai Ivanovich Lobachevsky en in 1832 János Bolyai onafhankelijk van elkaar de beginselen van de hyperbolische meetkunde. Gauss vertelde aan de vader van Bolyai dat hij deze al ontwikkeld, maar nooit gepubliceerd had. Echter, ik ken geen reactie van Gauss op het werk van Wantzel. Daarom kan ik alleen maar concluderen dat de volledige omvang van de Gauss–Wantzel-stelling vermoed werd door Gauss en mogelijk pas later bewezen werd. Ik denk dat lezers veel zouden leren als deze details vermeld zouden zijn in dit boek.

Een gangbare mening is: "Gauss stated without proof that this condition was also necessary, but never published his proof." Een prachtig onderwerp voor historisch onderzoek; helaas geeft dit boek onvoldoende details en niet genoeg verwijzingen omtrent deze fascinerende vraag om tot verder onderzoek en conclusies te komen. Wat begreep Gauss van wat later de Galoistheorie zou heten?

Ik vind een van de meest fascinerende aspecten van beschouwingen over de geschiedenis van de wiskunde dat je lijnen van ontwikkeling beschrijft, en ziet hoe eerdere ideeën een kiem kunnen zijn voor een nieuwe theorie, de 'flow of mathematics'. Naar mijn mening komt dit aspect te weinig aan de orde, worden grote lijnen te weinig uitgewerkt. Ik geef twee voorbeelden.

In Hoofdstuk 13, Jordan's *Traité*, pp. 149–161, lezen we: "The book that established group theory as a subject in its own right in mathematics [...]." De auteur beschrijft dit werk vanuit één aspect: "Although there was a great deal more to Jordan's 'Traité' than a discussion of Galois theory, it will help to stay close to the study of quartic and quintic equations." We zien de expert bij uitstek die hier aan het woord is, mooi om te lezen.

Onder de veelbelovende titel van 13.2 'Early group theory' wordt naar mijn smaak niet voldoende verteld wat er vóór dit invloedrijke boek van Jordan aan groepentheorie werd gedaan. De abstracte definitie van een groep is niet van Jordan afkomstig: op pagina 282, pas in Hoofdstuk 27 van dit boek vind ik: "The first person to try to axiomatise the group concept was Cayley in 1849" (zonder een verwijzing in Hoofdstuk 13). Het was goed geweest om aan te geven wat er aan berekeningen in groepen en beschouwingen vóór Jordan gedaan was (een prachtig onderwerp, met veel aspecten) en hoe Jordan daar op verder bouwt; kruisverwijzingen tussen verschillende hoofdstukken zouden helpen. De focus op één aspect geeft informatie, maar geeft onvoldoende perspectief over dit onderwerp. De historische, grote lijn wordt verbrokkeld gegeven, een paar keer begonnen, zonder kruisverwijzingen, en niet afgemaakt in dit boek.

Een ander voorbeeld. In 27.3 'Dickson's classification of finite simple groups', pp. 286–288, wordt beschreven hoe reeds in 1901 dit aspect van abstracte algebra van een indrukwekkende literatuurlijst en van prachtige classificaties voorzien werd. Magnus schreef daarover in 1958: "a milestone in the development of modern algebra". Waarom geeft de auteur niet aan wat er daarna aan dit onderwerp gedaan is? Een verwijzing naar zijn eigen artikel (Gray, 1999) had hier gegeven kunnen worden; de lezer had de informatie kunnen krijgen dat volgens sommige specialisten de genoemde classificatie nu nog steeds niet compleet is (er zijn heel goede verwijzingen). Deze historische, grote lijn wordt niet afgemaakt in dit boek. Een gemiste kans om dit fascinerende onderwerp in volle omvang te belichten.

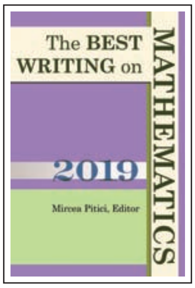
Zeker een boek bedoeld voor 'students' moet een voorbeeld zijn van wiskundige precisie. Een zin als: "Fermat had indeed shown that there were no integer solutions to $x^4+y^4=z^4$" (pagina vi) geeft pas de juiste informatie als je de beperking tot *positieve* gehele getallen maakt. Bij de notatie van een equivalentierelatie treffen we zowel $\mathrm{mod} n$ als $\mathrm{mod}\, n$, als $(\mathrm{mod.}\ n)$, als (n), als $(\mathrm{mod}\ n)$ aan; hoe kan iemand een analyse schrijven over werk van Gauss met deze wirwar van notaties? Wat is de boodschap die deze auteur heeft voor zijn lezers: "You will have to absorb mathematical terms and definitions [...]" terwijl elementaire precisie ontbreekt?

In Appendix H 'Curves and projective space' behandelt de auteur in vier pagina's een onderwerp waar een heel leerboek aan gewijd kan zijn, waar je een heel semester onderwijs over kunt geven. Voor iemand die dit onderwerp begint te bestuderen is dit warrige verhaal hier onbegrijpelijk. Mededelingen worden gedaan over begrippen die niet goed gedefinieerd zijn. Een ontsporing als "intersection points with multiplicity, so a point of tangency is counted twice" maakt de chaos compleet.

Ook hier een gemiste kans: snijpuntsmultipliciteiten is een prachtig onderwerp. Met elementaire middelen kom je al heel ver. Een elementaire tekst over het geval van vlakke algebraïsche krommen is eenvoudig en precies te geven. Een volledig begrip in het algemene geval werd pas met moeite verkregen: prachtige klassieke en moderne lijnen door elkaar heen; complete verwijzingen zijn niet moeilijk te geven. Waarom niet óf Appendix H weglaten, óf een correcte, meer bescheiden tekst met een paar verwijzingen naar voortreffelijke leerboeken die hierover geschreven zijn, en die juiste uitspraken doen en correcte bewijzen leveren?

Conclusie: Dit boek geeft materiaal voor het bestuderen van episodes uit het ontstaan van de 'moderne algebra'. Aparte hoofdstukken geven een mooi inzicht in het materiaal dat daarin behandeld wordt. Helaas ontbreekt in veel gevallen het verband tussen verschillende hoofdstukken. Hetzelfde geldt voor de grote, historische lijn. Ook ontbreken vaak verwijzingen. De auteur behandelt onderwerpen vaak uit het te beperkte perspectief van een concreet voorbeeld. Bovendien ontbreekt een index op onderwerpen en trefwoorden. Het boek biedt een mooie uitdaging om historisch inzicht te ontwikkelen, al is het nodig om dit werk kritisch te lezen.

Frans Oort



Mircea Pitici (ed.)

Best Writing on Mathematics 2019

Princeton University Press, 2019
xvi + 272 p., prijs $ 24.95
ISBN 9780691198354

The *Best Writing on Mathematics 2019* is het tiende deel uit een reeks van boeken met Mircea Pitici als editor. Het boek bundelt 18 in 2018 gepubliceerde artikelen, bedoeld voor een breed lezerspubliek, over de rol, het belang en de dynamiek van wiskunde in de hedendaagse maatschappij. Achter in het boek staat een lange lijst 'Notable Writings' van artikelen die het net niet gehaald hebben.

Het eerste artikel, van Moon Duchin, gaat over 'Gerrymandering', de in de Verenigde Staten voorkomende praktijk van het veranderen van de grenzen van kiesdistricten om verkiezingsuitslagen te manipuleren. Een probleem met interessante combinatorische aspecten. Het 18e en laatste artikel is van de hand van Melvyn Nathanson. Hij bespreekt Erdős' laatste levensdagen en zijn eulogie uitgesproken in 1996 en een heroverweging hiervan ter gelegenheid van Erdős' 100ste geboortejaar in 2013.

Het achtste en langste (30 pagina's) van de 18 artikelen is van Neil Sloane met als titel 'The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)'. Sloane is al in 1965, als student, met EIS begonnen. In 1973 verscheen een boek over EIS, en sinds 1995 is EIS online te bezoeken (en werd het dus OEIS). Vanaf 2010 is er een gemodereerde wiki die onderhouden wordt door vrijwilligers. Alle ingangen hebben een 6-cijferig nummer voorafgegaan door de letter 'A'. Toen de teller de kwart miljoen begon te naderen, hebben de editors van OEIS bepaald welk rijtje te beurt viel voor ingang $\mathrm{A}250000$. De winnaar werd het rijtje 'Peacable Queens', met 'Circles in the plane' als tweede. Beide worden uitgebreid besproken in de bijdrage van Sloane aan dit boek.

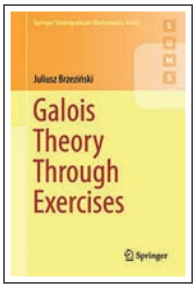
$\mathrm{A}250000$ is het rijtje waarvan de n-de term het grootste gehele getal m is om op een $n\times n$-schaakbord m witte en m zwarte koninginnen te kunnen plaatsen zo dat geen der koninginnen door een koningin van de andere kleur wordt aangevallen. Alleen de eerste dertien termen van $\mathrm{A}25000$ zijn bekend.

Een van de vele andere door Sloane besproken rijtjes is $\mathrm{A}173426$. Het gaat hier om priemgetallen waarvan de decimale representatie oploopt van 1 tot m en daarna weer afloopt van $m-1$ tot 1. Zo is 12345678910987654321, als term van $\mathrm{A}173426$ met $m=10$, een priemgetal van twintig cijfers. De volgende in het rijtje heeft $m=2446$, de daaropvolgende term is nog onbekend.

Het volgende artikel is 'Mathematics for Big Data' dat door Alessandro Di Bucchianico et al. — het Big Data Team van het 4TU Applied Mathematics Institute — gepubliceerd is in NAW 5/19(4), december 2018, pp. 282–286. De auteurs merken op dat de invloed van wiskunde op de toename van kennis en begrip wat onderbelicht is, terwijl hier het effect van gebruik van slimme wiskunde zeker zo groot is als de wet van Moore in de micro-elektronica. De auteurs beschrijven een aantal voorbeelden van wiskunde voor 'Big Data': zoekmachines, virtuele prototypering voor fabricage, data assimilatie, 'web data analytics', 'compressed sensing' bij MRI-beelden in de gezondheidszorg, en 'recommender systems' zoals door Amazon en Bol.com gebruikt worden. De nadruk in dit artikel ligt op toepassingen, waarbij betoogd wordt dat wiskunde toepassingen nodig heeft en omgekeerd.

Het is een interessante bundel met voor elk wat wils.

Ronald Aarts



Juliusz Brzeziński

Galois Theory Through Exercises

Springer Undergraduate Mathematics Series
Springer, 2018
xvii + 293 p., prijs € 36,39
ISBN 9783319723259

Zoals bekend gaat de klassieke Galoistheorie over de voorwaarden waaronder er radicale oplossingen bestaan voor de nulpunten van polynomen in één onbekende. De meeste leerboeken over Galoistheorie starten bijvoorbeeld met de formules van Cardano en Ferrari voor radicale oplossingen voor polynomen van graad drie en vier en vervolgens wordt dan de vraag gesteld of er ook radicale oplossingen zijn voor polynomen van hogere graden. Na invoering van een heel begrippenapparaat en het bewijzen van een aantal stellingen komt men vrij snel tot het bewijs van de hoofdstelling van de Galoistheorie die het bijectief verband vastlegt tussen de deellichamen van een Galoisuitbreiding en de ondergroepen van de Galoisgroep. Het beantwoorden van de voornoemde vraag is dan in principe een toepassing van deze hoofdstelling.

Men kan de leerboeken ordenen naar de mate waarin ze naast de Galoistheorie voorbeelden, opgaven en antwoorden bevatten. Welnu, er zijn zeker twee uitersten: aan de ene kant het boek *Galois Theory* van Emil Artin en aan de andere kant het hier besproken boek van Juliusz Brzeziński. Het boek van Artin is eigenlijk geschreven door twee auteurs. Artin schrijft zelf het gedeelte dat de hoofdstelling bevat en laat het schrijven van de toepassing over aan Arthur Milgram. De formules van Cardano of Ferrari vindt men niet in dit boek. Afhankelijk van de druk zult u zien dat de voorbeelden in dit boek op één hand te tellen zijn en dat het geen enkele opgave bevat. Dat het boek *Galois Theory Through Exercises* van Brzeziński het andere uiterste is, doet de titel al vermoeden. Er is overigens ook een relatie met het boek van Artin. In het voorwoord schrijft Brzeziński dat hij in de jaren zestig van de vorige eeuw al colleges gaf en dat men toen noodgedwongen vaak gebruikmaakte van het boek van Artin of een gedeelte uit het bekende algebraboek van Van der Waerden. Beide boeken blinken niet uit door voorbeelden en opgaven. Brzeziński heeft destijds voor zijn studenten sets van opgaven met uitwerkingen gemaakt en deze presenteert hij nu samen met de Galoistheorie in boekvorm. Een prima idee.

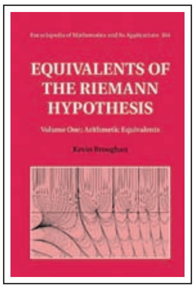
Het boek van Brzeziński bestaat uit negentien hoofdstukken en een appendix. Het appendix bevat de benodigde basiskennis. De eerste vijftien hoofdstukken behandelen de volgende onderwerpen: het oplossen van algebraïsche vergelijkingen, uitbreidingen van lichamen, polynomen en irreducibiliteit, algebraïsche uitbreidingen, splijtlichamen, automorfismengroepen van lichamen, normale uitbreidingen, separabele uitbreidingen, Galoisuitbreidingen, cyclotomische uitbreidingen, Galoismodules, oplosbare groepen, oplosbaarheid van vergelijkingen, meetkundige constructies en het berekenen van Galoisgroepen. Dit zijn de onderwerpen die men tegenwoordig in de meeste boeken over Galoistheorie aantreft.

Kenmerkend voor de eerste vijftien hoofdstukken is dat die elk uit twee delen bestaan: het eerste deel bevat definities en stellingen *zonder* bewijzen en het tweede deel bestaat uit opgaven waaronder ook een gering aantal opgaven met een softwarepakket. Het totaal der opgaven is nagenoeg 200.

Hoofdstuk 16 bevat nog eens circa 100 extra opgaven met soms een aanwijzing of een verwijzing. De bewijzen van alle stellingen vindt men in hoofdstuk 17. De oplossingen van de opgaven vindt men in de hoofdstukken 18 en 19; in hoofdstuk 18 staan aanwijzingen en antwoorden en in hoofdstuk 19 voorbeelden en geselecteerde oplossingen. Voor elke opgave moet men beide hoofdstukken raadplegen. Het zal wel duidelijk zijn dat men bij het doorwerken van het boek veelvuldig bladert van het ene naar het andere hoofdstuk. Ik denk dat het boek *rustiger* was geworden als de bewijzen van de stellingen gewoon bij elk hoofdstuk stonden en als de oplossingen van de problemen niet gesplitst waren over twee aparte hoofdstukken. Op sommige plekken in het boek kan men ook gebruikmaken van het softwarepakket Maple; het is maar een heel klein gedeelte van het boek. Ik denk dat het beter was geweest het boek niet te verbinden met een specifiek softwarepakket omdat het dan het risico loopt snel te verouderen op dat punt en dat is in dit geval zeker jammer omdat de rest als het ware eeuwigheidswaarde heeft.

Ik heb enkel kritiek op de vorm van het boek; op de inhoud valt niets af te dingen. Alles is zeer goed te volgen en uitgewerkt. Het bestuderen van de Galoistheorie in wisselwerking met veel voorbeelden en opgaven met uitwerkingen (de oplossingen van de oefeningen beslaan ongeveer tachtig pagina's, een derde van het boek zonder het appendix) is zeer nuttig en voor zo'n aanpak is dit boek zeker geschikt.

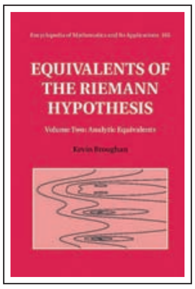
Math Dicker



Kevin Broughan

Equivalents of the Riemann Hypothesis
Volume 1: Arithmetic Equivalents

Cambridge University Press, 2017
xx + 325 p., prijs £99.99
ISBN 9781107197046



Kevin Broughan

Equivalents of the Riemann Hypothesis
Volume 2: Analytic Equivalents

Cambridge University Press, 2017
xix + 491 p., prijs £120.00
ISBN 9781107197121

These two volumes give a survey of conjectures equivalent to the Riemann Hypothesis (RH). The first volume deals largely with statements of an arithmetic nature, while the second part considers more analytic equivalents.

The Riemann zeta function, is defined by

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{1}$$

with $s = \sigma + it$ a complex number having real part $\sigma > 1$. It is easily seen to converge for such s. By analytic continuation the Riemann zeta function can be uniquely defined for all $s \neq 1$. In $s = 1$ it has a simple pole. In 1859 Bernhard Riemann published 'Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse'. This only 9-pages-long paper, the only published work of Riemann on number theory, is without doubt the most important paper ever written in analytic number theory; indeed it is foundational, as Riemann makes essential use of s being a complex variable (allowing methods of complex analysis to be applied), whereas a century earlier Leonhard Euler only considered $\zeta(s)$ for real values of s.

The uniqueness of prime factorization of the integers finds its analytic counterpart in the identity $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ valid for $\sigma > 1$ (where the product extends over all the primes p). Given this identity it is perhaps not so surprising that the behaviour of $\zeta(s)$ is very closely related to the distributional properties of the primes. The Riemann Hypothesis (formulated in the 1859 paper) states that all the zeros in the critical strip $0 < \sigma < 1$ are on the line $\sigma = \frac{1}{2}$. If true, it implies that the prime counting function $\pi(x)$, that counts the primes $p \leq x$, behaves in a fairly regular way. Indeed, Helge von Koch proved in 1901 that the RH is equivalent with $\pi(x) = \int_2^x du/\log u + O(\sqrt{x}\log x)$. The celebrated prime number theorem says that $\pi(x)$ asymptotically behaves as $x/\log x$. That is a much weaker statement and is equivalent with there being no zeta zeros on the line $\sigma = 1$. That there are no zeros with $\sigma > 1$ is a consequence of the prime product identity for $\zeta(s)$.

It would go too far here to discuss all chapters and I will limit myself to some chapters that are either close to my mathematical expertise or those discussing some of the most famous RH equivalences. Most of the criteria have their own chapter devoted to them, Chapter 10 has various criteria that are discussed more briefly. A nice example is Redheffer's criterion. It states that RH holds true if and only if for every $\epsilon > 0$, we have $\det(R_n) \le C_\epsilon n^{1/2+\epsilon}$, where $R_n = (r_{ij})$ is the $n \times n$ matrix with $r_{ij} = 1$ if $j = 1$ or i divides j, and $r_{ij} = 0$ otherwise.

In Chapter 4, after some chapters on history, basic properties of $\zeta(s)$ and one with derivations of some basic estimates involving prime numbers, Schoenfeld's criterion is proved. It says that the RH is equivalent to the inequality that $|\psi(x) - x| \le \sqrt{x}(\log x)^2/(8\pi)$ for $x \ge 74$, where $\psi(x) = \sum_{p^n \le x} \log p$. The sum is over all prime powers $p^n \le x$ and each of those chips in a weight $\log p$. The function $\psi(x)$ turns out to be easier to study than $\pi(x)$, on the other hand usually results on $\psi(x)$ can be easily translated to results on $\pi(x)$.

Schoenfeld's criterion is important, but not very surprising. More surprising is Robin's criterion which states that, for $n > 5040$,

$$\sum_{d\,|\,n} \frac{1}{d} < e^\gamma \log\log n, \tag{2}$$

if and only if the Riemann Hypothesis holds true (where γ denotes Euler's constant). Traditionally (2) is written as $\sigma(n) < e^\gamma n \log\log n$, where $\sigma(n) = \sum_{d\,|\,n} d$ denotes the sum of divisors of n. The author speaks of the Ramanujan–Robin criterion as Ramanujan proved that (2) holds, under RH, for all n sufficiently large. Chapter 8 opens with a discussion of a paper on this criterion, where we (Choie, Lichiardopol, the reviewer and Solé) establish that the inequality holds for a large class of integers. We showed, for example, that all odd integers > 9 satisfy (2) (thus to wit: we solved half of RH!). In addition we showed that all 5-free integers > 5040 satisfy (2), where an integer is said to be k-free if no k^{th} power of an integer > 1 divides it (otherwise it is said to be k-full). It then continues to discuss various improvements of our work (the author and Trudgian showed for example that the inequality holds for 11-free integers). Not discussed, but fresh on the arXiv is the result of Morrill and Platt that RH is true if and only if (2) holds for all 20-full integers.

We say that N is a colossally abundant number if for some $\epsilon > 0$ the function $\sigma(n)/n^{1+\epsilon}$ attains its maximum at N. It is not difficult to see that if a counterexample to (2) exists for some $n > 5040$, there exists a colossally abundant counterexample. Chapter 9 is devoted to a study of these numbers and some variations.

An inequality closely related to that of Robin is

$$\frac{n}{\varphi(n)} < e^\gamma \log\log n. \tag{3}$$

This is now called the Nicolas inequality. The intriguing work of mostly Nicolas related to his inequality and refinements thereof are discussed in Chapter 5.

About five chapters in total are devoted to this and closely related material, thus making it one of the main topics discussed in Volume 1.

I will now discuss Volume 2, which draws on a rather broader spectrum of mathematical methods and ideas than Volume 1.

Marcel Riesz showed in 1916 that RH is equivalent to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!\zeta(2n)} x^n \le C_\epsilon x^{1/4+\epsilon}.$$

This implies that the values of $\zeta(s)$ at all even integers determine the truth of RH. Hardy and Littlewood proved a variation where all the values of $\zeta(s)$ at odd integers > 1 appear. In 2005 Luis Báez-Duarte unified and generalized the existing series equivalences, giving rise to a very large family. Chapter 2 provides the details.

One of the most beautiful and surprising equivalences to the Riemann Hypothesis is related to Banach and Hilbert space methods. By $\lfloor r \rfloor$ we denote the entire part of a real number r. Bertil Nyman in 1950 in his PhD thesis (!) proved that RH is true if and only if the linear span of the functions $k_\alpha(x) := \lfloor \alpha/x \rfloor - \alpha \lfloor 1/x \rfloor$ is dense in the Hilbert space $L^2(0,1)$ of square integrable functions on the interval $(0,1)$, where $0 < \alpha \le 1$. Arne Beurling, the PhD supervisor of Nyman, extended the criterion to L^p-spaces. These intriguing results are discussed in Chapter 3.

Put

$$\lambda_k := \sum_\rho \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^k\right),$$

where the sum is over the non-trivial Riemann zeta zeros. Li's celebrated criterion says that RH is true if and only if $\lambda_k > 0$ for every $k \ge 1$. Note that $\lambda_1 = \sum_\rho 1/\rho$. It was already known to Riemann that $\lambda_1 = 1 + \gamma/2 - \log(4\pi)/2$. Li's result inspired a lot of follow up work.

The Riemann zeta function after multiplication by some simple factors can be made real on the line $\sigma = \frac{1}{2}$. This function can be written as the Fourier transform $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) e^{izu} du$, with $\Phi(u)$ completely explicit. George Pólya considered the family of deformations

$$\Theta_\lambda(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda u^2} \Phi(u) e^{izu} du.$$

RH is equivalent with $\Theta_0(z)$ having only real zeros. It can be shown there is a unique finite real number Λ such that $\Theta_\lambda(z)$ has only real zeros if and only if $\lambda \ge \Lambda$. The constant Λ is now called the de Bruijn–Newman constant. RH is equivalent with $\Lambda \le 0$. De Bruijn showed in 1950 that $\Lambda \le \frac{1}{2}$. Newman showed that Λ exists, i.e. that $\Lambda > -\infty$. The lower bound was improved many times over the years and the best we know currently is that $-10^{-11} < \Lambda < \frac{1}{2}$.

Chapter 6 concerns a criterion of 2006 from Cardon and Robert which in essence is about approximation of $\zeta(\frac{1}{2} + iz)$ by a particular sequence of orthogonal polynomials.

Amoroso showed that if $A_N(x) = \prod_{n \le N} \Phi_n(x)$ is the product of the first N cyclotomic polynomials, then its so-called height, for any $\epsilon > 0$, is bounded above by $C_\epsilon N^{\lambda+\epsilon}$ (with C_ϵ a constant) if and only if $\zeta(s)$ has no zero with real part exceeding λ. This result is proved in Chapter 7.

Chapter 9 concerns Weil's version of the explicit formula. For a large class of test functions this relates a sum involving Riemann zeros to a sum involving primes and some remaining terms that can be regarded as associated with the so-called prime at infinity. By a judicious choice of test functions this allows one to prove many results.

Weil's work on explicit formulae has been very influential and also was an input for a proof of the RH for curves over finite fields (in the case of elliptic curves a proof is given here). It has been the goal of many to use this approach for RH and generalizations thereof. Even though Weil provided a bridge between the two cases and meanwhile vast and deep new mathematical theories have been developed, Weil's bridge remains to be crossed…

The book concludes with several appendices, giving more background material, for example on the Fourier, Laplace and Mellin transform. There is also a manual for a set of functions written to assist the reader to reproduce and possibly extend, calculations mentioned in the book.

The first volume falls mostly in the realm of computational number theory and the author rederived some results, for example some of the classical ones of Rosser and Schoenfeld. The second volume draws on much more areas of mathematics and everybody, I think, will be in for some surprises there. For the results stated mostly proofs are given. This requires a broad range of mathematical tools to be used. Sometimes the author cleaned up some of the original proofs.

All in all these books serve as a good introduction to a wide range of mathematics related to the Riemann Hypothesis and make for a valuable contribution to the literature. They are truly encyclopedic and I am sure will entice many a reader to consult some literature quoted and who knows, eventually make an own contribution to the area.

I thank Alexandre Kosyak for helpful comments on several earlier versions of this review. *Pieter Moree*

Jennifer Beineke, Jason Rosenhouse (eds.)

The Mathematics of Various Entertaining Subjects
Volume 3: The Magic of Mathematics

Princeton University Press, 2019
xxi + 325 p., prijs $49.95
ISBN 9780691182582

Dat recreatieve wiskunde heel vaak aan de basis heeft gestaan van belangrijke wiskundige doorbraken zal bij een ieder van u inmiddels wel bekend zijn. Minder bekend (althans bij mij) is dat er sinds 2013 een tweejaarlijkse MOVES (Mathematics of Various Entertaining Subjects) Conference wordt georganiseerd door het MOMATH (Museum of Mathematics) dat sinds 2012 zijn deuren heeft geopend in New York. Ook van de meest recente MOVES-conferentie (in 2017 georganiseerd, met het thema The Magic of Mathematics) is nu dus een boek verschenen (net als de delen 1 en 2 samengesteld door math-professors Beineke en Rosenhouse) waar de afwezige alsnog (en de aanwezige wederom) zijn/haar hart kan ophalen aan in dit geval 18 artikelen (respectievelijk zes, vijf, vier en drie in de vier hoofdcategorieën 'Puzzles and Brainteasers', 'Games', 'Algebra and Number Theory' en 'Geometry and Topology'), waarbij een artikel uiteraard telkens uitvoerig een onderwerp behandelt in een van de genoemde categorieën. Soms is een artikel niets anders dan een serie problemen, gelukkig met oplossingen die — nog gelukkiger — vrijwel direct geplaatst staan achter de problemen, dus geen nodeloos geblader de hele tijd, en onder andere dat maakt dit tot een prettig, helder opgebouwd en sowieso zeer leesbaar boek.

Een eerste voorbeeld van een intrigerend probleem met een verrassende oplossing (zie verder) — uit de deelcategorie 'Probability in Your Head' — is het probleem 'Random Rice'. In de plaatselijke rijstwinkel staat een machine die door de knop een keer in te drukken telkens een willekeurige (uniform verdeelde) hoeveelheid rijst tussen 0 en 1 beker levert. Hoe vaak gemiddeld moet je de knop indrukken om in totaal tenminste 1 volle beker rijst te hebben? Het antwoord hierop is (uiteraard) niet het wellicht verwachte twee keer.

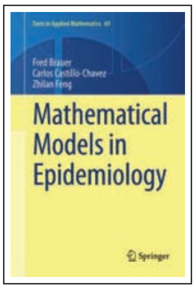
Minstens zo intrigerend is het probleem er direct achter ('Six with No Odds'), namelijk hoe vaak moet je met een gewone dobbelsteen gooien tot je een 6 gooit, als je op weg naar die 6 nooit een oneven aantal ogen gooit? Even verrassend is het weer dat het antwoord niet het verwachte aantal 3 is.

Verrast te worden is prettig in elk boek — zeker in een boek als dit — en gelukkig gebeurt dat heel vaak. Inherent aan de gekozen opzet is de kans al vrij klein dat je van het onderwerp al wat af weet (want vaak geheel nieuw), laat staan dat je een in een artikel genoemd probleem zelf al zou kennen. Maar zelfs als je een liefhebber of zelfs een kenner zou zijn van bijvoorbeeld balansproblemen dan kom je (in de deelcategorie 'Coins and Logic'; lees ook de boeken van de uiteraard ook in het boek genoemde grootmeester van de logica Raymond Smullyan) toch vaak weer iets tegen wat je nog niet kende. Voor dit (derde) probleem definiëren we allereerst een *reverse scale* (als tegenhanger van een *true scale*) als een weegschaal die bij twee gelijke gewichten in balans is maar bij twee verschillende gewichten de lichtste aanwijst als zwaarste en andersom (heel eenvoudig te detecteren door 1 munt op een van de twee schaaltjes te leggen). Nu het probleem. Er zijn drie identiek uitziende en even zware weegschalen die *true* of *reverse* kunnen zijn. Je hebt de beschikking over minstens drie munten en precies één daarvan is vals en lichter dan de andere munten. Wat is het kleinste aantal wegingen dat nodig is om erachter te komen van welk type (*true* of *reverse*) elke weegschaal is? Ook hier weer een uiterst verrassend antwoord en een nog verrassender redenering.

Ook al zijn sommige artikelen wat theoretischer van aard, altijd wordt de lezer (net als de toeschouwer bij de oorspronkelijke presentaties mag ik aannemen) meegenomen door het geven van geschikte instap- of tussenproblemen en het bewijzen van toepasselijke lemma's. Verder is de benodigde wiskundige kennis op een enkel uitstapje na maximaal die van een eerstejaarsstudent wiskunde.

Ik zal de verleiding moeten weerstaan een samenvatting te geven van of interessante problemen te citeren uit elk van de 18 artikelen, maar ik denk dat het noemen van nog wat meer onderwerpen die in dit boek de revue passeren meer dan genoeg uw interesse kan opwekken en dat dit fraaie boek heel veel denk- en leesplezier zal genereren. Welnu, mocht u iets meer (en vooral iets nieuws) willen weten over flexagons, Japanse KenKen-puzzels, bingoparadoxen, het getal 142857, de spel-app Khalou, het kortste routeprobleem in een driehoekig rooster, partities van kwadraten in positieve natuurlijke getallen waarvan de omgekeerden som 1 hebben, balansproblemen en LEGO-bouwwerken en nog veel meer en bovendien over een aantal meer dan verbluffende kaarttrucs wilt beschikken (en tevens iets wilt weten over de (kaart)magie van Charles Sanders Peirce, één van de grootste zo niet de grootste van alle Amerikaanse logici), dan is dit het boek. Ongetwijfeld zijn de mij niet bekende eerder verschenen delen (Volume 1 en Volume 2) op dezelfde manier samengesteld en even onderhoudend als dit derde deel in een serie die wat mij betreft nog heel lang mag doorlopen. Wilt u het fijne weten van het hoe en waarom van de antwoorden op de drie hierboven geformuleerde problemen (respectievelijk e, $1\frac{1}{2}$ en 1), dan zult u tot aanschaf moeten overgaan. *Joop van der Vaart*

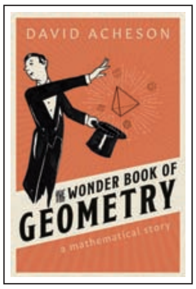
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Fred Brauer, Carlos Castillo-Chavez, Zhilan Feng

Mathematical Models in Epidemiology

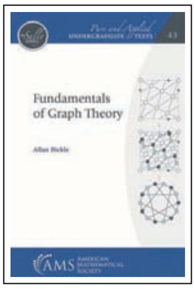
Springer, 2019
ISBN 9781493998289
springer.com/9781493998265



David Acheson

The Wonder Book of Geometry
A Mathematical Story

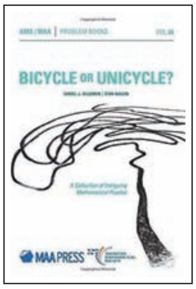
Oxford University Press, 2020
ISBN 9780198846383
global.oup.com/academic/product/9780198846383



Allan Bickle

Fundamentals of Graph Theory

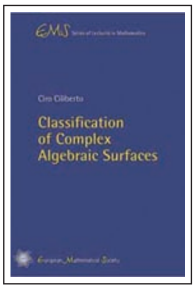
American Mathematical Society, 2020
ISBN 9781470453428
bookstore.ams.org/amstext-43



Daniel J. Velleman, Stan Wagon

Bicycle or Unicycle?
A Collection of Intriguing Mathematical Puzzles

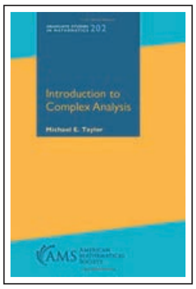
American Mathematical Society, 2020
ISBN 9781470447595
bookstore.ams.org/prb-36



Ciro Ciliberto

Classification of Complex Algebraic Surfaces

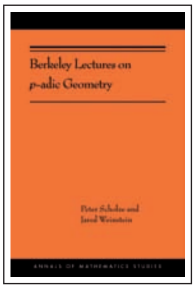
American Mathematical Society, 2020
ISBN 9783037192108
bookstore.ams.org/emsserlec-31



Michael E. Taylor

Introduction to Complex Analysis

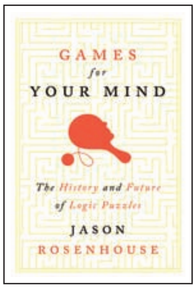
American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470452865
bookstore.ams.org/gsm-202



Peter Scholze, Jared Weinstein

Berkeley Lectures on p-adic Geometry

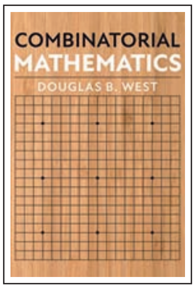
Princeton University Press, 2020
ISBN 9780691202082
press.princeton.edu/books/paperback/9780691202082/berkeley-lectures-on-p-adic-geometry



Jason Rosenhouse

Games for Your Mind
The History and Future of Logic Puzzles

Princeton University Press, 2020
ISBN 9780691174075
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691174075/games-for-your-mind



Douglas B. West

Combinatorial Mathematics

Cambridge University Press, 2020
ISBN 9781107058583
cambridge.org/9781107058583

François Digne, Jean Michel

Representations of Finite Groups of Lie Type
Second Edition

Cambridge University Press, 2020
ISBN 9781108722629
cambridge.org/9781108722629