Rob van Oord
Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 26ste Nationale Wiskunde Dagen

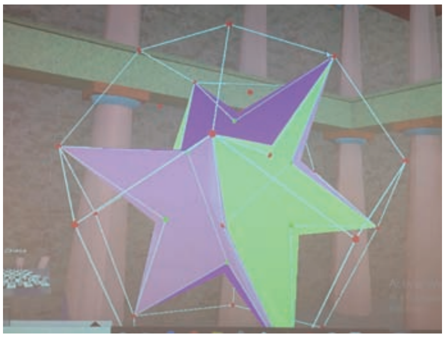
Dagen met sterren

Op vrijdag 31 januari en zaterdag 1 februari vonden voor de 26ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Na vorig jaar uitgeweken te zijn naar Veldhoven was het evenement dit jaar weer terug in de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout. Een verslag van Rob van Oord.

Voor mij begonnen de NWD al op donderdag 30 januari, in Schoonhoven. Sjaak Kamerling gaf via de WiskundE-brief te kennen dat hij liefhebbers bij hem op het Willem de Zwijgercollege wilde laten kennismaken met NeoTrie. Dit is een nieuwe benadering van meetkunde met virtual reality. Ik wist niet dat de volgende dag dit in een workshop van de NWD te gebeuren stond. De maker van deze software José Rodriguez was er ook. Ik legde José uit wat voor soort ster in mijn workshop getoond gaat worden (zie Figuur 1). Of hij die ook in de virtuele wereld kon maken. Deze uitdaging ging hij aan en na wat uitproberen van de mogelijkheden met spiegelen, knippen en plakken in zijn virtuele villa kwam mijn ster tevoorschijn (zie Figuur 2). We waren allebei blij. Op zijn website is nu te zien hoe hij de ster in de virtuele wereld construeert. Zie youtu.be/Y13cOyvJG10.

Al liep de bijeenkomst een uur uit, ik had wel mijn eerste virtuele ervaring, met een VR-bril en twee joysticks waarmee ik mijn eerste virtuele ruimtefiguur in elkaar klikte. Ik liet hem draaien, kleurde hem in en ging er in staan. Voor kinderen die vaak gamen is dit een prachtige nieuwe manier om met (meetkundige) wiskunde bezig te zijn. Sjaak heeft er al werkbladen voor gebruik in de klas voor gemaakt.

Figuur 1 Dodecaster.



Figuur 2 Dodecaster in NeoTrie.

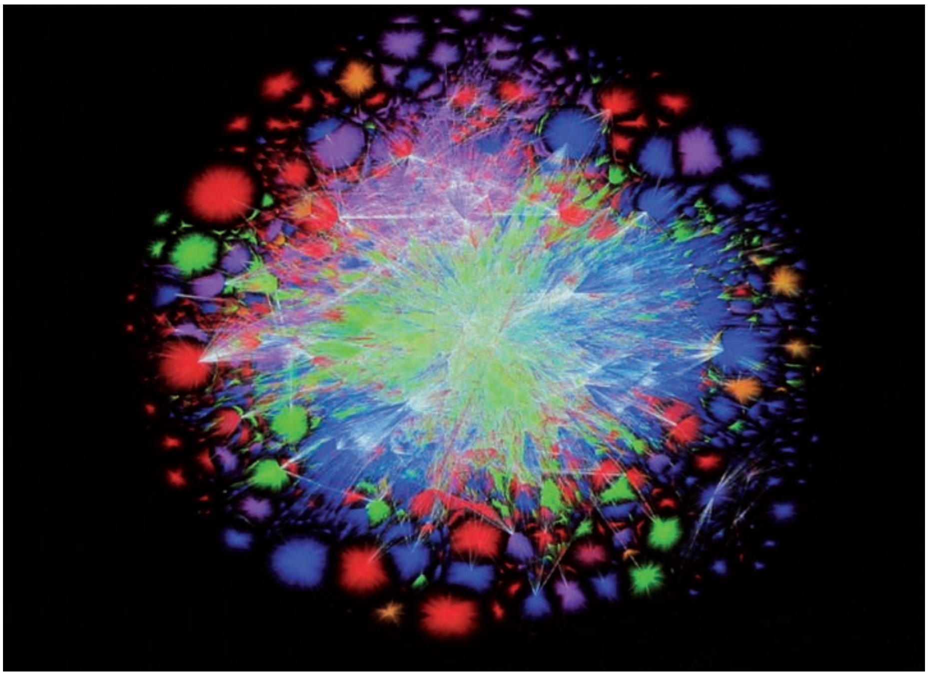
Netwerken

Vrijdagochtend om 9.05 uur pikte ik een collega-vriend van mijn oude school op en reden we met een volle auto en vol verwachting naar Noordwijkerhout. Zeker nu ik wist dat het zebraboekje 59, *Optimaliseren in Netwerken*, waar ik lang aan gewerkt heb samen met Jan Schrik en Steven Wepster, eindelijk in de stand van Epsilon ligt. Dat deze tak van wiskunde super actueel is bleek al meteen in de eerste lezing.

De aftrap van de NWD werd gegeven door Don Satijn met Tall Tales Company. Op het ritme van muziek lieten drie jongleurs ballen door de lucht gaan met een puur wiskundig patroon. Elke ‘worp’ heeft zijn eigen code, dus 121412131 is daarmee een vast werppatroon met de ballen. Het was een mooie synchrone performance.

In de startlezing van de NWD legde Nelly Litvak ons uit hoe je onderzoek kunt doen aan grote netwerken zoals Facebook, Twitter en Instagram. Met beperkte sets van data kun je er al snel uithalen wie de toppers in deze internetwereld zijn. De data worden gekoppeld in grafen. De graad van een knooppunt geeft aan hoe belangrijk die is. In de graaf zijn deze personen snel te zien als sterren. Zie Figuur 3.

Een veelvoorkomende fout wordt gemaakt als je jezelf gaat vergelijken met anderen om je populariteit te berekenen. De zogenaamde vriendschapsparadox. Als



Figuur 3 Sociaal netwerk, voorbeeld uit de lezing van Nelly Litvak.

je gaat berekenen hoeveel vrienden al je vrienden gemiddeld hebben op het netwerk waar je zelf erg veel vrienden hebt, dan tel je zelf relatief vaak mee in de berekening van het gemiddelde van je vrienden, terwijl je jezelf niet meetelt bij het berekenen van het gemiddelde van je eigen vrienden. Je vrienden zullen daardoor denken dat ze populairder zijn dan werkelijk het geval is, en een populair iemand zal zich minder populair voelen dan hij of zij werkelijk is. Er staan verschillende filmpjes op YouTube waarin dit effect wordt uitgelegd. Dus: vergelijk jezelf niet met anderen! Iedereen is uniek.

Door steeds snellere computers worden algoritmen waarmee je (schaalvrije) netwerken bestudeert ook steeds sneller. Steeds rapper kunnen kwetsbaarheden en storingen in netwerken worden opgespoord.

Spiegelen

In mijn eerste workshop was ik te gast bij Henk Hietbrink. Hij had in oude manuscripten een tekening gevonden van een instrument dat je kunt gebruiken om lichtstralen van lichtbron naar oogpunt te tekenen bij spiegelen in een lijn en bij spiegelen via de binnenkant van een cirkel, of via de buitenkant van een cirkel. We maakten een soort passer (van karton) waarmee we snel het punt op de lijn of op de cirkel konden vinden, waarin de lijn van lichtbron naar oogpunt gespiegeld wordt. Zie Figuur 4.

Soms zijn er binnen een cirkel vier mogelijke spiegellijnen van lichtbron naar oogpunt te tekenen. Je kunt dit begrijpen als je bijvoorbeeld met GeoGebra alle mogelijke weerspiegelpunten tekent, waarbij je ervoor zorgt dat de bissectrice van de spiegellijnen door het middelpunt van de cirkel gaan. Deze kromme snijdt de cirkel vaak in vier punten. Zie Figuur 5. In dat geval verwachtte Henk dus meer dan twee oplossingen te zien bij ons deelnemers.

Dit is het recept voor de constructie van de kromme van de spiegelpunten: gegeven zijn de cirkel met middelpunt M, en daarbinnen de punten O (oog) en L (lichtbron). Teken voor een willekeurig punt P op de cirkel de lijn PM. Teken het spiegelbeeld L' van L bij spiegelen in lijn PM. S is het snijpunt van lijn $L'O$ en lijn PM. Zet het spoor aan van S terwijl je P over de cirkel beweegt.

Overal waar dit spoor de cirkel doorsnijdt is het punt S een gevraagd punt waarbij de lichtstraal uit L in de cirkel weerspiegeld wordt naar het oog O. In Figuur 6 zie je vier van deze mogelijke spiegelpunten op de cirkel.

Kettingbreuken en tennisballen

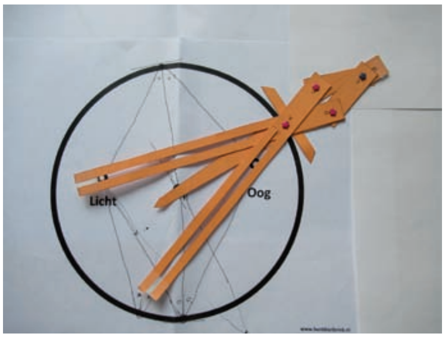
Voor blok 2 ging ik snel naar C32 waar Hans van Lint en Jeanne Breeman net een doe-workshop hadden gegeven met schieten met knikkers tegen gebogen biljartranden en vormen van zeepvliezen in draadmodellen.

Marjan Botke en ik hadden een kwartier om al onze spullen klaar te leggen voor onze workshop. Naast werkbladen met rekensommen en vouwblaadjes in allerlei kleuren werden met hulp van collega's die al kwamen opdagen de overige materialen over de tafels verdeeld.

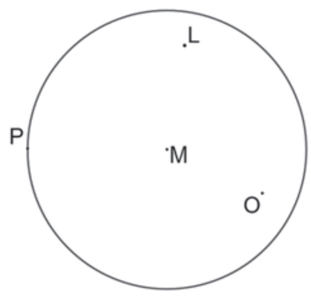
Na wat leuke rekenfoefjes zoals $ab \times cb = ddd$ en een rekensudoku lieten we de deelnemers bepalen tot welk getal een kettingbreuk nadert waarin ze hun leeftijd moesten invoeren. Eerst oefenen met de kettingbreuk

$$a = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}.$$

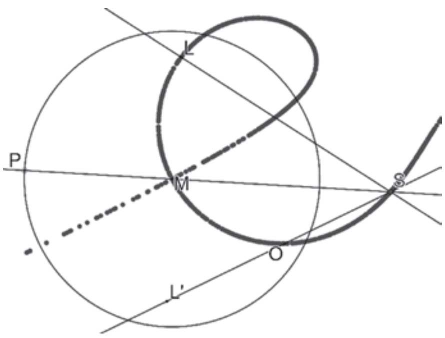
Je kunt a schrijven als



Figuur 4 Weerspiegelpasser.



Figuur 5 Werkblad in GeoGebra.



Figuur 6 Spiegelpuntenkromme.

$$a = 1 + \frac{1}{1+a},$$

waaruit volgt dat a gelijk is aan $\sqrt{2}$.

Voor de lezer de uitdaging om je leeftijd pq (bijvoorbeeld 43 jaar heeft $p=4$ en $q=3$) in een kettingbreuk te zetten bijvoorbeeld als

$$1 + \cfrac{p}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{p}{1+\cdots}}}$$

of

$$p + \cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cdots}}}$$

of

$$1 + \cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\cdots}}}.$$

Met behulp van recursievergelijkingen bij de optie SEQ op de grafische rekenmachine zie je al snel dat de eerste decimalen van de benadering in de volgende stappen gelijk blijven.

Soms komt er een rationaal of geheel getal uit je kettingbreuk. Bijvoorbeeld bij 43 wordt een van de breuken

$$1 + \cfrac{4}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cdots}}}.$$

Dan krijg je

$$a = 1 + \cfrac{4}{1+\cfrac{3}{a}},$$

dit geeft $a^2+2a-3=4a$ ofwel $a=3$. Maar

$$a = 4 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cdots}}$$

geeft

$$a = 4 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{a}}.$$

Oplossen geeft $(a-4)(3a+1)=a$, met $D=3\cdot 64$ geeft $a=2+4/\sqrt{3}$. En

$$a = 1 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cdots}}}$$

geeft

$$a = 1 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+a}}.$$

Dan krijg je $(a-1)(9+4a)=2+a$, met $D=3\cdot 64$ is $a=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}$.

Figuur 7 Stapel tennisballen

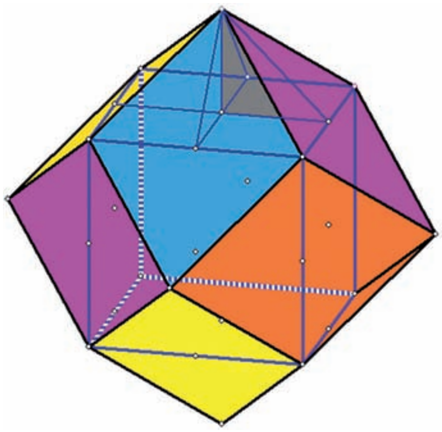
Tijd voor actie. Hoe hoog wordt een stapel met honderd tennisballen? Vragen die eerst beantwoord moeten worden: Hoe stapel je de ballen? Hoeveel ballen zitten er in een laag en hoeveel in een (complete) stapel? Hoe groot is de diameter van een tennisbal? Hoe bereken je de hoogte van een stapel? Hoe stapel je de ballen?

Als je uitgaat van een stapel met lagen van ballen in driehoeken dan is het aantal ballen in een stapel van n lagen $\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n$. De hoogte van een piramide van vier ballen bereken je door de hoogte h van de piramide die gevormd wordt door de middelpunten te berekenen. Deze is $h=\frac{1}{3}a\sqrt{6}$ met afstand a tussen de middelpunten (= diameter van een tennisbal). Voor een stapel van n lagen wordt de hoogte $(n-1)\cdot h$. Dan nog een straal onderaan en bovenaan erbij. Dus de totale hoogte is dan $a+(n-1)\cdot h$. Op je telefoon zoek je dan op dat de gemiddelde diameter van een tennisbal 67 mm is.

In een stapel van zeven lagen passen $1+3+6+10+15+21+28$ (of met de formule $\frac{1}{6}\cdot 7^3+\frac{1}{2}\cdot 7^2+\frac{1}{3}\cdot 7) = 84$ ballen. Dus voor 100 ballen heb je de stapel van 8 lagen nodig. Zie Figuur 7. Bedenk dat voor 100 tennisballen alleen de onderste 4 lagen $(36+28+21+15=100)$ nodig zijn. De stapel wordt dan 23 cm hoog.

Vervolgens werden in de groepjes ruiten gevouwen om daarna samen een twaalfruitenvlak te kunnen maken. De flappen aan de ruiten moesten op een juiste manier in de openingen in de ruiten worden geschoven. Met van vier kleuren elk drie ruiten kun je een mooi symmetrisch gekleurd ruitentwaalfvlak knutselen. Zie Figuur 8.

Daarna werd ontdekt dat het ruitentwaalfvlak in feite is opgebouwd door zes piramides op de zijkanten van een kubus te plaatsen. Aan het vouwen van de kubussen met een deuk kwamen we niet meer toe. Dat bewaar ik voor volgend jaar. Als apotheose liet ik sterren uit een doosje komen. Deze dodecaster ontstaat als holte door bij een regelmatig twaalfvlak zes 'dakpunten' af te zagen en in de kubus te klappen die je overhoudt na het afzagen. Zie ook de hand-out van onze workshop van de NWD 2019. Henk Hietbrink was zo aardig geweest om voor ons met zijn 3D-printer een flink aantal van die sterren te maken. Hij had ook in allerlei kleuren een grote voorraad met kleine sterren met gaatjes als oorbel geprint. Met ringetjes en oorhangertjes konden liefhebbers een setje van deze unieke sieraden aanschaffen. Zie Figuur 9.



Figuur 8 Ruitentwaalfvak

Figuur 9 Dodecaster oorbellen

FUNRUN en Busy Beaver

Er was dit jaar niet alleen een FUN-RUN (om 7 uur zaterdagochtend) maar de Belg David Eelbode gaf op vrijdagavond een vermakelijke show met FUN-damentele wiskunde. Hij begon met de barbierparadox. In het dorp scheert de barbier iedereen die zichzelf niet scheert. Scheert hij zichzelf of niet? In Vlaanderen is dit probleem opgelost met een vrouwelijke barbier. Hij maakte wat grappen waartoe logica kan leiden als je niet precies weet wat je aan moet met OF. Het inclusieve OF (OR), het exclusieve OF (XOR) en het verboden OF (ROR). Dit doet zich voor als er twee vrouwen in het spel zijn.

Daarna ging de lezing over het Busy Beaver-probleem. Hoe groot is het maximaal aantal enen die een n-state Turingmachine kan printen als je begint met alleen maar nullen? Hij legt de 3-state Turingmachine uit aan de hand van een grote rij lege doosjes. Per stap bekijk je of een doosje leeg (0) is of vol (1). Afhankelijk van de kleur T-shirt (wit, geel of rood) wat je aan hebt (= de instructie die je moet volgen) doe je een pingpongballetje in het doosje (1) en ga je dan een doosje naar rechts dan wel links. Uiteindelijk stopt dit proces bij zes enen. We schrijven $\Sigma(3) = 6$. Ik heb de slides van zijn lezing nog goed bestudeerd, maar helemaal snappen doe ik het nog niet. De boodschap is duidelijk: wiskunde is niet af. Op internet kon ik geen duidelijke omschrijving vinden van wat het probleem van de Busy Beaver precies is. Misschien is er een lezer die me dat kan uitleggen?

Andere wiskunde van Busy Beaver vond ik terug op het mooi verdiende T-shirt, zie Figuur 10.

Ik heb ontcijferd dat de laatste rij nullen en enen 11111100100 precies 2020 digitaal geschreven is $(4+32+64+128+256+512+1024=2020)$ en 11010 (26 digitaal vanwege 26ste NWD), maar de $101100|0$ (44 digitaal) kon ik zo gauw niet thuisbrengen. Na enig nadenken en een hint van Fred, de eindredacteur van dit blad, kwam ik tot de Nederlandse versie van FUNRUN: lolloop.

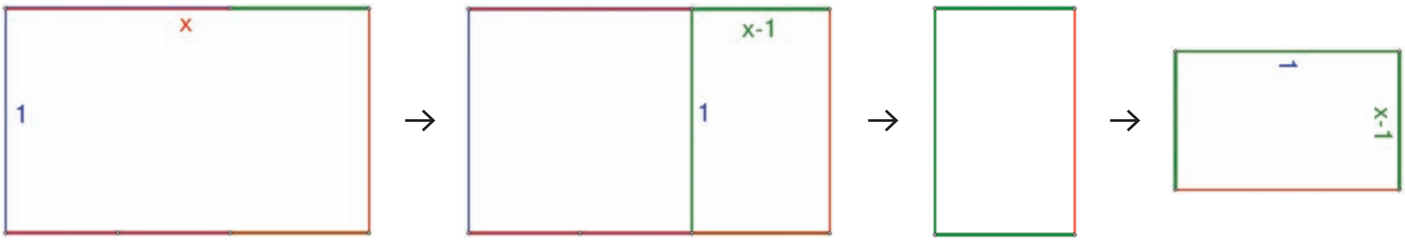
Figuur 10 T-shirt FUNRUN.

Figuur 11 Berenpark.

Berenkuilen en veelvlakken

Onder het genot van enkele biertjes heb ik in de hal met de spelletjes veel plezier beleefd aan het leggen van Berenkuilen, zie Figuur 11. Bij het zien van de puzzelstukjes van dit spel moest ik denken aan Odette de Meulemeester (die warempel ook nog steeds een workshop verzorgt) met haar pentomino's. Er moeten dierenparken worden gebouwd. Door in je beurt de bouwstenen strategisch neer te leggen kun je punten vergaren. Toiletten, kiosken en waterpartijen waren op zich niets waard, maar onmisbaar om een parkdeel compleet te kunnen maken. Ik heb het spel gekocht en al een aantal maal met vrienden gespeeld. Aan dansen ben ik helaas niet toegekomen.

De zoveelste reis die mijn vrouw en ik naar Italië zouden maken om daar de eeuwenoude cultuurproducten te (be)zoeken, is uiteraard uitgesteld. Enkele jaren geleden waren we in Sansepolcro. Daar is een museum geweid aan Luca Pacioli, een monnik en vroegrenaissance wiskundige, en zijn studies over perspectief tekenen. Daar en in de omgeving zijn ook prachtige fresco's van Piero della Francesca te bewonderen. Naast de Geschiedenis van het Ware Kruis in de kathedraal van Arezzo is verreweg het mooiste fresco, Madonna del Parto, in een oude school in Monterchi te vinden. Hij werkte samen met Luca Pacioli en gebruikte uitzonderlijk goed perspectief in zijn fresco's. Om die reden wilde ik graag horen wat Dirk Huylebrouck ging vertellen. Hij was de volgende professor uit Vlaanderen die een vermakelijke lezing gaf. Hij vertelde over Leonardo da Vinci en zijn kijk op veelvlakken. Onder zijn redactie was het vijftiende-eeuwse boek *Divina Proportione* van Luca Pacioli met tekeningen van Leonardo da Vinci door Emma Grootveld vertaald in het Nederlands. Als spreker op de NWD kregen we een exemplaar van dit prachtige boek. Dirk was kwistig met het uitdelen van zijn boek. Als je een vraag van hem goed wist te beantwoorden kreeg je meteen ook het boek. Behalve de vijf platonische lichamen staan er ook tal van tekeningen in van half regelmatige lichamen en sterren. Dirk liet zien hoe je afgezaagde delen van veelvlakken naar binnen kunt klappen. Surprise! Daar zat ook de dodecaëder bij uit mijn eigen workshop. Maar de ster die het gat vormt in de kubus gevuld met de 'dakpunten' van het twaalfvlak kende hij niet. Ik gaf hem later op de dag een van mijn 3D-modellen. Dirk heeft al vaak de mythe van de gulden snede proberen te ontzenuwen. Maar de Vlaamse televisie blijft hardnekkig vasthouden aan



Figuur 12 De goddelijke verhouding.

de gangbare opvattingen dat overal in de kunst (onder andere bij de Mona Lisa) bewust de goddelijke verhouding zou zijn aangebracht. Dit getal ($\phi \approx 1{,}618$) is terug te vinden in een regelmatige vijfhoek als verhouding tussen diagonaal en zijde. Het is hetzelfde getal als de verhouding van de langste en de kortste zijde van een rechthoek die als je er een vierkant met de kortste zijde afknipt een rechthoek overlaat die gelijkvormig is met de grote rechthoek. Noem de zijden van de grote rechthoek x en 1, zie Figuur 12. Dan geldt bij de genoemde restrictie $x:1 = 1:(x-1)$. Hieruit volgt dat $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Aansluitend op de lezing van Dirk, kwam Rinus Roelofs aan het woord. Hij heeft de plaatjes in het net genoemde boek verzorgd. Al doende kwamen ze er ook achter dat er heel wat foute tekeningen in het oorspronkelijke boek staan. Rinus liet met schitterende animaties zien hoe door draaiingen van driehoeken, vierkanten, vijfhoeken, enzovoorts, je van het ene half regelmatige lichaam naar het andere kunt transformeren. Als je dan geen dichte vormen maar alleen de randen gebruikt, dan komen de in elkaar gevlochten veelvlakken beter tot uiting. Dit heeft Escher in zijn tekeningen van allerlei sterren ook gedaan. Daarnaast liet hij zien hoe de zogenaamde Kepler–Poinsot-veelvlakken zijn opgebouwd. Op lange tafels in het Atrium lagen tal van Rinus' voorwerpen tentoongesteld. Stuk voor stuk fascinerende objecten vanuit de wiskunde bedacht. Zie Figuur 13.

KI en EGMO

Elk jaar kun je in juni de tuinenroute in de Wieringermeer fietsen. Toen mijn vrouw en ik vorig jaar bij een van de adressen met de eigenaars/kunstenaars over onderwijs te praten kwamen, raadde de heer des huizes me aan het boekje *Plussen en Minnen* van Stefan Buijsman eens te lezen. In heel begrijpelijke taal legt hij de rol van wiskunde in de maatschappij uit. Wat een toeval dat hij de slotlezing van de NWD verzorgde. Hij liet zien wat er gebeurt als je met kunstmatige intelligentie foto's op Tinder laat zetten. Of als je door KI verzonnen interviews laat maken. Dat leidt tot hilarische artikelen die nergens over gaan. Volgens hem hoeven we niet bang te zijn dat het menselijk brein door computers wordt overgenomen.

Voordat we naar huis gingen lieten de vijf slimste meisjes van Nederland zien waarom ze waren geselecteerd voor de European Girls Math Olympiade (EGMO) dit jaar niet geheel toevallig in Egmond aan Zee. Met de extra training door Quintijn Puite en Sietske Tacona moeten Anke, Femke, Kati, Lisa en Naomi wel hoge ogen gaan gooien. Ik vind het opvallend dat Gabriëlle, de oudere zus van Naomi, in 2017 ook al aan de olympiade mee deed (zilveren medaille). Ik had haar toen als leerlinge in 5 vwo.

Dit jaar heb ik overduidelijk ervaren hoe je door de NWD wordt geïnspireerd en hoe je anderen ook kunt inspireren. Ik ben vast van plan om volgend jaar weer te gaan en materiaal en ideeën mee te nemen in mijn volgende workshop.

Figuur 13 Modellen van Rinus Roelofs.