

## Robbin Bastiaansen

Institute for Marine and Atmospheric research  
Utrecht (IMAU), Universiteit Utrecht  
r.bastiaansen@uu.nl

## Kaj-Ivar van der Wijst

Planbureau voor de Leefomgeving (PBL)  
Den Haag  
kajivar.vanderwijst@pbl.nl

### Onderzoek

# Klimaatwiskunde

Harder en harder klinkt de roep om klimaatopwarming te tempereren. Maar waarom zorgt deze opwarming voor drastische problemen en hoe kan dit klimaatprobleem opgelost worden? In onderzoek naar beide vraagstukken komt veel wiskunde kijken. Dit wordt in dit artikel geïllustreerd aan de hand van een aantal simpele voorbeeldmodellen. Robbin Bastiaansen en Kaj-Ivar van der Wijst gaven beiden een lezing over dit thema op het KWG Wintersymposium van 11 januari.

Sinds de industrialisatie is het klimaat op aarde in rap tempo aan het veranderen. Zo is de gemiddelde temperatuur in Nederland in de laatste 130 jaar met 1,7°C toegenomen [1]. Dit soort verandering is op klimatologische schaal erg groot, en deze vindt bovendien ook nog eens erg snel plaats. De gevolgen kunnen daarom ook enorm zijn voor zowel mens als natuur. De voorspelde gevolgen variëren van lokale effecten (bijvoorbeeld het afsterven van een ecosysteem) tot globale effecten (bijvoorbeeld een zeespiegelstijging). Vaker en vaker wordt ook bericht over weersextremen die in lijn liggen met de voorspellingen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de extreme droogte in Europa in 2018, de hoeveelheid en intensiteit van bosbranden in 2019 en de toenemende grootte van hagelstenen tijdens vaker voorkomende hagelstormen.

Het moge duidelijk zijn: klimaatwetenschap is op het moment een *hot issue*. Wetenschappers van over de hele wereld en vanuit alle mogelijke disciplines werken hard aan het verbeteren van ons begrip vanuit ongeveer alle mogelijke invalshoeken. In dit artikel leggen we de

focus bij een wiskundige invalshoek. In het bijzonder leggen we uit hoe wiskundige theorieën en technieken een centrale rol spelen bij het beantwoorden van de volgende twee centrale vraagstukken in klimaatonderzoek:

1. Hoe kunnen we het klimaat voorspellen en begrijpen?
2. Hoe lossen we het klimaatprobleem economisch verantwoord op?

### Klimaatmodellen

Naast natuurlijk empirisch onderzoek, wordt het grootste deel van klimaatonderzoek gedaan aan de hand van voorspellende modellen. Bij dit modelleren wordt de toestand van het te bestuderen klimaatstelsel weergegeven door  $x$ , en het model stipuleert dan hoe  $x$  verandert gedurende de tijd. Er is een aantal mogelijkheden om dit te doen, maar veruit het meest gebruikelijk is om een differentiaalvergelijking te maken van de vorm

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t), \quad (1)$$

waarbij  $f$  een functie of operator is.

De precieze vorm van (1) verschilt enorm tussen modellen. Zo zijn er aan de ene kant grootschalige modellen waar  $x$  per locatie op aarde informatie bevat over temperatuur, luchtdruk, windstroming, luchtvochtigheid, kleur grond, et cetera, en  $f$  een ingewikkelde (partiële) differentiaaloperator is die alle bekende natuurkundige processen voorschrijft. Daar tegenover staan simpelere, vaak conceptuele modellen waarin  $x$  slechts laagdimensionaal is — en bijvoorbeeld alleen de gemiddelde globale temperatuur bevat — en  $f$  een simpele functie is. Het voordeel van eerstgenoemde, grootschalige modellen is dat ze (potentieel) beter de werkelijkheid weergeven; daarentegen is het vaak makkelijker om intuïtie en begrip op te doen aan de hand van de simpelere modellen. In het vakgebied zie je daarom ook vaak een wisselwerking tussen beide soorten modellen, waarin de simpele modellen eerst kwalitatieve inzichten geven en de grotere modellen daarna kwantitatieve voorspellingen.

### De moeilijkheid in klimaatonderzoek

Op basis hiervan lijkt het vrij eenduidig hoe klimaatverandering bestudeerd moet worden. Er is echter één belangrijke moeilijkheid: als door klimaatverandering iets verandert, geeft die verandering zélf weer aanleiding tot een additionele verandering. Een concreet voorbeeld: stel dat de aarde helemaal bedekt is met sneeuw. In

parameter	waarde	beschrijving
$C_T$	$5 \cdot 10^8 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1}$	warmtecapaciteit van de aarde
$Q_0$	$341,3 \text{ W m}^{-2}$	vermogen van inkomende zonnestraling
$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	Stefan-Boltzman-constante
$\varepsilon$	0,61	emmissiviteit van de aarde
$\alpha_1$	0,7	albedo van ijs
$\alpha_2$	0,289	albedo van water
$T_1$	260 K	temperatuur waaronder aarde alleen ijs heeft
$T_2$	293 K	temperatuur waarboven aarde geen ijs meer heeft
$K$	0,1	temperatuurgevoeligheid ijs-albedo terugkoppeling

Tabel 1 Waardes en beschrijving van parameters uit vergelijking (2).

dat geval wordt veel van het inkomende zonlicht weerkaatst door het witte sneeuwoppervlak. Als de temperatuur op aarde dan iets toeneemt door klimaatverandering, smelt een deel van de sneeuw. Als gevolg daarvan wordt ook minder zonlicht weerkaatst, waardoor de temperatuur op aarde nog iets extra toeneemt. Dit soort effecten worden niet-lineaire terugkoppelingen genoemd en het klimaatsysteem is ermee doorspekt.

De moeilijkheid van dergelijke niet-lineaireiteiten illustreren we aan de hand van een simpel klimaatmodel, waarin het aardse klimaat weergegeven wordt door enkel de globale temperatuur  $T$ . De verandering  $\frac{dT}{dt}$  wordt beschreven aan de hand van de differentiaalvergelijking (geïnspireerd door [4])

$$\frac{dT}{dt} = f(T) := \frac{1}{C_T} [Q_0(1 - \alpha(T)) + \mu - \varepsilon\sigma T^4]. \quad (2)$$

Hierin beschrijft de term  $Q_0(1 - \alpha(T))$  de opwarming door inkomend zonlicht, de term  $-\varepsilon\sigma T^4$  de warmte die uitgestraald wordt door de aarde (de ‘black body radiation’) en de term  $+\mu$  de extra opwarming als gevolg van broeikasgassen in de lucht. Een korte beschrijving van de parameters ( $C_T$ ,  $Q_0$  en  $\varepsilon$ ) inclusief typisch gevonden waardes staan voor de geïnteresseerden in Tabel 1.

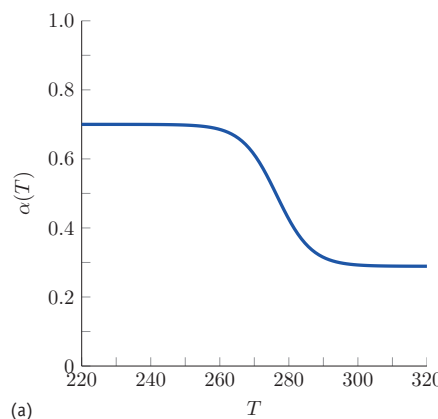
De functie  $\alpha$  beschrijft welk deel van de zonnestraling weerkaatst wordt (de zogenoemde albedo). Zoals hiervoor beschreven verandert de albedo afhankelijk van de werkelijke temperatuur vanwege smelten van ijs. Voor erg lage temperaturen zal de hele aarde bedekt zijn met ijs, zodat de albedo hoog is (en veel zonlicht weerkaatst wordt). Bij hoge temperaturen is juist alle sneeuw gesmolten, waardoor

de albedo laag is (en weinig zonlicht weerkaatst wordt). Een mogelijke manier om dit te vangen in een formule voor de albedo  $\alpha$  is als volgt:

$$\alpha(T) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{1 + \tanh(K[T - \frac{T_1 + T_2}{2}])}{2}, \quad (3)$$

waarbij  $\alpha_1$  de albedo van ijs is en  $\alpha_2$  die van water. Een plot van deze functie is weergegeven in Figuur 1(a). De waardes van de parameters zijn opgenomen in Tabel 1.

Het model (2) stipuleert nu hoe de temperatuur verandert als functie van de huidige temperatuur; elke huidige temperatuur  $T$  geeft aanleiding tot een verandering  $\frac{dT}{dt}$ , enzovoorts. Bijna altijd kunnen de uiteindelijke banen  $T(t)$  slechts numeriek door een computer bepaald worden – zoals ook het geval bij het model (2). Echter, vooral in laagdimensionale systemen, is het mogelijk om ook op een andere manier inzicht te krijgen in het gedrag van oplossingen van (2). Hiertoe merken we op dat het mogelijk is om een temperatuur  $T$  te hebben



(a)

waarvoor  $\frac{dT}{dt} = f(T) = 0$ ; oftewel, de temperatuur verandert niet. Dit soort temperaturen noteren we als  $T_*$  en worden de vaste punten of evenwichtspunten van het model genoemd. Voor model (2) voldoen de evenwichtspunten aan

$$\mu = \varepsilon\sigma T_*^4 - Q_0(1 - \alpha(T_*)). \quad (4)$$

Hiermee hebben we meteen een beschrijving van de vaste punten afhankelijk van de waarde van  $\mu$  (die de extra opwarming door broeikasgassen beschrijft). In Figuur 1(b) is (4) geplot, waarin dus per  $\mu$ -waarde de mogelijke evenwichtspunten  $T_*$  af te lezen zijn (wat er soms meerdere zijn).

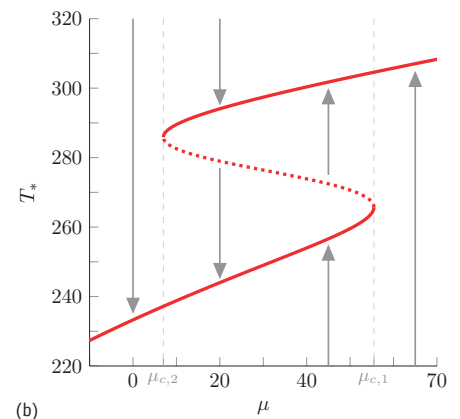
Het gedrag van oplossingen  $T(t)$  van (2) blijkt erg gerelateerd te zijn aan deze vaste punten. In model (2) bijvoorbeeld gaat of komt elke baan  $T(t)$  naar of van een evenwichtspunt. Door gewoon wat waardes  $T$  in te vullen valt af te leiden welke evenwichtspunten banen aantrekken en welke banen afstoten. Dit valt echter ook op een gestructureerdere manier te bepalen: voor  $T$  dicht in de buurt van een evenwichtspunt  $T_*$  geldt  $T = T_* + \Delta T$  (met  $|\Delta T| \ll 1$ ). Substitutie in (2) en een Taylor-ontwikkeling van  $f$  rondom  $T_*$  geeft dan

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{dT_*}{dt} + \frac{d\Delta T}{dt} \\ &= f(T_* + \Delta T) \\ &= f(T_*) + f'(T_*)\Delta T + O(\Delta T^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Omdat  $T_*$  een evenwichtspunt is, geldt  $\frac{dT_*}{dt} = f(T_*) = 0$ . Verder is  $\Delta T^2$  erg klein, zodat het in leidende orde te verwaarlozen is. Dus er geldt

$$\frac{d\Delta T}{dt} \approx f'(T_*)\Delta T. \quad (6)$$

Deze differentiaalvergelijking voor  $\Delta T$  heeft



(b)

Figuur 1 (a) Plot van  $\alpha(T)$  in (3). (b) De vaste punten van het model (2). De doorgetrokken lijn geeft de stabiele evenwichtspunten weer en de gestippelde lijn de instabiele. De grijze pijlen geven de richting van de banen  $T(t)$  weer voor verschillende waardes van de parameter  $\mu$ .

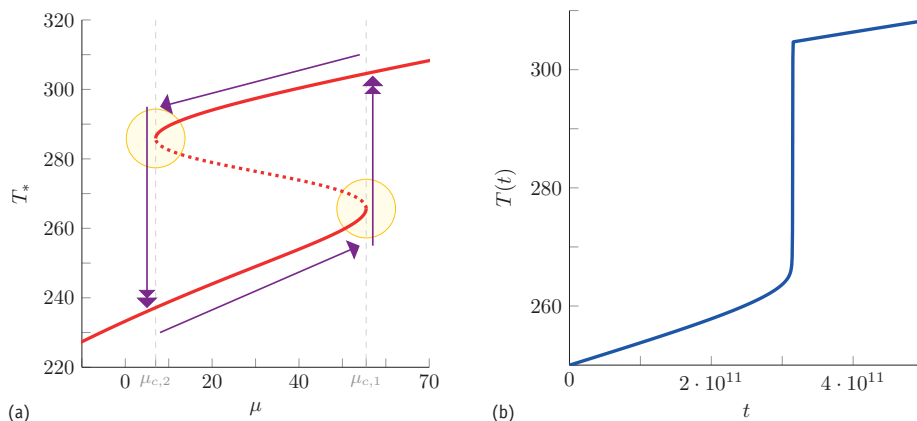
de expliciete oplossing

$$\Delta T(t) = \Delta T(0)e^{f'(T_*)t}. \quad (7)$$

Hieruit volgt meteen dat  $\Delta T(t) \rightarrow 0$  voor  $t \rightarrow \infty$  als  $f'(T_*) < 0$  en  $\Delta T(t) \rightarrow 0$  voor  $t \rightarrow -\infty$  als  $f'(T_*) > 0$ . Met andere woorden: het vaste punt  $T_*$  is aantrekkend (ook wel stabiel genoemd) als  $f'(T_*) < 0$  en afstotend (instabiel) als  $f'(T_*) > 0$ . Met deze informatie is het nu mogelijk om Figuur 1(b) te voorzien van pijlen die de banen  $T(t)$  weergeven.

Op dit moment is al het gedrag van (2) bekend voor een vaste  $\mu$ -waarde: de temperatuur volgt de beschreven banen richting ofwel de onderste curve (sneeuwbal aarde) ofwel de bovenste curve (ijsvrije aarde). Deze informatie geeft echter óók inzicht in het gedrag van het systeem bij veranderende  $\mu$ -waardes (dus voor veranderende  $\text{CO}_2$ -concentraties). Stel, de huidige toestand bevindt zich op de onderste curve. Als  $\mu$  dan ietsje toeneemt volgt de temperatuur simpelweg de onderste curve (en wordt het dus ietsje warmer). Als echter  $\mu$  blijft toenemen overschrijdt het op een gegeven moment een kritische waarde  $\mu_{c,1}$  waarboven de onderste curve niet meer bestaat. Als gevolg hiervan schiet het systeem ineens naar de bovenste curve, met een grote verandering in  $T$  tot gevolg — zie Figuur 2. Dit wordt een kantelpunt (*tipping point*) genoemd, omdat het systeem ineens omslaat van de ene toestand (sneeuwbal aarde) naar een radicaal andere toestand (ijsvrije aarde). Deze kantelpunten zijn bijna altijd ook moeilijk omkeerbaar: om weer terug te komen in de eerste toestand moet  $\mu$  eerst flink afnemen en onder  $\mu_{c,2}$  zakken; kantelpunten zorgen dus voor een sterke hysteresis.

Het voorbeeldsysteem (2) is niet uniek in het hebben van kantelpunten. Deze ontstaan eigenlijk automatisch in systemen met niet-lineaire terugkoppelingsmechanismen. Er zijn dan ook voorbeelden te over; zo zijn ze bijvoorbeeld gevonden in koraalriffen, tropische regenwouden, de verspreiding van infectieziekten, verwoestijning en vele klimatologische subsystemen (zoals de warme golfstroom). Bij studies van dergelijke systemen wordt steevast het hierboven beschreven geïdealiseerde idee van kantelpunten als basis gebruikt, hoewel het uiteraard wat verfijnd wordt voor systemen die ingewikkelder zijn dan het voorbeeldsysteem (2). Bijvoorbeeld de aanwezigheid van ruis, temporele effecten,



**Figuur 2** (a) Het gedrag van het systeem bij veranderende  $\mu$ , inclusief de kantelpunten in het systeem (omcirkeld in geel) (b) Een mogelijk verloop van temperatuur  $T(t)$  bij het overschrijden van een kantelpunt.

ruimtelijke effecten of meerdere alternatieve stabiele toestanden zorgen ervoor dat het geïdealiseerde idee niet helemaal past. Op dit moment worden stappen gemaakt om deze effecten beter te begrijpen én te voorspellen, zowel vanuit een toegepast als een fundamenteel wiskundig perspectief. Niettemin is er de vrees (en meer en meer ook de verwachting) dat veel subsystemen over een kantelpunt geduwd kunnen worden door de huidige klimaatveranderingen, de aarde achterlatend in een onbekende, andere toestand [2].

### Klimaatbeleid

Uit klimatologisch onderzoek blijkt dus dat de gevolgen van klimaatverandering potentieel erg ingrijpend zijn. Daarom zijn er wereldwijd afspraken gemaakt om de effecten van klimaatverandering te beperken. Zo hebben in 2015 wereldleiders in Parijs afgesproken om de mondiale temperatuurstijging te beperken tot ruim onder de  $2^\circ\text{C}$ . Hier bleef wel een aantal grote vragen over, zoals: hoe kan dit doel bereikt worden? Wat komt er allemaal bij kijken? En: hoeveel gaat dit kosten? Naar (antwoorden op) deze vragen wordt veel onderzoek gedaan, waarin de wiskunde wederom een grote rol speelt.

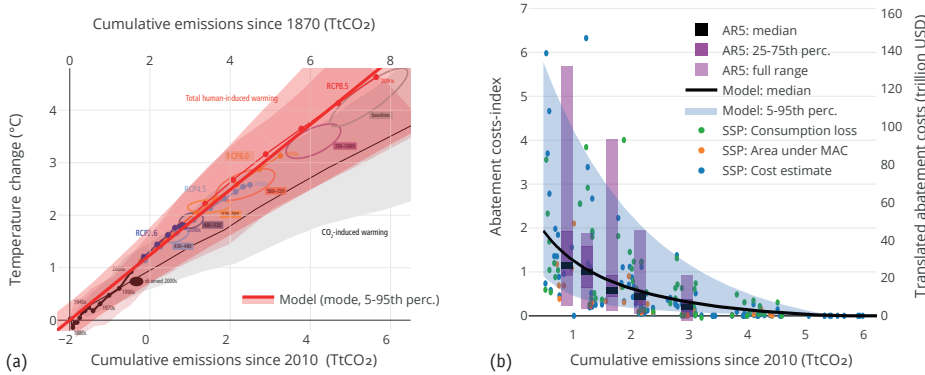
Dit soort vragen zijn erg lastig te beantwoorden door de complexe interacties tussen aspecten als de economie, bevolkingsgroei, technologie, landbouw en energie (de socio-economische aspecten), en de geofysische processen in onze atmosfeer, oceanen en koolstofcyclus. Om hier toch licht op te kunnen laten schijnen hebben wetenschappers zogenoemde Integrated Assessment Models (IAMs) gemaakt: modellen die proberen al deze aspecten zo veel mogelijk met elkaar te verbinden.

Deze modellen zijn niet gemaakt om de toekomst te *voorspellen*, maar om mogelijke paden uit te zetten naar verschillende toekomstbeelden. Dit wordt *model-based scenarios* genoemd: hiermee kunnen de onzekerheden in de verschillende klimaataspecten worden verkend en de grenzen van de beleidsmogelijkheden worden berekend. Met deze modellen worden dus verschillende routes uitgestippeld naar een gegeven doel, zonder een voorkeur voor bepaalde keuzes te geven — dat is het werk van beleidsmakers en politici.

Deze IAMs bestaan er in alle maten en kleuren: het IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change; de samenwerking van klimaatwetenschappers voor de Verenigde Naties) maakt veelvuldig gebruik van zeer gedetailleerde en complexe IAMs. Deze beschrijven de economische interacties, beschikbare technologieën en verschillende soorten landgebruik in detail op regionaal niveau. Sommige modellen zijn gespecialiseerd in de economische aspecten, andere juist in het geofysische gedeelte. Daarnaast zijn er ook nog simpelere modellen. Deze zijn wel minder gedetailleerd, maar hebben als voordeel makkelijker te begrijpen te zijn. In dit artikel beschrijven we het simpelste IAM dat we kunnen maken en laten we zien hoe met wiskundige technieken bepaald kan worden welk aspect uit het model (geofysisch of socio-economisch) de grootste onzekerheid veroorzaakt. (Een uitgebreidere omschrijving van dit model is te vinden in Van Vuuren e.a. [6].)

### Een simpel model voor mitigatiekosten

Met behulp van dit simpele model willen we de volgende vraag beantwoorden: hoe wordt de maximaal  $2^\circ\text{C}$  opwarming in 2100 zo goedkoop mogelijk gehaald? Daarbij is



**Figuur 3** Onzekerheid voor de input-parameters van het mini-Integrated Assessment Model. (a) Relatie tussen globale temperatuurstijging en cumulatieve CO<sub>2</sub>-emissies. (b) Kosten als functie van carbon budget. De punten geven kostenpunten uit de literatuur gemaakt met gedetailleerde IAMs. De paarse balkjes komen uit het laatste IPCC-rapport (AR5). De blauwe pluim is het resultaat van de benaderingsformule beschreven in dit artikel.

het belangrijk om te weten dat de temperatuur van de aarde niet zomaar te veranderen is; de mensheid kan alleen iets doen aan de uitstoot van broeikasgassen, zoals CO<sub>2</sub>. Terug naar de vraag: om deze te beantwoorden, is er aan de ene kant de relatie tussen globale temperatuurstijging en CO<sub>2</sub>-emissies nodig en aan de andere kant de kosten om de CO<sub>2</sub>-uitstoot te reduceren tot een gegeven hoeveelheid CO<sub>2</sub>.

*Geofysische aspecten: temperatuurstijging.* Klimaatwetenschappers hebben met behulp van grote, gedetailleerde klimaatmodellen de relatie temperatuur-cumulatieve CO<sub>2</sub> uitgerekend zoals deze te zien is in Figuur 3(a). Hieruit blijkt dat de relatie sterk lineair is; bij benadering geldt

$$T(\text{CO}_2) = T_{2010} + \text{TCRE} \cdot \text{CO}_2, \quad (8)$$

waarbij CO<sub>2</sub> de cumulatieve hoeveelheid CO<sub>2</sub> is die uitgestoot is vanaf het jaar 2010, T<sub>2010</sub> de temperatuurstijging in 2010 (alle temperaturen worden voor het gemak ten opzichte van het pre-industriële tijdperk aangeduid), en de richtingscoëfficiënt is de TCRE: Transient Climate Response to Emissions. Zoals te zien is in Figuur 3(a), zit er een flinke onzekerheid in deze parameter. In het model wordt dit gerepresenteerd als normaalverdeling:

$$\text{TCRE} \sim \mathcal{N}(0,62; 0,12).$$

Uit uitgebreide en langdurige metingen is ook de gemiddelde wereldwijde temperatuurstijging in 2010 te schatten [5]:

$$T_{2010} \sim \mathcal{N}(0,91; 0,08).$$

Hiermee is nog niet de gehele onzekerheid gevangen in de temperatuur-CO<sub>2</sub>-relatie. De temperatuurstijging hangt namelijk ook af van andere broeikasgassen dan CO<sub>2</sub>,

zoals methaan en ozon. De invloed hiervan is al meegenomen in de TCRE van Figuur 3(a). Echter zijn er verschillende toekomstscenario's over hoe de hoeveelheid niet-CO<sub>2</sub>-gassen correleert met de hoeveelheid CO<sub>2</sub>. Deze modelspreiding blijkt goed te kunnen worden gemodelleerd als een extra onzekerheidsterm in de temperatuurvergelijking:

$$T(\text{CO}_2) = T_{2010} + \text{TCRE} \cdot \text{CO}_2 + \sigma_{\text{nonCO}_2},$$

waarbij  $\sigma_{\text{nonCO}_2} \sim \mathcal{N}(0; 0,14)$ .

*Socio-economisch aspecten: de kosten.* Het tweede deel van het model beschrijft de extra kosten die nodig zijn om de CO<sub>2</sub>-emissies te reduceren ten opzichte van een *business-as-usual*-scenario, een situatie waarin we helemaal geen klimaatbeleid doen. Deze kosten zijn uitgerekend met behulp van de zeer gedetailleerde IAMs zoals die eerder zijn omschreven. Dit zijn de punten in Figuur 3(b). Deze kosten stijgen exponentieel naarmate de toegelaten hoeveelheid CO<sub>2</sub> lager wordt; bij benadering geldt

$$\text{costs}(\text{CO}_2) = a + be^{-c \cdot \text{CO}_2}.$$

Om de grote onzekerheidsrange uit Figuur 3(b) te vangen, kunnen we bovenstaande uitdrukking herschrijven naar een convexe combinatie van de ondergrens en bovengrens van de kosten:

$$\text{costs}(\text{CO}_2; p) = p \cdot \text{costs}_{\text{min}}(\text{CO}_2) + (1-p) \cdot \text{costs}_{\text{max}}(\text{CO}_2), \quad (9)$$

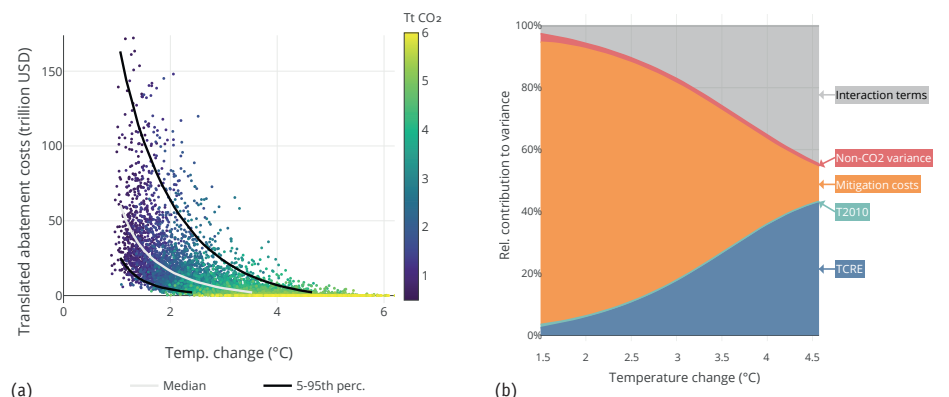
waarbij  $p$  log-normaal verdeeld is om rekening te houden met het feit dat er een hogere onzekerheid naar hoge kosten is dan naar lage kosten.

*Samenvoegen.* We hebben nu alle onderdelen om de temperatuurstijging  $T(\text{CO}_2)$  en de kosten  $\text{costs}(\text{CO}_2)$  als functie van cumulatieve CO<sub>2</sub>-emissies uit te rekenen. Doordat beide functies van dezelfde grootte, de emissies, afhangen, kan hiermee de mitigatiekosten uitgedrukt worden als functie van een temperatuurdoel, in plaats van een CO<sub>2</sub>-doel. En dat komt goed uit, omdat bijvoorbeeld het doel van het Parijsakkoord ook is uitgedrukt als een temperatuurdoel, namelijk maximaal 2°C stijging. Het combineren van (8) en (9) geeft:

$$\text{costs}(T) = \text{costs}\left(\frac{T - T_{2010} - \sigma_{\text{nonCO}_2}}{\text{TCRE}}; p\right), \quad (10)$$

waarbij de kosten dus afhangen van de variabelen T<sub>2010</sub>, TCRE,  $\sigma_{\text{nonCO}_2}$  en  $p$ , allemaal met hun eigen verdeling.

Door een Monte Carlo-simulatie – een simulatie waarbij duizenden keren waarden uit de verdeling van elke variabele getrokken wordt – uit te voeren, wordt ingeschat wat de kosten en de bijbehorende onzekerheden zijn (zie Figuur 4(a)). Voor een doel van T = 2°C hebben de kosten een mediaan van 12 biljoen dollar (zo'n 2%



**Figuur 4** (a) Monte Carlo-simulatie van de kosten als functie van temperatuurdoel. De lijnen zijn de mediaanlijnen en 5-95ste percentielen. (b) Decompositie van de variantie van de kosten voor verschillende temperatuurdoelen.

van het gezamenlijke wereldwijde inkomen van 2015 tot 2100), maar met een onzekerheidsmarge van 4 tot 63 biljoen dollar (5de en 95ste percentiel). Voor een doel van  $T = 1,5^\circ\text{C}$  worden de mediaankosten verdubbeld, evenals de onzekerheidsmarge: 10 tot 100 biljoen dollar.

**Onzekerheid.** De onzekerheid in deze kosten is zeer hoog. Dat is niet verrassend: het hangt van allerlei onzekere factoren af, zoals de klimaat-onzekerheid en economische onzekerheid. De vraag is nu in hoeverre de onzekerheid in de parameters ( $T_{2010}$ ,  $\text{TCRE}$ ,  $\sigma_{\text{nonCO}_2}$  en  $p$ ) aanleiding geeft tot de grote spreiding in de kosten.

**Sobol-decompositie.** Om deze vraag te beantwoorden, kan de variantie ontleed worden in partiële varianties veroorzaakt door elk van de parameters, met behulp van een Sobol-decompositie. Stel dat  $Y$  een toevalsvariabele is afhankelijk van parameters  $X_1, \dots, X_n$ . Dan is de variantie van  $Y$  te schrijven als:

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \text{hogere-ordeterminen},$$

waarbij de partiële variantie  $V_i$  gelijk is aan de variantie van de verwachtingswaarde van  $Y$ , conditioneel op de waarde van  $X_i$ :

$$V_i := \text{Var}_{X_i}(\mathbb{E}[Y | X_i]).$$

De partiële onzekerheden zijn dan gedefinieerd als  $V_i$  gedeeld door de totale variantie  $\text{Var}(Y)$ . Dankzij Monte Carlo-simulaties kunnen deze partiële varianties efficiënt worden ingeschat [3].

**Onzekerheidsanalyse van kosten.** In het geval van het mini-model (10) zijn de va-

riabelen  $X_i$  de parameters van het model en is de grootte  $Y$  de kosten voor een gegeven temperatuurdoel  $T$ . De relatieve partiële varianties zijn getoond in Figuur 4(b). Bij ambitieuze doelen als het  $2^\circ\text{C}$  temperatuurdoel van het Parijs-akkoord wordt verreweg het grootste deel van de variantie verklaard door de onzekerheid in  $p$ , de mitigatiekosten. Dit komt dus door de spreiding in de *socio-economische* aspecten. Bij minder ambitieuze doelen, zoals  $4^\circ\text{C}$  stijging, zijn juist de geofysische onzekerheden dominant bij het bepalen van de spreiding van de totale kosten. Het simpele klimaatmodel kan dus worden gebruikt voor het inschatten van de kosten bij het identificeren van klimaatmaatregelen en het prioriteren van onderzoek.

### Samenvatting

In dit artikel hebben we gekeken naar twee aspecten van klimaatonderzoek. Allereerst is het geofysische perspectief bekeken, waar wiskundige theorie gebruikt wordt bij het begrijpen en voorspellen van (toekomstig) klimaat, en waar wiskunde duidelijk maakt dat het klimaatstelsel gevaarlijke kantelpunten heeft. Als tweede is ook het meer beleidsmatige perspectief belicht. Ook hierin helpt de wiskunde, onder andere door geofysische en socio-economische inzichten te combineren in assessmentmodellen die inzicht geven in kosten en baten van voorgesteld klimaatbeleid, en bovendien onzekerheid in kennis kunnen inschatten.

Deze facetten zijn hier bewust geïllustreerd aan de hand van simpele, deels gestileerde wiskundige modellen om zo goed mogelijk inzicht te kunnen geven in de essentie en de kwalitatieve eigenschappen

van modellen. In de verschillende vakgebieden worden dit soort simpele modellen ook stevast gebruikt om een eerste intuïtie te kweken, die vervolgens gebruikt kan worden bij het opstellen en begrijpen van de meer complexe, meer kwantitatieve modellen en uiteindelijk ook bij het bevatten van het werkelijke systeem. Op hun beurt geven deze dan weer nieuwe effecten prijs die niet passen in de gestilleerde modellen en zo aanleiding geven tot de ontwikkeling van nieuwe simpele modellen. En dat leidt opnieuw weer tot nieuwe, spannende wiskunde. ☛

**Robbin Bastiaansen** is in 2019 gepromoveerd aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden op zijn proefschrift *Lines in the Sand: Behaviour of Self-organised Vegetation Patterns in Dryland Ecosystems*. Sinds 2020 is hij werkzaam als postdoc-onderzoeker aan het Institute for Marine and Atmospheric research Utrecht (IMAU) aan de Universiteit Utrecht, waar hij onderzoek doet naar klimaatgevoeligheid.

**Kaj-Ivar van der Wijst** is na zijn studie Mathematical Sciences in Utrecht gaan werken bij het Planbureau voor de Leefomgeving in Den Haag, waar hij onderzoek doet naar het modelleren van de gevolgen en schade van klimaatverandering. Daarnaast geeft hij het vak Wiskunde en Systemanalyse aan het Copernicus Instituut voor Duurzame Ontwikkeling aan de Universiteit Utrecht.

### Referenties

- 1 KNMI, Uitleg over klimaatverandering, <https://www.knmi.nl/kennis-en-datacentrum/uitleg/klimaatverandering>.
- 2 T.M. Lenton, H. Held, E. Kriegler, J.W. Hall, W. Lucht, S. Rahmstorf en H.J. Schellnhuber, Tipping elements in the Earth's climate system, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105(6) (2008), 1786–1793.
- 3 A. Saltelli, Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices, *Computer Physics Communications* 145 (2002), 280–297.
- 4 W.D. Sellers, A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system, *Journal of Applied Meteorology* 8(3) (1969), 392–400.
- 5 H. Visser, S. Dangendorf, D.P. Van Vuuren, B. Bregman en A.C. Petersen, Signal detection in global mean temperatures after 'Paris': an uncertainty and sensitivity analysis, *Climate of the Past* 14 (2018), 139–155.
- 6 D.P. Van Vuuren, K.-I. Van der Wijst, S. Marsman, M. Van den Berg, A. F. Hof en C. D. Jones, The cost of achieving climate targets and the sources of uncertainty, *Nature Climate Change* 10(4) (2020), 329–334.