Jovan Gerbscheid
*student wiskunde University of Cambridge*
*jovan.gerbscheid@gmail.com*

**Evenement** Internationale Wiskunde Olympiade 2020

# Punten in de anderhalvemetersamenleving scheiden met een lijn

**Bij de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) 2020 heeft het Nederlandse team twee gouden, een zilveren en drie bronzen medailles in de wacht gesleept. Deze prestigieuze wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren zou in juli in Sint-Petersburg, Rusland, worden georganiseerd, maar werd in plaats daarvan half september als wedstrijd-op-afstand in alle deelnemende landen gehouden. Leerlingen werkten op twee achtereenvolgende wedstrijddagen individueel aan in totaal zes opgaven van voor hen hoog wiskundig niveau; op elke wedstrijddag kregen ze hiervoor vier en een half uur de tijd. Goudenmedaillewinnaar Jovan Gerbscheid (17), inmiddels student wiskunde in Cambridge, wist de moeilijkste opgave volledig op te lossen, wat in totaal slechts vier van de 616 deelnemers lukte. In dit artikel blikt hij terug op deze opgave over punten die onderling voldoende afstand houden en hoe je die kunt scheiden met een lijn. Inderdaad, een opgave geïnspireerd op de anderhalvemetermaatregel, gecreëerd toen net de hele wereld in een lockdown ging.**

Tijdens de tweede dag van de IMO had ik nog ongeveer twee uur over toen ik opgave 4 en 5 had opgelost. Ik was toen al heel blij omdat ik dacht dat ik een zilveren medaille zou halen. (In 2018 en 2019 zat ik ook in het IMO-team en beide keren behaalde ik een bronzen plak.) Ik had nog nauwelijks aan opgave 6 gewerkt. Ik had vervolgens redelijk snel een zwakker resultaat gevonden dat één punt bleek op te leveren. Uiteindelijk had ik een heel grof bewijs gevonden voor de opgave zelf. Ik ging toen met tijdnood een netversie schrijven waarbij ik nog heel wat details moest toevoegen. Gelukkig bleek ik precies genoeg te hebben opgeschreven voor een volledige oplossing. Met $7+3+0$ punten op dag 1 en $7+7+7$ punten op dag 2, kwam ik in totaal uit op $31$ punten: precies genoeg voor een gouden medaille.

Opgave 6 (zie kader) was bedacht toen de wereldwijde lockdown begon en de punten die onderling afstand $1$ van elkaar houden zijn geïnspireerd op mensen die onderling afstand houden. Bij de opgave mag je de constante $c$ helemaal zelf kiezen, dus resultaten voor kleine $n$ zeggen niet zoveel omdat je $c$ willekeurig klein kunt kiezen. Het gaat juist om willekeurig grote $n$, waarbij het extra lastig is dat de functie $f(n)=cn^{-1/3}$ heel langzaam daalt, dus $cn^{-1/3}$ relatief groot is als je een heel grote $n$ neemt. Omdat het hier alleen om ordes van grootte gaat, kan ik bij berekeningen constanten in principe weglaten.

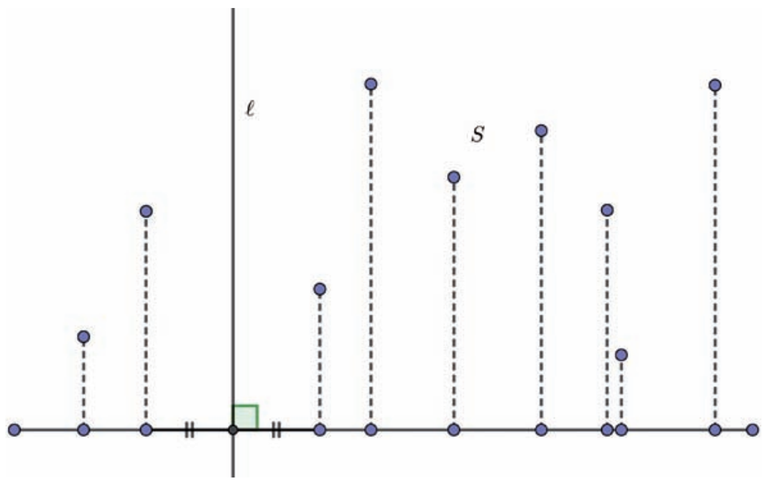
**Opgave 6.** Bewijs dat er een positieve constante $c$ bestaat zodanig dat de volgende uitspraak waar is. Beschouw een geheel getal $n>1$ en een verzameling $S$ van $n$ punten in het vlak zodanig dat de afstand tussen elke twee verschillende punten in $S$ minstens $1$ is. Dan is er een lijn $\ell$ die $S$ scheidt zodanig dat de afstand van elk punt van $S$ tot $\ell$ minstens $cn^{-1/3}$ is. (Een lijn $\ell$ scheidt een verzameling punten $S$ als er een lijnstuk tussen punten van $S$ is dat $\ell$ snijdt.)

**Opmerking.** Zwakkere resultaten waarbij $cn^{-1/3}$ vervangen is door $cn^{-\alpha}$ kunnen beloond worden met punten afhankelijk van de waarde van de constante $\alpha>1/3$.

### Projecties in een bepaalde richting

Om een beetje gevoel te krijgen voor het probleem, ben ik wel begonnen om een paar kleine gevallen te bekijken. Als $n=2$, dan zijn er twee punten met afstand minimaal $1$ en ik moet een lijn vinden tussen die twee punten zodat de afstand tussen de lijn en het dichtstbijzijnde punt maximaal is. Dit kan ik bereiken met een middelloodlijn, die afstand minimaal $\frac{1}{2}$ heeft tot de twee punten. Het geval $n=3$ is al wat lastiger. Dan heb je een driehoek met zijden van lengte minimaal $1$. Als de driehoek scherphoekig is, dan kun je als lijn $\ell$ een middelparallel nemen van de driehoek en de afstand van die lijn tot alle drie de punten is dan $\frac{1}{2}h$, met $h$ de lengte van de corresponderende hoogtelijn in de driehoek. Dit komt echter niet goed als bijvoorbeeld alle drie punten op een lijn liggen, want dan is de hoogte $h=0$. In dat geval kun je een middelloodlijn nemen van twee van de drie punten.

Ik probeerde eerst de lijnen $\ell$ te bekijken in een bepaalde richting en in een bepaald gebied, en daarvan de lijn te nemen




Figuur 1

met de grootste afstand tot de punten uit $S$. Dit kun je als volgt bekijken. Je projecteert alle punten uit $S$ loodrecht op een lijn die loodrecht op de lijnen $\ell$ staat. De afstand van een lijn $\ell$ tot een punt uit $S$ is dan gelijk aan de afstand tussen de projectie van dat punt en de projectie van de lijn $\ell$. Je bent dan op zoek naar een gat tussen twee geprojecteerde punten uit $S$ dat zo groot mogelijk is, want het punt in het midden van zo'n gat heeft een grote afstand tot de geprojecteerde punten uit $S$. Als je nu de lijn $\ell$ kiest die door dat punt gaat, heb je een lijn gevonden met diezelfde grote afstand tot de punten van $S$. Zo vind je in deze richting de $\ell$ met de grootste afstand tot $S$, zie Figuur 1.

Als je $m$ punten hebt in een strook met breedte $b$, krijg je dat de $m$ geprojecteerde punten een lijnstuk met lengte $b$ verdelen in hoogstens $m+1$ intervallen. Als er een punt op de rand van de strook ligt of als twee punten samen vallen bij de projectie, wordt dit minder dan $m+1$, maar dat maakt het alleen maar makkelijker om een groot interval te vinden. Het grootste interval hiervan heeft dus minimaal lengte $\frac{b}{m+1}$, dus kun je een $\ell$ construeren met minimaal afstand $\frac{b}{2(m+1)}$ tot de punten uit $S$ en dat is van de orde van grootte $\frac{b}{m}$. Om aan de voorwaarde te voldoen dat $\ell$ een scheidende lijn is, moet ook nog gelden dat aan beide kanten van de strook een punt van $S$ ligt (niet noodzakelijk op de rand van de strook).

Je kunt de opgave dus als volgt zien: er moet een richting zijn, zodat als je daarin de punten van $S$ loodrecht projecteert, er tussen de punten een relatief groot gat is, namelijk van de orde van grootte $cn^{-1/3}$. Vanwege de voorwaarde dat de punten minimaal afstand $1$ hebben tot elkaar, moeten ze wel een stuk uit elkaar liggen. Daarmee kon ik als volgt de opgave bewijzen voor $\alpha = \frac{1}{2}$. Omdat de punten afstand $1$ van elkaar houden, is er rond elk punt een cirkel met straal $\frac{1}{2}$ zodat die oppervlakte alleen hoort bij dat ene punt, dus de minimale oppervlakte van een gebied dat al deze cirkeltjes bevat is $\frac{1}{4}\pi n$ en is dus evenredig met het aantal punten $n$.

Noem $R$ de straal van de kleinste omgeschreven cirkel van $S$ (alle punten van $S$ liggen binnen of op deze cirkel) en $D$ de grootste afstand tussen twee punten uit $S$. Er geldt dat $R \le D \le 2R$, want je kunt altijd een cirkel construeren met als middelpunt een punt van $S$ en als straal $D$ en die cirkel bevat alle punten van $S$, dus $R \le D$. Daarnaast is de maximale afstand tussen twee punten in een cirkel gelijk aan de diameter, $2R$, dus $D \le 2R$. We concluderen dat $D$ en $R$ dus van dezelfde orde van grootte zijn.

Ik weet nu dat $\pi(R+\frac{1}{2})^2$ minimaal evenredig is met $n$, dus $R$ is minimaal evenredig met $n^{1/2}$, dus ook $D$ is minimaal evenredig met $n^{1/2}$. Ik kan nu alle lijnen $\ell$ bekijken die loodrecht staan op het lijnstuk van lengte $D$ tussen twee punten uit $S$. Er zijn dan $n$ punten en dus is de orde van grootte van de afstand die ik kan bereiken tussen de lijn $\ell$ en de punten van $S$ minimaal van de orde van grootte $\dfrac{D}{n} = \dfrac{n^{1/2}}{n} = n^{-1/2}$. Merk op dat dit inderdaad een scheidende lijn is. Hiermee hebben we het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ bewezen en dit zwakkere resultaat was $1$ van de $7$ punten waard. Wat ik hier heb gebruikt is dat de 'breedte' van $S$ minimaal van de orde van grootte $n^{1/2}$ is, dus het grootste gat is minimaal van de orde van grootte $\frac{n^{1/2}}{n} = n^{-1/2}$.

### Punten aan de rand afsnijden

In het geval dat $D$, de grootste afstand tussen twee punten, van de orde van grootte minstens $n^{2/3}$ is, kunnen we nu de opgave oplossen zoals hierboven, want dan vind ik een $\ell$ met een afstand van de orde van grootte $\frac{n^{2/3}}{n} = n^{-1/3}$. Resteert het geval dat $D$ juist kleiner is dan $n^{2/3}$.

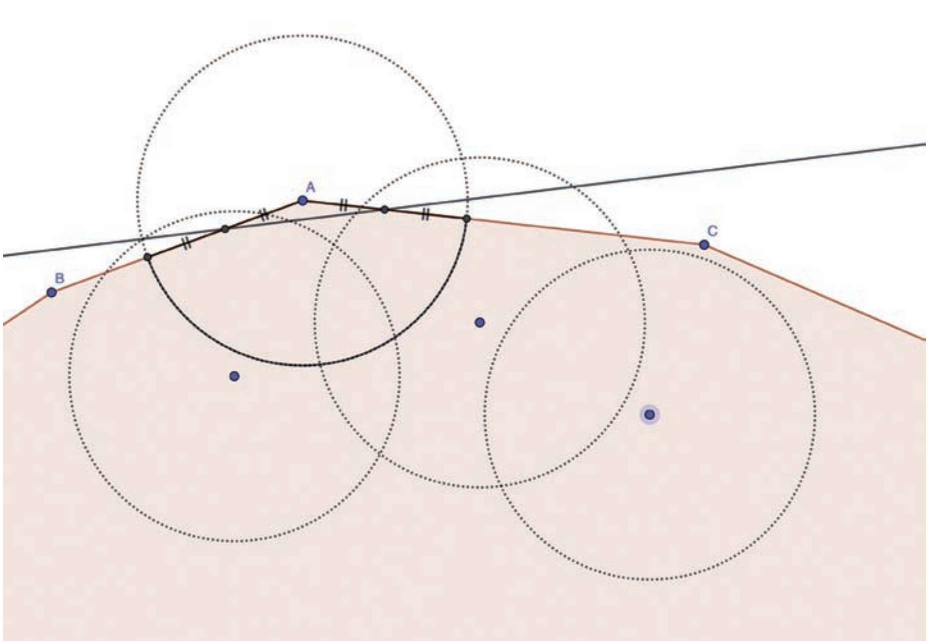
Vervolgens bedacht ik dat een lijn $\ell$ die $S$ in twee ongeveer even grote groepen verdeelt, minder makkelijk een grote afstand heeft tot de punten van $S$ dan een lijn $\ell$ die maar een paar punten van $S$ afsnijdt van de rest. Je kunt je de verzameling $S$ voorstellen als een cirkel die gevuld is met allemaal punten. Dan kun je zien dat een lijn door het midden langs veel meer punten moet gaan dan een lijn die alleen een klein stukje van de cirkel afsnijdt.

Ik probeerde eerst de lijnen $\ell$ te bekijken die maar één punt afsnijden van de andere punten van $S$. Dit kan natuurlijk alleen met de punten die 'aan de buitenkant' van $S$ zitten: de punten uit de rand van het convexe omhulsel van $S$. Ik bekeek een punt $A$ van die rand en de hoek $\angle BAC$ van het omhulsel bij dat punt. Je kunt dan een lijn $\ell$ construeren, zodat die de lijnstukken $AB$ en $AC$ snijdt op afstand $\frac{1}{2}$ van punt $A$; zie Figuur 2. De afstand van deze lijn tot $A$ is dan gelijk aan

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\angle BAC\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\angle BAC\right).$$

Doordat alle punten uit $S$ minstens afstand $1$ tot $A$ hebben, kunnen die niet dichter bij $\ell$ liggen dan $A$. Omdat de hoeken $\angle BAC$ van het convexe omhulsel heel stomp zijn, terwijl de zijden minimaal lengte $1$ hebben, kun je een minimum vinden van de grootte van het convexe omhulsel en dus voor de lengte $D$. Dat was precies wat ik zocht, maar helaas bleek dit niet sterk genoeg om het geval $\alpha = \frac{1}{3}$ te bewijzen.

Vervolgens probeerde ik om meerdere punten van het convexe omhulsel tegelijk af te snijden met een lijn $\ell$. Dit leek wel de gezochte orde van grootte te geven, maar het lukte niet om hier een bewijs van te maken, omdat je last hebt van punten die binnen het convexe omhulsel liggen maar wel vlak bij de lijn $\ell$ kunnen zitten. Bij de uiteindelijke oplossing heb ik dus niet meer apart gekeken naar de rand van het convexe omhulsel.




Figuur 2

### Een strook van breedte $1$

Omdat ik wist dat het convexe omhulsel erg stompe hoeken moest hebben, stelde ik me voor dat het bij benadering een cirkel moest zijn. Vervolgens bekeek ik alle lijnen $\ell$ in een smalle strook aan de zijkant van deze cirkel, met breedte $1$. Ik kan in een bewijs natuurlijk niet zeggen dat $S$ ongeveer een cirkel is, dus ik bekeek de omgeschreven cirkel van $S$ en een strook die de cirkel overlapt en raakt in een punt $P$ van $S$, zie Figuur 3.

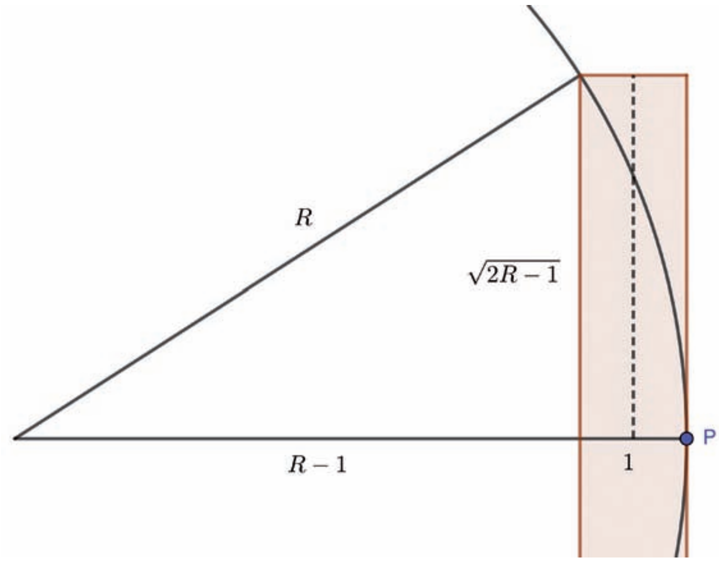
Ik neem hier aan dat $R > 1$, zodat het cirkelsegment dat wordt afgesneden door de strook minder dan de helft van de cirkel is. Ik wist al dat voor willekeurig grote $n$ ook $R$ willekeurig groot moet worden, dus er zijn eindig veel $n$ waarbij $R \leq 1$ mogelijk is. Voor die $n$ kan ik het getal $c$ klein genoeg vinden zodat deze $n$ ook voldoen aan de opgave.

De helft van de lengte van de strook zit in een rechthoekige driehoek waarvan de andere zijdes lengte $R$ en $R-1$ hebben, dus dan geeft Pythagoras $\sqrt{R^2-(R-1)^2} = \sqrt{2R-1}$ voor die derde zijde. De lengte van de strook waar punten van $S$ in kunnen zitten, is dus $2\sqrt{2R-1} = \sqrt{8R-4}$. Om hiermee het aantal punten in die strook af te schatten, verdeelde ik de strook in twee delen van breedte $\frac{1}{2}$. Als twee punten elkaar volgen met een afstand van minder dan $\frac{1}{2}$ binnen een dergelijke strook, is hun onderlinge afstand maximaal $\frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$ en dat mag niet, dus het aantal punten in de twee smallere stroken samen is maximaal $2 \cdot (2\sqrt{8R-4}+1) = 4\sqrt{8R-4}+2$. Dat is van de orde van grootte $\sqrt{R}$, dus ik kan een lijn $\ell$ vinden met afstand tot $S$ van de orde van grootte minimaal

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{\sqrt{R}} = R^{-1/2}.$$

Het is duidelijk dat dit een scheidende lijn is: aan een kant is er al het punt $P$ en aan de andere kant moet ook wel een punt liggen. Immers, als er daar geen punt zou liggen, dan zouden alle punten van $S$ binnen het afgesneden cirkelsegment moeten liggen. Maar dan bestaat er een kleinere omgeschreven cirkel, namelijk met als middellijn de zijde van het cirkelsegment, en die cirkel heeft straal $\sqrt{2R-1}$, wat kleiner is dan de straal $R$ van de kleinste omgeschreven cirkel van $S$. Dit geeft een tegenspraak, dus $\ell$ is een scheidende lijn.

Als $R \leq n^{2/3}$, kan ik hiermee de opgave oplossen, want dan is $R^{-1/2}$ minstens $n^{-1/3}$ en dus minstens van de orde van grootte $cn^{-1/3}$. Anderzijds had ik al gevonden wat ik moet doen als $R \geq n^{2/3}$, want dan is ook $D \geq n^{2/3}$ en dan kan ik de strook bekijken loodrecht op het lijnstuk met lengte $D$. Ik heb dus bij $R \leq n^{2/3}$ en bij $R \geq n^{2/3}$ een constructie om de opgave op te lossen. $\square$




Figuur 3

### Vier jaar training

Ik was uiteraard heel blij met de 7 punten voor deze opgave en ik was heel erg verbaasd dat zo weinig anderen de opgave hadden opgelost, terwijl ik hem wel had opgelost. Het feit dat synthetische meetkunde mijn favoriete onderdeel bij de olympiade is, verklaart dit wellicht, ook al was dit eigenlijk meer combinatorische meetkunde.

Als voorbereiding op de IMO heb ik vier jaar lang meegedaan aan het trainingsprogramma van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Die training bestaat uit huiswerkopgaven, een aantal trainingsdagen en -weekenden en een hele trainingsweek begin juni. Dertig middelbare scholieren doen daaraan mee en daaruit worden elk jaar de zes IMO-teamleden gekozen. Ik heb heel erg veel geleerd van de training en het gaat zeker helpen bij mijn studie wiskunde. Daar ben ik inmiddels mee begonnen: sinds september studeer ik wiskunde in Cambridge.