Jeroen Spandaw
Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
j.g.spandaw@tudelft.nl

Onderwijs

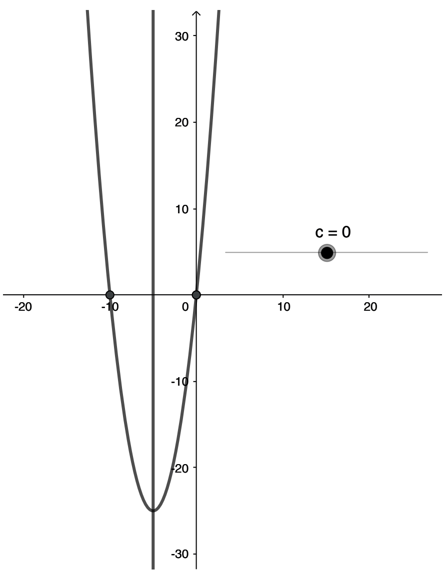
Enkele toepassingen van GeoGebra in meetkundeonderwijs

Het softwareprogramma GeoGebra is een zeer gebruikersvriendelijk hulpmiddel voor het wiskundeonderwijs. De software is gratis toegankelijk is via de website www.geogebra.org. Jeroen Spandaw beschrijft in dit artikel enkele voorbeelden van de toepassing van GeoGebra in meetkundeonderwijs. De voorbeelden variëren van onderbouw voortgezet onderwijs tot universitair niveau.

In de volgende paragrafen beschrijf ik voor welke didactische functies ik GeoGebra inzet. In de conclusie wordt dit nog eens samengevat.

De ab-formule

De ab-formule is de formule $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ voor de x-coördinaat van de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$. Een equivalente uitspraak is dat de lijn $x = -\frac{b}{2a}$ de symmetrieas is van de parabool. (Uiteraard nemen we $a \neq 0$.) De ab-formule is een logische voorbereiding op de abc-formule. De meeste studenten in de lerarenopleiding menen ten onrechte dat voor de afleiding van de ab-formule differentiëren nodig zou zijn. Dat is jammer, want er is een mooie aanpak die toegankelijk is voor onderbouwleerlingen.



Figuur 1 Top van parabool.

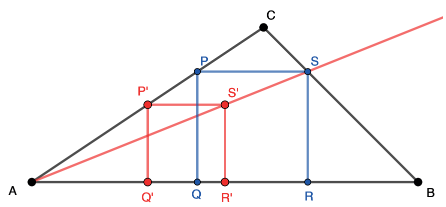
Het idee is dat de positie van de symmetrieas niet verandert wanneer de parameter c gevarieerd wordt. Dit kan ondersteund worden door een GeoGebra-plaatje waarin c via een schuifje als parameter wordt gebruikt (zie Figuur 1). Voor de resterende parameters a en b kunnen vaste waarden worden genomen of eveneens beweegbare schuifjes. De eerste optie is de meest toegankelijke. De docent kan het GeoGebra-bestand aan zijn leerlingen geven of hen dit zelf laten maken. Het doel is om leerlingen te laten herontdekken dat de positie van de symmetrieas en de x-coördinaat van de top niet van c afhangen. Gevraagd naar een verklaring zullen de meeste leerlingen noemen dat verandering van c een verticale verschuiving van de parabool geeft.

Maar waar ligt die symmetrieas nou? Omdat c er niet toe doet, kunnen we c zo eenvoudig mogelijk kiezen. Er is niet veel sturing nodig van de docent om leerlingen het geval $c = 0$ te laten onderzoeken. Ik zou in eerste instantie kiezen voor prettige vaste waarden van a en b, zeg $a = 1$ en $b = 10$. Leerlingen zien de nulpunten van $y = x^2 + 10x$ bij $x = 0$ en $x = -10$ en concluderen dat $x_{\text{top}} = -5$. Daarna kan b gevarieerd worden en tot slot a. De toegankelijkheid kan verhoogd worden door je te beperken tot $a = 1$ en tot enkele waarden van b, zeg $b = 10$, $b = 6$, $b = -20$, $b = 3, \ldots$ Leerlingen kunnen dan het vermoeden $x_{\text{top}} = -\frac{1}{2}b$ ontwikkelen, eventueel in hun eigen informele taal en dit vermoeden op hun eigen niveau meer of minder formeel onderbouwen. Leerlingen met iets meer algebraïsche bagage kunnen uiteraard grotere stappen maken, bijvoorbeeld van $ax^2 + bx = 0$ via $x = 0 \vee x = -b/a$ naar $x_{\text{top}} = -b/(2a)$.

Polya's heuristiek van meetkundige plaats

In zijn beroemde boek *How to solve it?* beschrijft Polya het volgende probleem (zie Figuur 2): *Gegeven een driehoek ABC, construeer een 'ingeschreven' vierkant $PQRS$.* Met 'ingeschreven' wordt bedoeld: P ligt op de zijde AC, Q en R liggen op de zijde AB en S ligt op de zijde BC. Polya gebruikt dit probleem om de heuristiek 'laat één voorwaarde weg' te illustreren.

Als we de voorwaarde '$S \in BC$' weglaten, krijgen we een 1-parameter-familie van vierkanten. Het is buitengewoon instructief voor leerlingen om deze situatie in GeoGebra te tekenen. Eerst teken je een 'willekeurige' driehoek ABC. Vervolgens kies je een willekeurig punt P op AC. Een GeoGebra-macro geeft de loodlijn op AB door P. Je klikt het snijpunt van die loodlijn met AB aan en noemt dat punt Q. Vervolgens maak je het vierkant $PQRS$ met behulp van de vierkant-macro van GeoGebra.



Figuur 2 Probleem van Polya.

Als je punt P nu beweegt langs AC, dan bewegen de punten Q, R en S mee. Omdat in de GeoGebra-constructie eerst de driehoek ABC is getekend en vervolgens het punt P op de zijde AC, blijven A, B en C op hun plaats, terwijl P keurig langs de vaste lijn AC beweegt. Je kunt eenvoudig GeoGebra het spoor (de meetkundige plaats) van S laten aangeven als P varieert. Dit leidt dan onmiddellijk tot het vermoeden dat dit spoor een rechte lijn is en dat deze lijn door A gaat. Desgewenst kunnen al deze vermoedens bewezen worden met geschikte gelijkvormige driehoeken. Maar ook zonder zo'n bewijs is het ontdekken en formuleren van de vermoedens al een waardevolle bezigheid voor de leerlingen. Tot slot kunnen we de meetkundige plaats van S eenvoudig construeren door één 'half-ingeschreven' vierkant $P'Q'R'S'$ te construeren en de lijn AS' te tekenen. Snijden van deze lijn met BC levert vervolgens een vierkant $PQRS$ dat aan alle eisen van Polya's probleem voldoet.

Een gelijkzijdige driehoek in een rechthoek

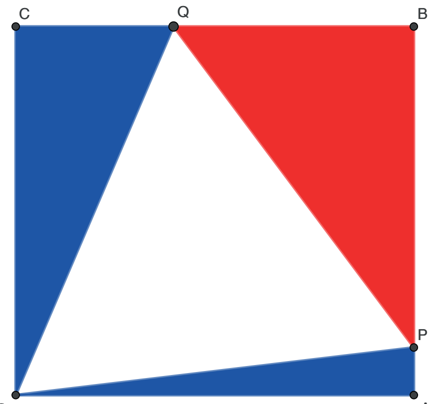
In Figuur 3 hebben we gelijkzijdige driehoek OPQ ingeschreven in een rechthoek $OABC$, dus P ligt op AB en Q ligt op BC.

Te bewijzen is dat de oppervlakte van de driehoek PBQ gelijk is aan de som van de oppervlakten van de driehoeken OAP en OCQ.

Sommige studenten in de Delftse lerarenopleiding kozen voor de volgende aanpak. Definieer $a_1 := |CQ|$, $a_2 := |QB|$, $b_1 := |AP|$ en $b_2 := |PB|$. De gelijkzijdigheid van $OAPQ$ betekent

$$(a_1+a_2)^2+b_1^2 = a_2^2+b_2^2 = a_1^2+(b_1+b_2)^2.$$

Hieruit willen we concluderen dat



Figuur 3 Driehoek in rechthoek.

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2)b_1+\frac{1}{2}a_1(b_1+b_2)=\frac{1}{2}a_2b_2.$$

Een prima aanpak, maar de studenten lukte het niet om deze conclusie uit de voorwaarde af te leiden. Mij is het slechts gelukt door een berekening met Gröbner-bases in Maple. Het is eenvoudig om dit bewijs met de hand te verifiëren, maar zonder kennis van eliminatietheorie en zonder Maple had ik het niet gevonden. Ik weet ook niet hoe mijn studenten het zonder die techniek hadden kunnen doen.

Een alternatieve aanpak gaat als volgt. Schrijf $\varphi := \angle AOP$. Het is nu eenvoudig om de oppervlakten van de drie driehoeken uit te drukken in sinussen, cosinussen en $c := |OP| = |PQ| = |QO|$. Gebruikmakend van $\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$ voor $\alpha = \angle AOP = \varphi$, $\alpha = \angle CQO = \varphi + 60^\circ$ en $\alpha = \angle PQB = 60^\circ - \varphi$ komt de stelling nu neer op

$$\sin(2\varphi)+\sin(2\varphi+120^\circ)=\sin(120^\circ-2\varphi).$$

Deze identiteit kun je bewijzen met behulp van de additieformules, maar het is mooier om te generaliseren naar

$$\mathbf{v}+R\mathbf{v}+R^2\mathbf{v}=\mathbf{0},$$

waarbij $\mathbf{v}=\binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \in \mathbb{R}^2$ en waarbij R de rotatie is om O over 120°. De somvector is immers invariant onder R en dus gelijk aan $\mathbf{0}$.

De tweede aanpak is eenvoudiger, omdat er naast de irrelevante schaalparameter c slechts één parameter is, namelijk de hoek φ. De eerste aanpak heeft daarentegen maar liefst vier parameters a_1, a_2, b_1 en b_2.

GeoGebra kan minstens vier verschillende rollen spelen in dit probleem. Ten eerste kan experimenteren met GeoGebra leiden tot het *ontdekken* van deze stelling.

Ten tweede heeft dit experiment een belangrijk psychologisch effect: zien dat alle testgevallen in vijf decimalen nauwkeurig kloppen geeft veel vertrouwen in de waarheid van de stelling. Dit kan helaas ook een negatieve bijwerking hebben: het kan de behoefte aan een bewijs ondermijnen.

Ten derde kan de constructie van het plaatje in GeoGebra leiden tot het inzicht dat de hoek $\varphi = \angle AOP$ de enige wezenlijke parameter is. Wanneer je immers het plaatje tekent, moet je kiezen of je begint met de rechthoek of met de driehoek. Je komt er heel snel achter dat het laatste gemakkelijker is. Je tekent dus met een GeoGebra-macro een (scheve) gelijkzijdige driehoek OPQ en een horizontale lijn door O. Door drie keer de loodlijn-macro van GeoGebra te gebruiken construeer je de omgeschreven rechthoek $OABC$. Gevorderden hoeven dit niet eens echt uit te voeren. Alleen al door te *bedenken* hoe je het plaatje in GeoGebra zou tekenen, kom je uit op de essentiële parameter φ, waarna het probleem is teruggebracht tot routine.

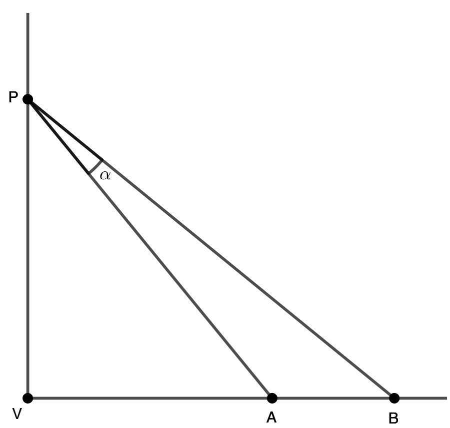
Ten vierde heeft GeoGebra mij geholpen een generalisatie te ontdekken voor niet-gelijkzijdige driehoeken OPQ ingeschreven in een rechthoek $OABC$.

Het rugby-probleem

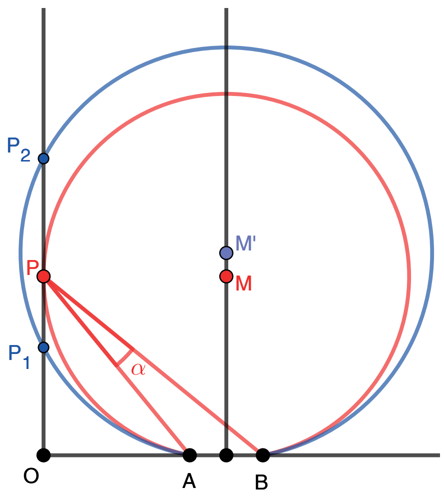
Bij rugby probeert men een *try* te scoren door de bal achter de achterlijn van de tegenstander op de grond te drukken. Na zo'n try kunnen via een *conversion* extra punten worden gescoord. Hier begint de meetkunde (zie Figuur 4).

Vanaf het punt V op de achterlijn, dat door de positie van de try vastligt, wordt een loodlijn getrokken. De conversator mag nu een punt P uitkiezen op die loodlijn om op het doel AB op de achterlijn te schieten. Dit heet *conversion*. Vraag: vanaf welk punt P is de kijkhoek $\alpha = \angle APB$ maximaal? Wij beperken ons tot die kijkhoek, hoewel voor de rugbyspeler ook de afstand van belang is.

We modelleren het probleem door $V=(0,0)$ te nemen op de achterlijn $y=0$. De doelpalen zetten we in $A=(a,0)$ en $B=(b,0)$, waarbij $b>a>0$. Het punt P is dus van de vorm $(0,p)$ voor een nader te bepalen p. We tekenen dit in GeoGebra, ofwel met een vaste keuze voor de parameters a en b, ofwel via schuifjes, zodat we later a en b kunnen variëren. Nadat we de assen hebben getekend en de punten A en B op de x-as, tekenen we een willekeurig punt P op de positieve y-as. We vragen aan



Figuur 4 Rugby-probleem.



Figuur 5 Cirkelsegment en constante hoek.

GeoGebra hoe groot de hoek α is. Terwijl we het punt P bewegen, zien we hoe de hoek α meeverandert. Als P heel dicht bij de achterlijn of juist heel ver weg ligt, dan is de hoek α heel klein. Conclusie: daartussen ligt ergens een maximum. Maar waar?

Dit is een mooi moment om aan de stelling van de constante hoek te denken: de meetkundige plaats van punten Q in het halfvlak $y>0$ die een gegeven kijkhoek $\angle AQB$ hebben is een cirkelsegment door A en B. Het middelpunt M van de bijbehorende cirkel ligt op de middelloodlijn $x=\frac{1}{2}(a+b)$ van AB (zie Figuur 5).

We zien dat dit cirkelsegment voor kleine kijkhoeken $\angle AQB$ de y-as in twee punten P_1 en P_2 snijdt. Dit zijn dus punten op de conversielijn $x=0$ met dezelfde kijkhoek op het doel AB. De punten op de y-as tussen P_1 en P_2 hebben een grotere kijkhoek. Als we de kijkhoek vergroten, dan neemt de straal van het cirkelsegment af en kruipen de punten P_1 en P_2 naar elkaar toe. Het punt P op de y-as met de grootste kijkhoek op het doel AB krijgen we wanneer P_1 en P_2 samenvallen, dus wanneer het cirkelsegment raakt aan de conversielijn $x=0$.

In dit geval staat de straal MP loodrecht op $x=0$, dus hebben de punten P en M dezelfde y-coördinaat p. De straal r van de cirkel is de afstand van M tot de y-as, dus $r=\frac{1}{2}(a+b)$. Dit is ook de afstand van $M=(\frac{1}{2}(a+b),p)$ tot $B=(b,0)$, dus

$$\tfrac{1}{4}(a-b)^2+p^2=\tfrac{1}{4}(a+b)^2.$$

Dit geeft $p^2=ab$, dus $p=\sqrt{ab}$, het *meetkundig gemiddelde* van a en b.

Misschien heb ik in de bovenstaande beschrijving van mijn oplossing van het rugby-probleem de rol van GeoGebra wat onderbelicht. De oplossing was echter het resultaat van spelen met GeoGebra. Je observeert iets en vindt er vervolgens een bewijs voor op basis van theoretische kennis. Hoe varieert de kijkhoek met de afstand p van het punt P tot de achterlijn? Hé, punten op de positieve y-as vormen duo's P_1 en P_2 met gelijke kijkhoek op het doel AB en die punten liggen op een cirkel door A en B. Oh ja, dat is de stelling van de constante hoek! Enzovoorts.

Je moet eigenlijk zelf aan de slag met GeoGebra om te ervaren hoe zeer bewegende beelden helpen bij het doorgronden van het probleem en het vinden van oplossingsmethoden. Ik zag bijvoorbeeld de punten P_1 en P_2 naar elkaar lopen als ik de kijkhoek groter maakte. Daarna begreep ik dat ik die punten moest laten samenvallen. Vervolgens observeerde ik dat het middelpunt M dezelfde y-coördinaat leek te hebben als het punt P en na die observatie was het bewijs daarvan kinderspel. Zodra een bewijs is gevonden is de software niet meer nodig, maar voor het *vinden* van een bewijs en het begrijpen van de situatie kunnen de bewegende beelden in een GeoGebra-constructie van het probleem buitengewoon behulpzaam zijn.

Een leuk experiment (met GeoGebra of in gedachten) is het volgende. Laat M het middelpunt zijn van de unieke cirkel door de drie punten A, B en P. Bij vaste $A=(a,0)$ en $B=(b,0)$ variëren we nu $P=(0,p)$. Het punt $M=(\frac{1}{2}(a+b),q)$ beweegt langs de middelloodlijn $x=\frac{1}{2}(a+b)$ van AB. Hoe verandert q met p? Als p bijna 0 is of juist heel groot, dan heeft de cirkel een heel grote straal. Preciezer: $q\to\infty$ wanneer $p\downarrow 0$ of $p\to\infty$. Het rugby-probleem is nu equivalent met dit probleem: voor welke p is q minimaal? De kijkhoek $\angle APB$ is immers gelijk aan $\frac{1}{2}\angle AMB$, dus het maximaliseren van $\angle APB$ is equivalent met het maximaliseren van $\angle AMB$, wat weer equivalent is met het minimaliseren van de y-coördinaat q van M. Gelijkstellen van $|MB|$ aan $|MP|$ geeft $\frac{1}{4}(a-b)^2+q^2=\frac{1}{4}(a+b)^2+(q-p)^2$, dus

$$q=\frac{p^2+ab}{2p}.$$

Dit geeft $0=dq/dp=\frac{1}{2}(p^2-ab)/p^2$, dus $p=\sqrt{ab}$.

We hebben nu twee aanpakken gegeven voor het rugby-probleem: één zonder en één met differentiëren. Allerlei andere mengsels van synthetische meetkunde, coördinatenmeetkunde, algebra, gonio en analyse kunnen ook tot succes leiden. Bijvoorbeeld leidt $q=(p^2+ab)/(2p)=p$ ook snel tot $p=\sqrt{ab}$.

Leraren in opleiding en leerlingen denken bij een maximalisatieprobleem al snel aan een afgeleide. Zij zijn echter geneigd voor een directe aanpak te gaan. Zij zoeken naar een uitdrukking voor de kijkhoek $\alpha=\angle APB$ als functie van de variabele p en de parameters a en b. Het plan is om vervolgens $d\alpha/dp$ te berekenen en gelijk te stellen aan nul. Dit leidt zelden tot succes, zelfs niet als de student bedenkt dat het voldoende is om $\cos^2(\alpha)$ te minimaliseren en dat die cosinus via het inproduct van de vectoren $(a,-p)^T$ en $(b,-p)^T$ berekend kan worden.

De vierde harmonische

Ik heb lange tijd de landelijke Mastermath-cursus over meetkunde verzorgd voor schakelstudenten. Dit zijn studenten die vaak al een carrière als ingenieur of manager achter de rug hebben en wiskundedocent willen worden. Het thema was projectieve meetkunde. Voor mij was een belangrijk doel van de cursus om te laten zien hoe wiskundigen onderzoeken, denken, redeneren, zoeken, verfijnen, formuleren, bewijzen en weerleggen. Meetkunde was hierbij eerder een middel dan een doel op zich.

In de cursus speelde de constructie uit Figuur 6 een belangrijke rol. Gegeven de punten A en B met $A\neq B$ en het punt V op de lijn AB buiten het lijnstuk AB, construeren we het punt M in de volgende stappen:

1. kies een lijn ℓ door V die niet door A gaat;
2. kies een punt W op ℓ ongelijk aan V;
3. kies een punt C op BW ongelijk aan B en W;
4. definieer D als het snijpunt van VC met AW;
5. definieer S als het snijpunt van AC en BD;
6. definieer M als het snijpunt van AB met WS.

Dit punt M wordt de vierde harmonische van V ten opzichte van A en B genoemd.

De eerste vraag is of het punt M afhangt van punt C, gegeven de daarvoor gemaakte keuzes van A, B, V, ℓ en W. Zo nee, dan luidt de volgende vraag of M afhangt van de keuze van W, gegeven de daarvoor gemaakte keuzes van A, B, V en ℓ. Zo nee, hangt M af van de keuze van ℓ gegeven A, B en V? Zo nee, hangt M af van de keuze van V gegeven A en B? Zo nee, hangt M af van B of van A?

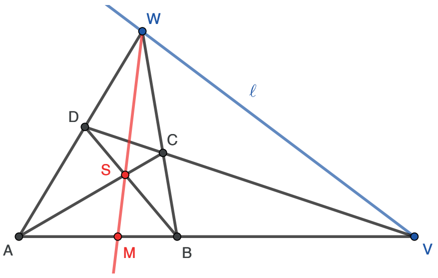
Vlak hiervoor hadden we perspectieftekenen bestudeerd. Het plaatje toont de *Union Jack*, de vlag van het Verenigd Koninkrijk, in perspectief. De lijn ℓ is de horizon en de punten V en W zijn de verdwijnpunten van de in werkelijkheid parallelle zijden van de vlag. Het punt M is het perspectiefbeeld van het midden van de zijde AB.

Met deze kennis is het niet lastig te beredeneren dat het antwoord op de eerste vraag ontkennend is: het punt M hangt niet af van de keuze van C op BW gegeven A, B, V, ℓ en W. Verschuiven van C langs de vaste lijn BW correspondeert immers met het veranderen van de lengte-breedte-verhouding van de Britse vlag.

Ik voerde het bovenstaande recept in GeoGebra uit (in de goede volgorde zodat de correcte afhankelijkheden ontstaan) en toonde dit op het scherm. Ik stelde de eerste vraag en liet mijn studenten stemmen. Een mooie werkvorm hierbij is om studenten eerst zelf te laten nadenken en vervolgens met buren of andersdenkenden te laten overleggen. Vervolgens wisselden we de argumenten uit voor en tegen verandering van het punt M. (Deze werkvorm heet *denken, delen, uitwisselen*.) Daarna kwam dan het spannende moment: onder tromgeroffel verschoof ik in GeoGebra het punt C langs de lijn BW... Een zucht van verlichting gaat door de zaal als het punt M zich gedraagt zoals we theoretisch voorspeld hadden: het blijft op zijn plaats liggen.

Deze aanpak is geïnspireerd op de didactiek van *predict, observe, explain*, die gehanteerd wordt bij demo's in natuurkundeonderwijs. Onze aanpak was meer *voorspel, leg uit, neem waar, leg opnieuw uit*. Het is belangrijk dat de studenten voordat je het demonstratie-experiment uitvoert (bij ons: het verschuiven van C langs BW) weten waarop ze gaan letten. Het geven van een antwoord en het discussiëren vooraf verhoogt de betrokkenheid enorm. (In het filmpje *Math Class Needs a Makeover* op YouTube vertelt Dan Meyer hoe je leerlingen door een dergelijke aanpak zelfs geïnteresseerd kunt krijgen in iets saais als het vullen van een vat met water!)

Dit proces van *voorspel, leg uit, neem waar* en *denken, delen, uitwisselen* herhaalden we bij de vervolgvragen. Wat gebeurt met M als we A, B, V en ℓ vasthouden, maar W bewegen langs ℓ? Dit correspondeert



Figuur 6 Vierde harmonische.

met het vervormen van de Britse vlag van een rechthoek naar een parallellogram. Als je in een parallellogram $ABCD$ de lijn door het snijpunt S van de diagonalen AC en BD neemt parallel aan de zijden AD en BC, dan snijdt deze de zijde AB in het midden. Het punt M in de tekening zou dus op zijn plaats moeten blijven wanneer we W langs de lijn ℓ bewegen. En inderdaad, GeoGebra bevestigt deze voorspelling.

Het bewegen van ℓ door V kun je opvatten als het vervormen van de Britse vlag van een parallellogram in een trapezium $ABCD$ met parallelle zijden AB en CD. We verbinden het snijpunt S van de diagonalen AC en BD nu met het snijpunt W van de niet-parallelle zijden AD en BC. Snijdt die lijn SW de zijde AB in het midden? Zo ja, dan kan M niet bewegen wanneer we ℓ variëren (bij vaste A, B en V). Om uw plezier niet te bederven, zal ik hier niet vertellen wat er gebeurt...

Uiteraard bleef de inzet van GeoGebra in deze cursus niet beperkt tot deze constructie. We hebben veel meetkundige beweringen afgeleid met voor studenten nieuwe redeneertechnieken en daarna getest in GeoGebra. Het blijven bloedstollende ervaringen, ook voor de docent.

In GeoGebra zitten macro's voorgeprogrammeerd voor bijvoorbeeld de middelloodlijn van een lijnstuk, zodat je niet steeds eindeloos met cirkels en dergelijke in de weer moet. Dit bevordert het denken in grotere stappen en verbetert de overzichtelijkheid van de plaatjes. Nadat ik mijn studenten als huiswerk had gegeven om een macro te maken voor de middelloodlijn in het halfvlak-model van het hyperbolische vlak, zat ik de volgende ochtend mijn eigen huiswerk te maken. Het lukte wel, maar mijn eerste poging was onhandig. En toen schoot me ineens te binnen: de oplossing van dit huiswerk staat in wezen al in de eerste proposities van boek I van Euclides' *Elementen*! (Hoewel de hyperbolische meetkunde pas in de negentiende eeuw is ontwikkeld, bewees Euclides meer dan 2000 jaar eerder er al ruim twintig stellingen over, dankzij de magie van de axiomatische aanpak.) Het was een fantastische gewaarwording: met software uit de 21ste eeuw werkte ik aan negentiende-eeuwse wiskunde en de beste oplossing haalde ik uit een boek dat ruim twintig eeuwen eerder is geschreven! Een betere illustratie van de eeuwigheidswaarde van wiskunde is nauwelijks denkbaar.

Conclusies

De bovenstaande voorbeelden laten zien hoe GeoGebra kan worden ingezet om leerlingen en studenten wiskunde te laten leren door op hun niveau wiskundig onderzoek te doen. We zagen voorbeelden van begeleid herontdekken en van de spanning of een experiment een vermoeden wel of niet bevestigt. De voorbeelden lieten zien hoe leerlingen en studenten met behulp van gebruikersvriendelijke software kunnen worden ondersteund bij probleemoplossen, bij het onderzoeken en begrijpen van afhankelijkheden binnen een constructie, bij het onderscheiden van relevante en overbodige voorwaarden, bij het vinden van de cruciale parameters, bij het ontdekken van equivalente beweringen die wellicht gemakkelijker te bewijzen zijn en bij het vinden van een probleemaanpak. Experimenten helpen enerzijds om onjuiste vermoedens te ontkrachten en anderzijds om juist overtuigd raken van de waarheid van een bewering. Zo spendeer je hopelijk minder tijd aan het zoeken naar niet-bestaande bewijzen.

De mogelijkheid om de meetkundige plaats van een punt te tekenen ondersteunt Polya's heuristiek van het weglaten van één voorwaarde. Voor gevorderden is soms een gedachtenexperiment met GeoGebra al voldoende om dergelijke opbrengsten te bereiken. Verder helpt GeoGebra bij het ontwikkelen van eigen vermoedens, eigen generalisaties en andere stellingen. (Zo hebben leerlingen van een student van onze lerarenopleiding de stelling van Morley herontdekt op basis van de suggestie om in GeoGebra te experimenteren met trisectrices in driehoeken!) Dit kan worden ingezet om leerlingen en studenten te leren wiskundige beweringen correct te formuleren. Tot slot het belangrijkste: GeoGebra kan worden gebruikt om het plezier van leerlingen en studenten bij hun wiskundige ontdekkingstochten te vergroten.