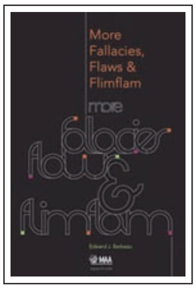
Boekbesprekingen

Book Reviews



Edward J. Barbeau

More Fallacies, Flaws & Flimflam

Mathematical Association of America, 2013
xv + 171 p., prijs $35.00
ISBN 9780883855805

Als leraar kom je bij het nakijken van zo'n beetje elke wiskundetoets antwoorden tegen die overduidelijk fout zijn (soms vanwege een opeenstapeling van ondanks al jouw goede bedoelingen ergerniswekkende misvattingen, soms vanwege een enkele bizarre stap), maar soms zelfs verrassenderwijs wel degelijk tot het correcte antwoord leiden. Of de gebruikte redeneringen c.q. gedane berekeningen zijn fout, maar het is soms hels moeilijk er ten eerste zelf achter te komen waar precies de fout zit en ten tweede dat later de leerling (vaak niet eens de domste) te kunnen uitleggen. Na inmiddels bijna veertig jaar wiskundeleraarschap in de frontlinie (still counting) heb ik een kostelijke — gestaag groeiende — verzameling wiskundige en logische, maar ook taalkundige bloopers (bijvoorbeeld een van mijn favorieten, namelijk $xy = 22$ geeft $x = 2 \vee y = 2$, let op het sublieme of-teken) verzameld die het waard zouden zijn opgenomen en geanalyseerd te worden in boekvorm, maar daarvoor ontbreekt het mij, de gemiddelde leraar, de tijd. Gelukkig had ik net genoeg tijd om *More Fallacies, Flaws & Flimflam* (uit 2013 en inderdaad het vervolg van *Mathematical Fallacies, Flaws & Flimflam* uit 2000) te lezen, een minstens zo grandioze collectie onversneden gekte, in de loop van de jaren verzameld door Edward J. Barbeau (in 1967 begonnen als math professor aan de University of Toronto), deels aan hem opgestuurd door lezers van en — in de jaren 2000 tot 2008 — genoemd en besproken in zijn column in de *College Mathematical Journal*. De hoop die Barbeau in zijn voorwoord uitspreekt is dat ook deze collectie "may be useful to teachers at all levels" en ik denk dat dat klopt, want de bijna 150 behandelde fouten zijn handig ondergebracht in een elftal onderwerpen van 'Arithmetic' via 'School Algebra' via 'Geometry' via 'Differential Calculus' via 'Combinatorics' via 'Limits', 'Sequences and Series' tot 'Linear and Modern Algebra' (afgesloten met een toefje 'Miscellaneous') en bovendien loopt het niveau van die fouten van basisschoolrekenwerk tot universitaire wiskunde. De opzet van het boek is telkens een (somtijds hilarische) foute redenering te citeren en die dan óf uitvoerig toe te lichten (soms zelfs op meerdere manieren) óf voor zichzelf te laten spreken en dus helemaal niet toe te lichten. Dat eerste leidt soms tot het zoeken naar en het gelukkig ook formuleren van voorwaarden waaraan voldaan moet worden opdat de door de leerling gekozen (foute) methode inderdaad tot het correcte antwoord zal leiden, een mijns inziens uiterst nuttige en soms zeer verhelderende exercitie. Dat laatste (het soms niet toelichten) daarentegen beschouw ik als minder geslaagd, want soms was het (mij) niet direct duidelijk wat er precies fout was en zelfs al zou het mij wel duidelijk zijn geweest, dan nog zou ik graag het commentaar of de uitleg van Barbeau willen lezen, al was het maar om te kunnen zien of je zelf goed zat (altijd prettig) of op welke manier er nog meer naar zo'n probleem/oplossing kan worden gekeken (altijd interessant). In een enkel geval bleef ik zelfs na drie keer herlezen achter met een onbe-

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview

stemd *Louis van Gaal*-gevoel... Ook zou het mij in een enkel geval hebben geholpen als er een handige tekening was toegevoegd aan de uitleg. Maar deze minpuntjes worden meer dan gecompenseerd door de vele momenten van verbazing en de (gelukkig bijna even zo vele) daaropvolgende opgedane inzichten.

Een voorbeeld van een fraaie redenering die niet op triviale wijze te weerleggen valt komt uit het hoofdstuk ‘Combinatorics’. De vraag was om te berekenen op hoeveel manieren iemand in een $4\times4\times4$-kubus vier op een rij kan hebben (vrij vertaald). Een van de gegeven oplossingen was: Breid de $4\times4\times4$-kubus uit tot een $6\times6\times6$-kubus door er als het ware een laag blokjes omheen te plakken. Elk buitenblokje is de verlenging van precies één lijn van vier binnenblokjes en elke lijn van vier binnenblokjes correspondeert met precies twee buitenblokjes. Het gezochte aantal is dus $(6^3-4^3):2=76$. De lezer kan hier wellicht even over nadenken...

Een voorbeeld zoals ik ze zelf ook vaker dan me lief is tegenkom, is er een waarbij een leerling de vergelijking $\log(x)-\log(3)=\log(5)-\log(x-2)$ als volgt oplost:

$$\begin{aligned}&\log(x)-\log(3)=\log(5)-\log(x)-\log(-2)\\ &\Rightarrow 2\log(x)-\log(3)=\log(5)-\log(-2)\\ &\Rightarrow 2\log(x)-\log(3)=\log(7)\\ &\Rightarrow 2\log(x)=\log(10)\\ &\Rightarrow x=5.\end{aligned}$$

Nadere analyse toont aan dat deze oplossingsmethode *altijd* (voor positieve a en b) leidt tot de goede oplossing van de vergelijking $\log(x)-\log(a)=\log(a+b)-\log(x-b)$.

Ten slotte een voorbeeld van een wel heel diep verstopte fout, namelijk wat klopt er niet in het volgende probleem? Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ als gegeven is dat $\angle A:\angle B:\angle C=2:3:4$, $AC=5$ en $AB:BC=3:2$. De gegeven oplossing begint met het berekenen van de hoeken A, B en C die respectievelijk 40, 60 en 80 graden moeten zijn. Stel verder dat $AB=3x$ en $BC=2x$, dan geldt via de cosinusregel dat $5^2=(3x)^2+(2x)^2-2\cdot3x\cdot2x\cdot\cos(60^\circ)$ oftewel $25=7x^2$. Dat geeft de waarde van x en met $5+3x+2x$ oftewel $5+5x$ het gevraagde antwoord.

Ik wil u niet al teveel onder druk zetten, maar als u hier niet uitkwam *kan* een logische gevolgtrekking zijn het boek onverwijld aan te schaffen. Maar ook als u hier wel uitkwam, is mijn advies datzelfde te doen (en ook de voorganger maar meteen te bestellen), want er staat nog zoveel meer moois in (bijvoorbeeld dat er niet-triviale oneindige rijen a_k en b_k zijn zodat inderdaad $\sum a_k\cdot\sum b_k=\sum(a_k\cdot b_k)$ zoals een leerling abusievelijk en dus onterecht had toegepast, en ook hoe vreemd het eigenlijk is te constateren dat als de temperatuur toeneemt van $5{,}2$ naar $7{,}9$ graden Celsius het dan 52% warmer is geworden).

De schrijfstijl is verder nuchter, soepel, enigszins ironisch, maar altijd helder. Je hoeft gelukkig niet constant te bladeren want de bespreking van een vaak uiterst originele redenering staat er dan direct achter en de lay-out is prettig, zoals altijd bij de boeken van de MAA. Kortom, zeker voor een wiskundeleraar (maar ook voor de niet-leraar) is dit boek (net als zijn voorganger) een — voor MAA-begrippen redelijk geprijsde — aanrader. Een essentieel citaat mag hier niet ontbreken als afsluiting: “It may be that the task of sorting out erroneous solutions may endow students with empathy for the hapless teacher who is faced with such solutions all the time and has to come up with a constructive response.”

Joop van der Vaart

Matt Parker

Humble Pi

A Comedy of Maths Errors

Allen Lane, Penguin Random House, 2019
314 p., prijs £20.00
ISBN 9780241360231

Er ligt een heel bijzonder boek voor me. Wiskunde? Ja. Maar niet zoals we gewend zijn in deze rubriek. Geen wiskundige theorieën, geen uitleg/presentatie van wiskundige zaken, noch elementair, noch (meer) geavanceerd. De schrijver zelf vat de inhoud samen in de ondertitel: ‘A Comedy of Maths Errors’ en dat kan je dan meteen op het verkeerde been zetten. De inhoud is allerminst komisch, noch als zodanig bedoeld. Wel gaat het over ‘Errors’, al of niet ten gevolge van onwetendheid of pure domheid, die, toegegeven, een glimlach teweeg kunnen brengen.

Als in de zeventiende eeuw door Zweden de hulp ingeroepen wordt van Amsterdamse timmerlui bij de bouw van een nieuw groot koopvaardijschip, de Vasa, dan worden zij op de bouwtekeningen geconfronteerd met maten in ‘voeten’. Wanneer die Amsterdammers gewoontegetrouw de Amsterdamse voet gebruiken en hun Zweedse collega’s hun Zweedse voet, dan lijkt ons het te voorspellen gevolg duidelijk: het schip zal direct na de tewaterlating kapseizen en in de golven verdwijnen, wat ook gebeurde. Inderdaad, domheid, onoplettendheid, name it. Zo schetst het boek een grote variëteit van elementaire tot geavanceerde wiskundige missers. Niet alleen historische, van eeuwen geleden, waardoor je snel geneigd bent je schouders op te halen, zo van “ze wisten nog niet beter”. Nee, vooral de talrijke hedendaagse voorbeelden zijn sprekend. Wat te denken van de waargebeurde situatie in 2004 toen bij een aantal lange afstandsvluchten met eenzelfde type vliegtuig, alle elektronische systemen van het ene op het andere moment tijdens de vlucht de geest gaven? Hetzelfde gebeurde in 2015 met een Boeing 787 Dreamliner. De oorzaak lag in de te geringe capaciteit van de computertelsystemen in verband met het aantal noodzakelijk te gebruiken binaire bits, zodat het systeem op zeker moment weer vanaf 0 ging tellen. Gelukkig heeft dit toen niet geleid tot ongelukken. Hetzelfde soort probleem lag ten grondslag aan de vrees voor computeruitval ten gevolge van de millenniumwisseling.

Soortgelijke problemen spelen bij kalenderoverwegingen, zowel in het verleden (Juliaans versus Gregoriaans) als in de huidige tijd, waarbij in de media nogal eens eeuwen vooruit gekeken wordt en allerlei ongefundeerde voorspellingen gedaan worden. Onvoorziene ingenieursproblemen kunnen tot grote consequenties leiden die niet zelden tot gevaarlijke situaties aanleiding geven. Denk aan constructieproblemen bij de bouw van bijvoorbeeld bruggen. Je denkt alles ingecalculeerd te hebben en toch stort de geconstrueerde brug in. Het gebeurde in het verleden, het gebeurt nu nog steeds. Bij de London Millennium Bridge van 2000 greep men precies op tijd in: door enorme trillingen was het noodzakelijk de brug al twee dagen na de opening te sluiten. De officiële berichten over de oorzaak van dergelijke ‘rampen’ hebben meestal ten doel het publiek gerust te stellen, terwijl de werkelijke oorzaak niet naar buiten komt. Verticale trillingen lagen voor de hand, maar met zijwaartse schommelingen was geen rekening gehouden.

Het is verbazingwekkend dat overheden in veel gevallen wegkomen met onjuiste redeneringen. Een bekend voorbeeld is dat waarin de regering van Donald Trump heeft geprobeerd om de premies van Obamacare voor oudere personen drastisch te verhogen; bij de berekeningen moest men uitkomen op het getal 3, maar men kreeg $3{,}49$. De redenering was toen dat $3{,}49$ na afronding een 3 wordt, waarmee de hogere premies toegepast zouden kunnen worden. Er was voorbijgegaan aan het feit dat $3{,}49$ een ander getal is dan 3. Pas na een intensieve rechtsgang (!) en een langdurig proces werd aan deze praktijk een halt toegeroepen. Verkeerd gebruik van afrondingen ten gunste van de 'afronder' komt veel vaker voor. We zijn er nauwelijks attent op. De schrijver van het boek noemt dit sindsdien "doing a Donald".

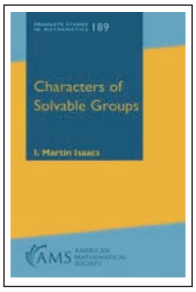
Ernstig zijn de monteursproblemen op allerlei gebied, waar een 'vergissing' van enkele micrometers catastrofale gevolgen kan hebben. Of lees de achtergronden van de crash in 1998 van de Mars Climate Orbiter. Gevolg van een minieme vergissing in de baanberekening. Of lees over de wiskundige problemen in de gezondheidszorg, bijvoorbeeld bij het richten van bestralingen: kwesties van leven en dood, die afhangen van wiskundige precisie. En wat te denken van omvallende kranen, zoals in Alphen aan den Rijn en onlangs nog in de Verenigde Staten? Óf de wind heeft het gedaan, óf een andere niet te voorspellen extreme omstandigheid. Nooit wordt een constructiefout openbaar gemaakt (als een soort disclaimer doorgaans vooraf contractueel vastgelegd: horen, zien en zwijgen!). Op deze wijze verheldert het boek een overvloed aan situaties, waarbij duidelijke verklaringen van de wiskundige 'fouten' aangegeven worden.

Vermakelijk (dus toch de 'Comedy'?) is het hoofdstuk 'Out of Shape', waarin eenvoudige voorbeelden gegeven worden van misleidende reclametekeningen: een voetbal, getekend met 6-hoeken (in plaats van 5-hoeken) met een uitstapje naar Euler en naar een toepassing op een torus, of getekende maansikkels met sterren getekend in het donkere deel, afbeeldingen van niet effectief aangebrachte hangsloten op deuren, systemen van raderen (zoals vaak gebruikt in psychologische testen en getekend op dozen met speelgoed, of op munten) die niet werken. Legio zijn de voorbeelden in 'Probably Wrong', waarin de waarschijnlijkheidsrekening verkeerd gebruikt wordt. Aan de welbekende lijst in deze sfeer worden weer nieuwe toegevoegd.

Kortom, een buitengewoon rijk boek, waaruit ik in het voorgaande slechts een tamelijk willekeurige greep heb gedaan. Zoals ik in het begin al schreef moet de lezer geen nieuwe wiskunde verwachten. Voor wie is het boek dan bestemd? Volgens mij zal het boek een nuttige functie kunnen vervullen voor allen die beroepsmatig wiskunde toepassen, maar vooral voor hen die dergelijke beroepsbeoefenaren opleiden, zowel in wo als hbo. Denk bijvoorbeeld aan de blunders die gemaakt zijn in het proces van Lucia de B. Pas na wiskundige analyse kwam het uiteindelijk goed, maar er moesten wel grote weerstanden overwonnen worden. Ook in de chaotische pensioendiscussies werden (worden) stellingen betrokken, vermoedens en voorspellingen gepresenteerd, die meer het karakter van een 'geloof' hebben dan dat zij feitelijk waar zijn. Wiskundige interventie is in dergelijke zaken meer dan gewenst. Daarom dient de service wiskunde in een grote diversiteit van faculteiten en opleidingen een stevige plaats te hebben, respectievelijk te krijgen. Dit boek kan daarbij veel profijt opleveren. Van techneuten tot economen, van pedagogen (ja ook zij, want in die sfeer worden enorme blunders begaan bij het opzetten van onderzoeken en het interpreteren van resultaten) tot politicologen, van bestuurskundigen tot andragogen, van medici tot landbouwkundigen, van belastingdeskundigen tot psychologen, ja, overal waar wiskunde gebruikt en toegepast wordt.

En voor ons als wiskundigen zelf? Met het boek geniet je een aantal uren van een buitengewone 'Comedy of Maths Errors'. Het spoort aan tot precisie en oplettendheid. Want de talloze besproken voorbeelden tonen het enorme maatschappelijke belang van wiskundige precisie en oplettendheid. In die zin is dit boek tevens een schoolvoorbeeld van de maatschappelijke betrokkenheid van ons vak. Slechts door alertheid van ieder van ons en door vasthoudende durf om missers aan de kaak te stellen, kunnen we erger voorkomen. De schrijver toont dat daarvoor doorzettingsvermogen vereist is, want tegenkrachten willen dikwijls hun ongelijk niet erkennen, ondanks het feit dat menselijke en maatschappelijke belangen voorop dienen te staan. Fouten maken we allemaal, daarom is de titel ook zo mooi gekozen. Niet vanuit onze ivoren toren van alwetendheid, maar vanuit een nederige maar tevens vastberaden houding wijzen op wat beter kan. De schrijver zelf geeft hierin het voorbeeld in de opdracht van zijn boek: "Dedicated to my relentlessly supportive wife, Lucie. Yes, I appreciate that dedicating a book about mistakes to your wife is itself a bit of a mistake." Een leuke bijzonderheid: het boek telt de pagina's van 314 aan het begin tot 1 aan het eind. Het boek voorziet in een lijst van illustraties, en een gedetailleerde index. We mogen Matt Parker dankbaar zijn dat hij dit boek heeft geschreven.

Wim Kleijne



I. Martin Isaacs

Characters of Solvable Groups

Graduate Studies in Mathematics, Vol. 189
American Mathematical Society, 2018
xi + 368 p., prijs $94.00
ISBN 9781470434854

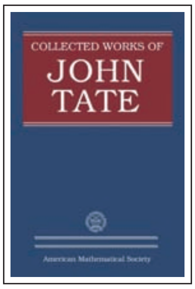
De auteur publiceerde onder meer de volgende drie boeken, waaruit feitelijkheden worden gebruikt in zijn nieuwe boek. Die boeken zijn van een hoogwaardig onderwijskundig en wiskundig niveau; zonder meer van harte aanbevolen. Het gaat om: *Character Theory of Finite Groups* (AMS, Chelsea Publications, 2006); *Finite Group Theory* (AMS, 2008); *Algebra: A Graduate Course* (AMS, 2009). Hij zegt in het voorwoord van zijn huidige boek, vrij vertaald, dat hij verwacht dat "lezers vertrouwd zijn met groepentheorie op beginnersniveau, en met karaktertheorie. Het gaat hierbij om groepentheorie in een stevige eerstejaars algebracursus voor masterstudenten; daarbij zou de eerste helft van het onder 1) vermelde boek voldoende moeten zijn". Ik ben het daar roerend mee eens. De inhoud van het boek beslaat, ruwweg gezegd, uit werk van Isaacs vanaf 1973, werk van Gajendragadkar (*Journal of Algebra* 59 (1973), 237–259), werk aangaande Brauer-karakters en dat rond het McKay-vermoeden, pi-theorie, telpartijen van karakters en karaktercorrespondenties (zoals bijvoorbeeld die van Glauberman). Ook neemt werk van Gabriel Navarro (vanaf 1995 tot heden) een prominente plaats in het boek in. We moeten helaas in dit korte bestek afzien van nadere uitleg en details.

Het derde gedeelte van het boek behandelt de zogeheten monomiale karakters. Hier volgt de definitie, noodzakelijk om het vervolg van deze recensie te kunnen begrijpen: “Een karakter χ van een eindige groep G is een monomiaal karakter, als er een ondergroep H van G bestaat met daarbij een lineair karakter λ van H, zodanig, dat χ geïnduceerd wordt door λ.” De auteur geeft een overzicht van resultaten betreffende M-groepen (dat wil zeggen eindige groepen waarvoor alle irreducibele karakters monomiaal zijn). In dat overzicht zijn gedetailleerde bewijzen geleverd van stellingen van Dade (1973, 1981), Navarro (1995), Lewis (1996), Huppert (1953, 1957, 1967), en Isaacs. In dit gedeelte wordt de theorie van symplectische modulen besproken en behandeld vanwege het belang voor de theorie van M-groepen; met name dan ten behoeve van de bewijzen van de aldaar genoemde stellingen 10.1 en 10.2 van Dade uit 1981. Maar er is meer bekend over toepassingen ervan op de theorie van M-groepen, onvermeld in het boek. Ik geef er twee: (a) Zij G een p-oplosbare groep, p een priemgetal ongelijk aan 2, N een normaaldeler van G, G/N superoplosbaar van oneven orde. Neem aan dat elke priemdeler van de orde van G/N het getal $p(p-1)$ deelt. Stel dat λ een irreducibel monomiaal karakter van N is wiens graad een macht van p is. Dan is elke irreducibele constituent van het geïnduceerde karakter van λ naar G toe, monomiaal. [Dit is een omgekeerde van Dades stelling 10.1; zie het artikel van N.S. Hekster en R.W. van der Waall in *Journal of Algebra* 105 (1987), 255–267.] (b) Mijn artikelen in de *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 30 (1987), 153–167 en 31 (1988), 464–474.

Toepassingen van M-groepen-structuren op vermoedens van Artin en Dedekind betreffende L-functies en zèta-functies zal de lezer vergeefs zoeken in het boek; jammer! De classificatie van de minimale niet-M-groepen (dat wil zeggen eindige groepen waarbij de homomorfe beelden van alle echte ondergroepen van G en die van de echte factorgroepen van G allemaal M-groepen zijn, doch G zelf geen M-groep) wordt nergens aangeroerd in het boek. De bepaling ervan vergde mij een hoeveelheid onderzoek, gepubliceerd in zo’n tien artikelen gedurende de jaren 1974–1983. Voorts wordt nergens het werk van Hekster over M-groepen genoemd. Dade en ik bewezen onafhankelijk van elkaar in 1973 dat er M-groepen bestaan met daarin minimale niet-M-groepen als normaaldeler; het kleinste voorbeeld van zo’n typische M-groep is van orde 3584; dit alles staat als feit genoemd in Isaacs’ boek op pagina 256.

Hoe nu dit boek te beoordelen op de zaken die er wél in staan? Welnu, de inhoud is zeker bestemd voor de afficionados en connaisseurs, alsmede gevorderde studenten en hen niet alleen. Helder geschreven, het boek behoort zeker in bibliotheken aanwezig te zijn! Het boek bestaat uit drie gedeelten. De eerste twee geven een vrijwel volledig beeld van de in het begin van deze recensie genoemde ontwikkelingen gedurende de laatste, pakweg, vijftig jaar. Het derde gedeelte bevat, laten we zeggen, hooguit de helft van wat er op het gebied van de theorie der M-groepen bekend is tot op de huidige dag. Dat gedeelte kan mij ertoe nopen, deo volente, om een aanvulling te schrijven; wie weet!

Robert van der Waall



Barry Mazur, Jean-Pierre Serre (eds.)

Collected Works of John Tate

Parts I and II

American Mathematical Society, 2016
716 p., prijs $150 (Part I)
751 p., prijs $150 (Part II)
ISBN 9780821890929, 9780821890936

“Tate helped shape the great reformulation of arithmetic and geometry which has taken place since the 1950’s.”

Andrew Wiles, inleiding bij de voordracht van Tate, ‘Conference on the Millennium Prizes, 2000’.

John Tate (1925–2019) schreef een indrukwekkend oeuvre in een periode die begon met zijn baanbrekend proefschrift in 1950. Zijn werk omvat belangrijke ontwikkelingen in de getalheorie en de algebraïsche meetkunde. Deze 1400 pagina’s brengen zijn werk van zestig jaar samen.

In 1956 ontving Tate de American Mathematical Society’s Cole Prize “for outstanding contributions to number theory”, in 1995 de Leroy P. Steele Prize “for lifetime achievement”, in 2002/2003 de Wolfprijs in de wiskunde en in 2010 kreeg Tate de Abelprijs voor zijn werk in de getaltheorie.

Een omschrijving van zijn invloed vinden we in de laudatio bij de Abelprijs: “Many of the major lines of research in algebraic number theory and arithmetic geometry are only possible because of the incisive contributions and illuminating insights of John Tate. He has truly left a conspicuous imprint on modern mathematics.”

In de inleiding schrijft Tate. “I did not write easily, and am thankful that my colleagues generously included unpublished results of mine in their papers and books, crediting me fully.” Dat lijkt in tegenspraak met de omvang van zijn eigen werk. Toch was dit zo. Vooral werk uit zijn vroege periode bleef lang ongepubliceerd. Een van de vele voorbeelden: de *Tate-kromme*, waarvan de publicatie 36 jaar op zich liet wachten; verderop een beschrijving.

Tate heeft zijn hele leven lang moeite gehad om, met zijn kritische instelling, tevreden te zijn met wat hij schreef. Bovendien kwam helderheid in zijn gedachten soms langzaam op gang. In zijn correspondentie met Serre zien we daar steeds voorbeelden van, zoals in zijn brief 23-X-1966 aan Serre: “My course is ‘dragging’ along. ... I am so confused that I am going rather slowly.” Het duurde 8 jaar voor dat prachtige resultaat, in dat college ontwikkeld, gepubliceerd werd: ‘Group schemes of prime order’, I.34 (hiermee verwijzen we naar Part I, publicatie 34). Steeds weer zien we hoe diepe gedachten bij Tate zich op vaak onnavolgbare manier ontwikkelen, tot er een indrukwekkend nieuw idee ontstaat. We hebben veel voorbeelden van structuren die Tate ontdekte, resultaten die vaak circuleerden lang voor de uiteindelijke publicatie. In *Kennislink*, in de bijdrage ‘Abelprijs 2010’ van Alex van den Brandhof, beschrijf ik hoe fascinerend het was om aanwezig te zijn bij dat denk- en scheppingswerk van John Tate.

In 1958 ging Emil Artin met pensioen in Princeton, de leermeester en schoonvader van Tate. Er kwam een aanlokkelijk aanbod aan Tate om Artin op te volgen. Een van zijn toenmalige promovendi vertelde me het volgende verhaal. Oscar Zariski (1899–1986) was de drijvende kracht achter de ontwikkelingen in de algebraische meetkunde in Harvard. Toen hij over een mogelijk vertrek van Tate naar Princeton hoorde kwam Zariski in actie. Aan de leiding van Harvard University stelde hij voor om Tate nu onmiddellijk 'tenure' te geven en tot 'full professor' te benoemen. Ze wilden graag de publicatielijst van Tate zien. Het proefschrift van Tate zou pas in 1967 gepubliceerd worden, en de resterende tien artikelen, alles bij elkaar tachtig bladzijden, waren niet voldoende om een hoogleraarsbenoeming aan de prestigieuze Harvard Universiteit te rechtvaardigen. "Maar er is heel veel ongepubliceerd werk van Tate", probeerde Zariski als argument in te brengen. Dat hielp niet. Maar Zariski, eenmaal overtuigd van zijn gelijk, was vasthoudend. Alle assistenten en promovendi werden opgetrommeld; zij werkten een hele nacht door in de bibliotheek, en de volgende dag lag er een lange lijst van artikelen die naar ongepubliceerd werk van Tate verwezen. Tate werd benoemd en bleef als hoogleraar in Harvard tot 1990.

In dit verzameld werk vinden we nog vijf nog niet eerder gepubliceerde artikelen: 13, 22, 38, 51, 53. Verder zien we dat een deel van de publicaties gezamenlijk werk is (33 van de 78); uit brieven, maar ook uit eigen ervaring weet ik hoe dat geleid heeft tot publicaties.

Eerder werden correspondentie tussen Serre en Tate gepubliceerd [ST]; voor een bespreking zie NAW 5/20 (2019), pp. 147–149. We geven die brieven aan met S-datum of T-datum. In de twee delen die hier besproken worden, vinden we daar nog een aanvulling op: brieven aan Serre, Dwork en Atkin.

"... your problem, Tate, is that you are trying to think."

Max Sporer, de eerste wiskundeleraar van John Tate
autobiografie, *The Abel Prize 2008–2012*, pp. 249–257.

We zullen een (korte, oppervlakkige) beschrijving van het werk van Tate geven aan de hand van gangbare terminologie in de wiskunde waar zijn naam aan verbonden is. Een uitgebreide beschrijving van het werk van Tate vinden we in J. Milne, The work of John Tate, *The Abel Prize 2008–2012*, Springer, 2013, pp. 259–340.

Het proefschrift van Tate, Princeton 1950, vinden we in Part I; het werd veel geciteerd tot het in 1967 gepubliceerd werd in de proceedings van de Brighton-conferentie in 1965, zie I.1. Hierin geeft Tate een bewijs van de functionaalvergelijking en analytische voortzetting van Hecke L-reeksen. We zien een voorloper van Godement–Jaquet (1972) en van het Langlands-programma (1967).

De Tate-cohomologiegroepen (1952). Een belangrijk instrument in de algebraïsche getaltheorie. Tate was de eerste die expliciet groepencohomologie in de klassenlichamentheorie formuleerde en gebruikte (waar begrippen als 'crossed homomorphisms' en factor systemen al bekend waren).

De Tate-kromme (1959) vinden we in een ongepubliceerd manuscript 'Rational points on elliptic curves over complete fields'. Voor een elliptische kromme E over een niet-archimedisch lokaal lichaam K met slechte, multiplicatieve reductie (semi-stabiele reductie) laat Tate zien dat er een parametrisatie $K^*/t^{\mathbb{Z}} \cong E(K)$ bestaat (op een kwadratische twist na). Er is dan weliswaar geen analytische parametrisatie, maar wel een p-adische, waar het voldoende is om de 'periode' t te vinden.

Tate sprak over dit onderwerp tien jaar later bij een bezoek aan Hamburg, waar zijn leermeester Emil Artin van zijn emeritaat genoot. Naar aanleiding daarvan publiceerde Roquette in 1970 'Analytic theory of elliptic functions over local fields'; daar vinden we de naamgeving 'Tate curves'. Mumford generaliseerde dit idee van Tate naar *algebraïsche krommen* van hoger geslacht in 1972, *Compositio Mathematica* 24 (1972).

In de Arbeitstagung, Bonn 1984, werkte Faltings het idee van Tate verder uit naar *abelse variëteiten* van hogere dimensie, en gebruikte dit om irreducibiliteit van een moduliruimte te bewijzen, verder beschreven en uitgewerkt in Faltings en Chai, *Degenerations of Abelian Varieties* (1990). (Zie ook McCabe, Harvard PhD Thesis 1968, en Raynaud, ICM 1970.)

Ten slotte vinden we de oorspronkelijke beschrijving verder uitgewerkt door Tate, gepubliceerd in 1993/1995, 'A review of non-Archimedean elliptic functions', II.69.

We zien dat een idee van Tate in 1959 aanleiding is tot spectaculaire ontwikkelingen, tot we na 36 jaar de oorspronkelijke, uitgewerkte versie in druk te zien krijgen.

Het idee van Tate dat deze p-adische parametrisatie een bijzonder geval is van p-adische analytische ruimten werd in het begin door tijdgenoten met enige scepsis bekeken; Grothendieck: "Tate m'a écrit de son côté sur ses histoires de courbes elliptiques, et pour me demander si j'avais des idées sur une définition globale des variétés analytiques sur des corps complets. Je dois avouer que je n'ai pas du tout compris pourquoi ses résultats suggéreraient l'existence d'une telle définition, et suis encore sceptique" (brief aan Serre, 18-X-1959). Maar in 1961 was Grothendieck positief over dit idee. Een manuscript 'Rigid analytic spaces' circuleerde in verschillende versies, 'Private notes, reproduced (with) out his permission' (IHES 1962, Russische vertaling 1969). In de briefwisseling tussen Serre en Tate in 1961/1962, in het bijzonder in S-x-IV-1962 zien we dat de naam van het artikel van Serre afkomstig is, en zien we een discussie in hoeverre dit manuscript kan worden verspreid. Ten slotte verscheen de gedrukte versie in 1971, I.36: "The editors of *Inventiones Mathematicae* believe that it is in the general interests of the mathematical community to make these notes available to everyone." Het was een begin van geweldige ontwikkelingen (Raynaud 1974, Bosch–Güntzer–Remmert 1984, Bosch–Lütkebohmert 1993, Berkovich 1990; zie Fujiwara–Kato 2018). Voor een overzicht door Brian Conrad zie 'Several approaches to non-archimedean geometry' (2007). En dit lijkt nog maar een begin, zie het werk van Peter Scholze over perfectoïde ruimtes.

De Serre–Tate-lifting, Serre–Tate-coördinaten. In een brief van Tate aan Serre 10-I-1964, pp. 667–672 in Part I vinden we een eerste aanzet hiervoor, na hun briefwisseling in december 1963, zie T-16-XII-1963 in [ST]. Een abelse variëteit A van dimensie g over een (perfect) lichaam K van karakteristiek p zodanig dat $(\mathbb{Z}/p)^g \hookrightarrow A(k)$ heet een *gewone* (ordinary) abelse variëteit. Die laat een 'kanonieke' lift naar karakteristiek nul toe (endomorfismen, Frobenius, polarisatie liften mee). Dit resultaat wordt beschreven door Serre, Tate en Lubin in de Woods Hole AMS Summer School 1964; dat manuscript wordt nu voor het eerst gepubliceerd, I.22. Een online versie was al wel beschikbaar, en bewijzen waren al te vinden in de literatuur, zie bijvoorbeeld Katz (1981), Messing (1982). Serre–Tate-coördinaten geven een prachtige beschrijving van een situatie waar analytische methoden niet aanwezig zijn; deze, en een generalisatie naar niet-gewone abelse variëteiten is nu volledig begrepen. Het werk van Deuring voor elliptische krommen (1941) was het eerste geval waar het bestaan van een CM-lifting werd aangetoond, waar Hasse in zijn poging vermoedens van Emil Artin te bewijzen vergeefs naar zocht. Na werk van Honda (1968) en Tate, zie I.27 en I.32, vinden we het geval van CM-liftingen voor alle abelse variëteiten, gedefinieerd over een eindig lichaam, beschreven in Chai, Conrad en Oort (2014). Deze structuur beschreven door Serre en Tate is in de periode 1964–2014 begrepen en gegeneraliseerd.

Graag laat ik zien hoe de vriendelijke humor van John Tate werkte. In de zomer van 1967 gaf David Mumford een serie voordrachten op een AMS Summer School. In de eerste voordracht vertelde Mumford wat de voorkennis was die hij bekend veronderstelde, een lange en indrukwekkende lijst. We werden er stil van. Tot er plotseling iemand opstond, zijn stoeltje luidruchtig omhoog klappend, en met ferme tred naar de deur liep. Het was Tate, die aangaf dat niet allemaal te weten. Anderen dachten er waarschijnlijk net zo over, maar durfden het niet te zeggen. Mumford zei dat hij die dingen dan maar ging uitleggen, en Tate ging weer zitten.

Tate-ℓ-modulen. Klassiek beschrijven we een abelse variëteit A over $\mathbb{C}$ door middel van een analytische parametrizatie $A(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$. Hoe gaan we hiermee om als we over een ander lichaam werken, bijvoorbeeld een eindige uitbreiding van $\mathbb{Q}$, of een eindig lichaam? Wat is de rol van het rooster $\mathbb{Z}^g \cong \Lambda \subset \mathbb{C}^g$? Merk op dat $\Lambda \cong \pi_1^{\mathrm{top}}(A(\mathbb{C}))$. Hoe kunnen we hiervoor een arithmetische pendant vinden, die ons in staat stelt op een algebraïsche manier hiermee te werken? Een groot deel van het werk van Tate hierover bestaat uit het ontwikkelen van een dergelijke methode. We zullen twee aspecten daarvan bespreken.

De essentie van het eerste idee van Tate: neem een grondlichaam K, een priemgetal ℓ, niet gelijk aan de karakteristiek van K, en beschouw het analogon van '$\Lambda \otimes \mathbb{Z}_\ell$'. We doen dit in een algebraïsche context door voor elke i de torsiegroep $A[\ell^i] = \mathrm{Ker}(\times \ell^i : A \to A)$ te nemen en deze aaneen te voegen, door de inverse limiet $T_\ell(A)$ te nemen over alle $\times \ell : A[\ell^{i+1}] \to A[\ell^i]$. We zien dat voor een algebraïsche afsluiting $k \supset K$ de groep $T_\ell(A)(k) \cong \mathbb{Z}_\ell^{2g}$ een natuurlijke werking van de Galois-groep $G_K = \mathrm{Aut}(k/K)$ heeft: dit geeft de constructie van het 'Tate-ℓ-moduul' van A.

Inderdaad is $\times \ell^i : A \to A$ een onvertakte overdekking en voor $K \supset \mathbb{Q}$ en $T_\ell(A)(\mathbb{C}) \cong \pi_1^{\mathrm{top}}(A(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Magisch idee: *vergeet de inbedding* $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ (zeker als we in karakteristiek p werken), *maar neem daarvoor in de plaats de Galois-werking*

$$\rho : G_K \to \mathrm{Aut}(T_\ell(A)(k)) \cong \mathrm{GL}((\mathbb{Z}_\ell)^{2g}).$$

In I.27, 'Endomorphism algebras over finite fields', zien we wat een baanbrekend idee dit is: *voor een abelse variëteit* A *over een eindig lichaam* K *geldt*:

$$\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{G_K}(T_\ell(A));$$

een wonderlijk resultaat: *het algebraïsche object, de representatie* ρ, *bepaalt een collectie meetkundige homomorfismen.*

Dit was een grote doorbraak. Al eerder werden zulke Galois-werkingen bestudeerd. Het werk van Grothendieck over de etale fundamentaalgroep ontstond ook in die periode, en we kunnen deze definitie van Tate van $T_\ell(A)$ daar als een speciaal geval van zien. We zien dat de definitie van $T_\ell(A) = (T_\ell(A)(k), \rho)$ aansluit bij werk van anderen. Maar het idee dat het voldoende zou zijn om A, gedefinieerd over een lichaam van eindig type over het priemlichaam, te karakteriseren (op isogenie na) was verbluffend nieuw, een generalisatie van een resultaat van Deuring uit 1941 voor elliptische krommen.

Tate vroeg zich af of het analogon van deze stellingen ook bewezen konden worden over een getallenlichaam. Zarhin (1973) liet zien dat een analoge stelling waar is over elk functielichaam in karakteristiek p.

In een revolutionair artikel 'Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern' liet Faltings in 1983 zien dat dit vermoeden van Tate juist is, en in hetzelfde artikel zien we met die methode bewijzen van vermoedens van Mordell uit 1922 en van Shafarevich, ICM 1962. In die periode 1964 (Tate) – 1983 (Faltings) heeft de arithmetische meetkunde een spectaculaire ontwikkeling doorgemaakt.

Voor meer uitleg zie 'Abelprijs 2010 voor John Tate', NAW 5/12 (2011), pp. 44–48.

Het Tate-vermoeden. In 1963 generaliseerde Tate zijn werk tot een vermoeden over de Galois-werking op etale cohomologiegroepen, I.21: "The ℓ-adic étale cohomology of algebraic varieties is much richer than the classical cohomology, in that the Galois groups operate on it ... the soil is fertile for conjectures. The main idea is, roughly speaking, that a cohomology class which is fixed under the Galois group should be algebraic when the ground field is finitely generated over the prime field." Dit vermoeden, nog steeds een bron voor inspiratie, is juist in speciale gevallen, maar in het algemeen nog open; zie bijvoorbeeld Totaro, *Bulletin of the AMS*, 2017. Zie ook II.65 uit de conferentie over Motives (1991).

Dit vermoeden van Tate kan gezien worden als een arithmetisch analogon van het Hodge-vermoeden. Het Tate-vermoeden zou een bewijs geven van een groot deel van de 'Standard Conjectures' over algebraïsche cykels van Grothendieck (1969). Het zou impliceren dat het Swinnerton-Dyer-vermoeden waar is voor een kromme over een functielichaam in positieve karakteristiek, Ulmer (2014).

Barsotti–Tate-groepen. Het idee hierboven werkt voor elk priemgetal ℓ ongelijk aan de karakteristiek van het grondlichaam, en we 'weten' dat het (vaak) 'niet zoveel uitmaakt' welke keuze we maken voor ℓ. *Kunnen we ook een* p*-adisch object maken in karakteristiek* p? Voor de hand liggend is om weer de kernen van $\times p^i : A \to A$ voor alle $i \geq 0$ te nemen. Echter, alleen de groep van meetkundige punten is onvoldoende; bijvoorbeeld voor een supersinguliere elliptisch kromme E is $E[p^i](k) = 0$ voor alle i. Het schema $A[p^i]$ heeft meer structuur: het is een eindig groepenschema. De limiet $A[p^\infty] = \bigcup_i A[p^i]$ is de logische stap, die Tate dan ook zet in I.30: 'p-divisible groups', Driebergen, 1966.

Een detail: voor $T_\ell(A)$ nemen we de inverse limiet, voor $A[p^\infty]$ de directe limiet, dat blijkt handiger, maar we zouden het net zo goed andersom kunnen doen.

Merk op dat $A[p^\infty]$ voor elk priemgetal p genomen kan worden. Voor p ongelijk aan de karakteristiek van K krijgen we $T_\ell(A)$ met $\ell = p$, op dualiteit na. Deze objecten $A[p^\infty]$ hebben de mooie eigenschap dat ze over elk basisschema werken; bijvoorbeeld in gemengde karakteristiek heeft $A[p^\infty]$ de goede eigenschappen, terwijl $T_\ell(A)$ de restrictie met zich meebrengt dat ℓ inverteerbaar is op de basis, en dus ongelijk aan de residue karakteristieken.

Voor een abelse variëteit A wordt $X = A[p^\infty]$ ook wel de Barsotti–Tate-groep genoemd. Tate zelf spreekt van een p-deelbare groep; dat is een mooie korte naam, maar het is in het algemeen niet een groep; het zou juist zijn om het omslachtige 'p-deelbare ind-groepenschema' te gebruiken, maar met een kleine waarschuwing doen we dat niet. Merk op dat $\times p : X \to X$ 'surjectief' is, vandaar de naam p-deelbare groep. Tate bewees ook over een eindig lichaam het analogon van de karakterisering van $\mathrm{End}(A)$, maar nu met

$-\otimes\mathbb{Z}_p$, met behulp van $A[p^\infty]$, gepubliceerd door Milne en Waterhouse (1971).

Als hulpmiddelen zijn Tate-ℓ-groepen en p-deelbare groepen niet meer weg te denken uit onze meetkundige en arithmetische gereedschapskist.

De Mumford–Tate-groep. Mumford beschreef in 1966 een groep $G = \mathrm{MT}(F)$ gegeven door een Hodge-structuur F. Het Mumford–Tate-vermoeden zegt dat G de Lie-algebra van de Galois-actie bepaalt. Dit generaliseert het geval van de Galois-representatie op het Tate-ℓ-moduul van een abelse variëteit. Het hangt samen met de 'motivische Galois-groep' en met het Sato–Tate-vermoeden, onafhankelijk door Sato en door Tate geformuleerd rond 1960; zie I.21. We vinden in Moonen, 'An introduction to Mumford-Tate groups' (2004) een mooie inleiding.

Hodge–Tate-theorie. Naar aanleiding van p-deelbare groepen zoals Tate die in Driebergen introduceerde, en resultaten daarover, formuleerde Serre 'Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles' (ook in de conferentie van Driebergen, 1966, pp. 118–131) het begrip Hodge–Tate-structuren; Serre introduceerde de naam (p-adische) Mumford–Tate-groep. Voor verder ontwikkelingen zie bijvoorbeeld Faltings (1987), en voor samenhang met perfectoïde ruimtes, zie bijvoorbeeld Bhargav Bhatt (2017).

In mijn kast met hangmappen vind ik onder Tate heel wat vergeelde manuscripten, zoals 'Courbes elliptiques: formulaire', d'après J. Tate, mis aut goût du jour par P. Deligne (ongedateerd). Dat materiaal vinden we nu ook allemaal in deze twee indrukwekkende delen.

In zijn inleiding schrijft Tate: "I feel fortunate to have been inclined towards mathematics, a field in which cooperation is so much more common than competition, and in which I could earn a living by doing what I liked most." Hier beschrijft Tate het gevoel dat velen van ons met hem kunnen delen.

Tate heeft fundamenteel nieuwe ideeën gelanceerd. Daarmee prachtige resultaten bewezen. Maar ook genereus anderen daarmee laten werken. Zijn intuïtie en creativiteit lijken niet rechtlijnig, maar misschien juist wel daarom zo rijk en divers. Eerste aanzetten maken de indruk ongericht te zijn, maar de uiteindelijke publicaties zijn precies en correct. De samenwerking met Serre blijkt van grote waarde voor Tates publicaties, in allerlei opzicht. We hebben veel geleerd van deze vriendelijke man.

Terugkijkend op dit werk, als we al die brieven lezen, als we zien hoe verschillend Serre en Tate tot een resultaat lijken te komen (en dat van elkaar maar al te goed begrijpen en bewonderen), maar ook weer zo verschillend van de manier van werken van Grothendieck, kunnen we ons afvragen hoe het denkproces van een wiskundige kan verlopen. Dit materiaal laat ons dat, in het geval van Tate, op een verrassende manier zien.

Wat een rijkdom. We vinden nu bij elkaar het scheppingsproces (te volgen in brieven in [ST] en aanvullend hier in Part I) en de uiteindelijke versies (in dit verzameld werk). We zien hoe een prachtig idee ontstaat uit voorbeelden, berekeningen, en dan die sprong die verklaart, of probeert te verklaren hoe deze wiskunde in elkaar zit. Met de laudatio bij de Abelprijs, hierboven aangehaald, kunnen we het helemaal eens zijn, zeker na het lezen van dit indrukwekkende oeuvre. Wat een voorrecht om deze ontwikkeling mee te mogen maken.

Frans Oort

Naschrift: John Tate overleed op 16 oktober 2019.

Klaas Landsman

Naar alle onwaarschijnlijkheid

Toeval in de wetenschap en filosofie

Uitgeverij Prometheus, 2018
288 p., prijs €25,99
ISBN 9789044636321

Klaas Landsman is hoogleraar mathematische fysica aan de Radboud Universiteit. Zijn laatste boek, *Naar alle onwaarschijnlijkheid*, is een losjes geschreven verzameling verhalen over de rol van toeval in (hoofdzakelijk) de wetenschap. Het boek is qua opzet erg informeel: het leest als een spontane monoloog, waarin hij zijn kennis van een boel verschillende onderwerpen met grapjes, illustraties, en korte anekdotes tentoonspreidt. Wie daarin meegaat, heeft het boek snel uit. (De zinnen zijn wel lang, en het taalgebruik is wat oubollig, maar dat went.)

De onderwerpen zijn toeval in de wetenschap (de eerste 189 pagina's) en toeval in filosofie en religie (de laatste 37 pagina's). De belangrijkste onderwerpen die aan bod komen zijn: *Coïncidentie*: hoe moeten we toeval in het dagelijks leven begrijpen (drie keer de loterij winnen). *Finetuning*: de vraag of het toeval is dat natuurkundige formules zijn wat ze zijn, omdat als de parameters zelfs een klein beetje anders waren, ze geen beschrijving van een 'mogelijke' werkelijkheid meer kunnen geven. *Quantummechanica*: het gegeven dat deze uiterst effectieve natuurkundige theorie (ogenschijnlijk) inherent van toevalligheden afhangt. *Evolutiebiologie*: toevalligheid bij genetische mutaties. *Vrije wil en determinisme*: kunnen vrije wil en de mogelijkheid dat toeval bestaat samengaan? *Toeval in religie*: in het bijzonder over de discussie of Jezus van Nazareth per toeval een van de meest invloedrijke figuren in de westerse geschiedenis is geworden, of dat het voorbestemd was.

Het boek bevat veel informatie en geeft veel stof tot nadenken. Wie goed oplet kan een aardig overzicht krijgen van een aantal belangrijke wetenschappelijke theorieën waarin toeval een rol speelt. Het zijn allemaal onderwerpen waar al veel over geschreven is, maar Landsman geeft genoeg eigen inzichten om het interessant te houden. Soms gaat hij (naar mijn smaak) wel te ver daarin, en gaat hij te veel in de breedte. Het begin van hoofdstuk 2 bijvoorbeeld, waar de geschiedenis van de Big Bang-theorie uitgebreid verteld wordt. Die is zeker wel interessant, maar aan het finetuning-vraagstuk niet bepaald sterk gerelateerd.

Over de wiskundige kanten van toeval — kanstheorie en statistiek in het bijzonder — wordt helaas vrij weinig gezegd. Als kansrekenaar heb ik zelf het idee dat veel van de discussies en mogelijke paradoxen in het boek ook vaak uit te leggen zijn door te kijken naar de gekozen kansruimte (op pagina 95 komt dit wel kort aan bod). Ik denk dat het verhelderend had gewerkt als dit perspectief meer belicht werd. Over de filosofische interpretaties van de wiskundige kanstheorie wordt ook weinig gezegd.

Als laatste nog een milde waarschuwing: dit boek is niet ideaal voor mensen die van precisie houden. Vrij veel van de beweringen zijn feitelijk niet helemaal juist of wel erg kort door de bocht. Twee willekeurige voorbeelden:

(A) Op pagina 18 schrijft Landsman over de bekende zaak van Lucia de B., dat volgens een statisticus de kans op onschuld

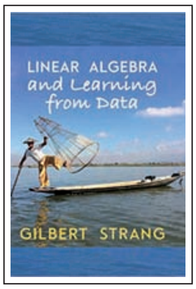
1 op 243 miljoen was. Ik kon daar niets van terugvinden (de referenties in de voetnoten waren onvoldoende precies). Wel kon ik vinden dat een rechtspsycholoog die kans op 1 in 342 miljoen geschat had.

(B) Op pagina 69 schrijft hij over het standaardmodel van de deeltjesfysica dat het, op zwaartekracht na, alle natuurkundige verschijnselen verklaart. Het standaardmodel verklaart verbazingwekkend veel, maar, zoals elke natuurkundige kan beamen, nog veel meer niet. Zelfs binnen de deeltjesfysica niet, denk aan donkere materie of neutrino-oscillaties.

Mijn vermoeden is dat Landsman verwacht dat de lezer wat hij schrijft allemaal wel met een korreltje zout zal nemen, maar ik kan me goed voorstellen dat hij met dit gebrek aan precisie sommige lezers (en collega's) niet gelukkig maakt.

Samenvattend: dit boek is leuk voor wie graag losjes over wetenschap en filosofie nadenkt, en heeft dan veel te bieden. Ik vond het leuk om te lezen. Maar misschien is het niet voor iedereen.

Tim Hulshof



Gilbert Strang

Linear Algebra and Learning from Data

Cambridge University Press, 2019
446 p., prijs £58.99
ISBN 9780692196380

Gil Strang heeft een uitstekende reputatie als docent en als schrijver van verschillende boeken, met name op het gebied van de lineaire algebra. Zijn nieuwste boek *Linear Algebra and Learning from Data* gaat over verschillende aspecten van *data science*. Anders dan de titel mogelijk suggereert behandelt dit boek de volgende onderwerpen in ongeveer gelijke mate: lineaire algebra, (continue) optimalisering, kansrekening en statistiek. De schrijver is duidelijk gecharmeerd van neurale netwerken, en belicht deze van verschillende kanten.

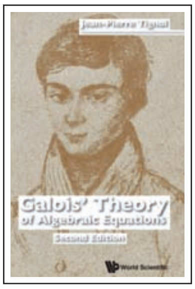
Allerlei technieken worden overzichtelijk (en soms beknopt) gepresenteerd: matrixdecomposities, compressed sensing, matrix completion, stochastic gradient descent en variaties, Markovketens, clustering, random methoden, neurale netwerken en machine learning. Na elke sectie volgt een behoorlijk uitgebreide verzameling opgaven.

Het boek is met 430 pagina's al redelijk omvangrijk, en mijns inziens maakt Strang duidelijke en in het algemeen goede keuzes qua onderwerpen. Toch is de afwezigheid van sommige zaken opvallend, zoals lineaire (en eventueel niet-lineaire) dimensiereductiemethoden. Daarnaast komen andere thema's wel zeer beperkt aan bod, zoals Linear Discriminant Analysis en de bijbehorende wiskunde.

Niettemin kan ik *Linear Algebra and Learning from Data* beslist aanbevelen. Het boek brengt diverse zeer actuele wiskundegebieden op inzichtelijke manier samen. De schrijfstijl is aantrekkelijk, informeel en toegankelijk voor lezers van verschillende niveaus. Referenties naar recente literatuur nodigen uit tot nadere studie. Het boek is mogelijk bruikbaar voor een vak in de bachelor. Bij mijn weten is er momenteel geen soortgelijk boek op de markt.

Strang verwoordt ten slotte ook nog een uitgesproken didactische mening: "I have certainly learned that projects are far better than exams. Students ask their own questions and write their own programs. From now on, **projects**!"

Michiel Hochstenbach



Jean-Pierre Tignol

Galois' Theory of Algebraic Equations (2nd ed.)

World Scientific, 2016
324 p., prijs £65.00
ISBN 9789814704694

Zoals bekend gaat de Galoistheorie over de voorwaarden waaronder er radicale oplossingen bestaan voor de nulpunten van polynomen in één onbekende. Voor de polynomen van lagere graad zijn er ook expliciete formules voor radicale oplossingen gevonden. Het boek van Tignol gaat over deze thematiek; hij kiest een historische route en grijpt daarbij terug op primaire bronnen; dat is mede wat dit boek bijzonder maakt.

Het boek bestaat uit veertien hoofdstukken en twee appendices. Per hoofdstuk zijn er opgaven en oplossingen. Het valt op dat hoofdstuk 9 in het midden van het boek gaat over de hoofdstelling van de algebra met een bewijs van Girard. Het valt ook op dat de hoofdstelling van de Galoistheorie in een appendix is opgenomen. Hoofdstuk 14 over Galois maakt dan ook geen gebruik van deze stelling. In dit belangrijkste hoofdstuk volgt Tignol zorgvuldig de *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* van Galois. In de meeste boeken over Galoistheorie wordt de hoofdstelling van de algebra bewezen met de hoofdstelling van de Galoistheorie. Waarom staan die stellingen dan bij Tignol omgedraaid? Hij wil zich bezighouden met algebraïsche vergelijkingen van polynomen; dit komt ook naar voren in de titel van het boek. In drie hoofdstukken wordt ingegaan op polynomen en de hoofdstelling van de symmetrische polynomen wordt bewezen volgens de methode van Waring. Het is mogelijk om met deze laatstgenoemde stelling ook de hoofdstelling van de Galoistheorie te bewijzen, waarover later. Een drietal hoofdstukken is gewijd aan cyclotomische polynomen; de theorieën van de Moivre, Vandermonde en Gauss komen aan bod. In hoofdstuk 13 vindt men de stelling over de *natuurlijke irrationaliteiten* bewezen door Abel; Tignol verklaart ook waarom die stelling zo genoemd wordt. Het bewijs van Abel over de onoplosbaarheid in radicalen van de algemene vergelijking van graad hoger dan 4, vindt men in dit hoofdstuk. Uiteraard is er in het boek aandacht voor de oplossingen in radicalen van de nulpunten van polynomen van de tweede, derde en vierde graad: Cardano, Ferrari, Viète, Descartes en Tschirnhaus. Het werk *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* van Lagrange wordt in hoofdstuk 10 uitgebreid toegelicht; bronverwijzingen vind je overal terug bij Tignol.

In het hoofdstuk over Galois legt Tignol de Galoistheorie uit aan de hand van de *Mémoire sur les conditions de résolubilité des* *équations par radicaux* van Galois; Tignol voegt eigen bewijzen toe. De *Mémoire* is zoals bekend moeilijk toegankelijk. Ze is lastig te lezen omdat het begrippenkader vaak meerduidig is; u kunt daarover lezen in de introductie van het boek *The Mathematical Writings of Évariste Galois* van Peter M. Neumann. Het perspectief van waaruit Galois naar het probleem kijkt verschilt van het tegenwoordige perspectief via automorfismen, bij hem staan centraal de zogeheten *arrangementgroepen* en *substitutiegroepen*. Tignol besteedt aan deze begrippen veel aandacht en vergezelt ze van stellingen en opgaven; de lezer moet even wennen aan deze begrippen maar het helpt enorm bij het beter begrijpen van de *Mémoire* van Galois. Dit hoofdstuk over Galois is in de hier besproken tweede editie volledig nieuw en hierin verschilt het boek dan ook van de eerste druk.

Nu eerst het begrip *arrangementgroep* zoals behandeld door Tignol. Als R de verzameling is van de verschillende wortels van het polynoom van graad n dat onderzocht wordt op het bestaan van radicale wortels en $R=\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$, dan is een *arrangement* een n-tupel waarbij de elementen van R in een of andere volgorde gerangschikt zijn. $A(R)$ is de verzameling van alle arrangementen van R en $\mathrm{Sym}(R)$ is de groep van alle bijecties van R. Aan elk tweetal arrangementen α en β uit $A(R)$ is een unieke bijectie (Galois: substitution) uit $\mathrm{Sym}(R)$ toegevoegd die α in β overvoert, deze bijectie wordt genoteerd als $\binom{\alpha}{\beta}$. Galois noemt volgens Tignol een verzameling arrangementen G een *arrangementgroep* als er voor alle arrangementen $\alpha,\beta,\gamma\in G$ een arrangement $\delta\in G$ is zodanig dat $\binom{\alpha}{\beta}=\binom{\gamma}{\delta}$. Men kan het ook als volgt zien: als de substitutie $\binom{\alpha}{\beta}$ arrangement α overvoert in β dan behoort $\binom{\alpha}{\beta}(\gamma)$ ook tot G voor elke γ. Als we een arrangementgroep G hebben dan kunnen we daar een *substitutiegroep* $\Pi(G)\subset\mathrm{Sym}(R)$ aan toevoegen, waarbij het woord groep hier in de huidige betekenis gebruikt wordt: $\Pi(G)=\{\binom{\alpha}{\beta}|\,\alpha,\beta\in G\}$. Belangrijk in het verhaal van Tignol en Galois zijn de zogeheten *normale partities* van een arrangementgroep G: als $G=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_m$ een partitie is van G bestaande uit arrangementgroepen van G dan heet die partitie normaal als $\Pi(G_i)=\Pi(G_j)$ voor alle i en j, en als er voor $i=2,3,\ldots,n$ een $\sigma_i\in\Pi(G)$ bestaat zodanig dat $G_i=\sigma_i(G_1)$.

We illustreren aan de hand van het tekstfragment uit de *Mémoire* dat over het bestaan van radicale oplossingen van de algemene vierdegraadsvergelijking gaat, hoe deze begrippen bij Galois functioneren. Het hierna gekozen fragment staat in de *Mémoire* van Galois vlak voor proposition VI. De Engelse vertaling staat op pagina 125 en 127 in het bovenvermelde boek van Peter M. Neumann. Lees hierna voor *substitution* het woord *arrangement* dan is het duidelijker wat Galois bedoelt. Het komt er op neer dat Galois laat zien dat de bijbehorende arrangementgroep van 24 arrangementen *'oplosbaar'* is in een keten van vijf normale arrangementgroepen.

Scholium. It is easy to observe this process in the known solution of general equations of the 4^{th} degree. Indeed, these equations are solved by means of an equation of the 3^{th} degree, which itself requires the extraction of a square root. In the natural sequence of ideas, it is therefore with this square root that one must begin. Adjoining this square root to the equation of the 4^{th} degree, the group of the equation, which contains 24 substitutions in all, is decomposed into two which contain only 12 of them. Denoting the roots by a, b, c, d, here is one of these groups:

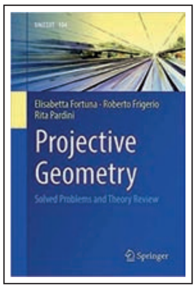
$$\begin{array}{lll} abcd, & acdb, & adbc, \\ badc, & cabd, & dacb, \\ cdab, & dbac, & bcad, \\ dcba, & bdca, & cbda. \end{array}$$

Now this group is itself partitioned into three groups, as indicated by Theorems II and III. Thus, by the extraction of a single radical of the 3^{rd} degree, there remains simply the group $abcd$, $badc$, $cdab$, $dcba$. This group in turn is partitioned into two groups: $abcd$, $badc$, and $cdab$, $dcba$. Thus after a simple extraction of a square root, there will remain $abcd$, $badc$, which finally is solved by a simple extraction of a square root. In this way one obtains either the solution of Descartes or that of Euler. For, although after the solution of the auxiliary equation of the 3^{rd} degree, the latter would extract three square roots, it is known that two suffice, because the third may be obtained from them rationally.

We zien hierboven dat de arrangementgroep van 24 arrangementen waarmee Galois start, opgesplitst wordt in een partitie van twee arrangementgroepen van omvang 12. Die worden elk opgesplitst in drie arrangementgroepen van omvang 4, enzovoort. Alle partities zijn normaal met bijbehorende substitutiegroepen S_4, A_4, V_4, Z_2 en $\{\mathrm{id}\}$.

In het voorwoord schrijft Tignol dat hij ervan overtuigd is dat het bestuderen van primaire teksten zijn vruchten afwerpt. Welnu, ik kan u verzekeren dat dit juist is; het bestuderen van de primaire teksten waar Tignol naar verwijst heeft mij in staat gesteld de hoofdstelling van de Galoistheorie te bewijzen zonder het lemma van Artin–Dedekind maar gebruikmakend van de hoofdstelling van de symmetrische polynomen. Het idee ontstond bij het bestuderen van bovenstaand voorbeeld uit de *Mémoire*. Als u meer wilt weten zie https://arxiv.org/abs/1905.00894.

Tot slot: het boek van Tignol draagt veel bij om de *Mémoire* toegankelijk te maken; dat komt vooral door de aandacht voor *arrangementgroepen* en *substitutiegroepen*. Het hoofdstuk over Galois is elementair maar zeker geen makkelijk gedeelte. Vanwege zijn uitgebreide toelichtingen op de primaire teksten van wiskundigen die zich over de problematiek van radicale oplossingen hebben gebogen, is het een zeer waardevol boek waaraan u veel plezier kunt beleven. *Read the Masters.* *Math Dicker*



Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio, Rita Pardini

Projective Geometry

Solved Problems and Theory Review

Unitext 104
Springer, 2016
xii + 266 p., prijs €24,25
ISBN 9783319428239

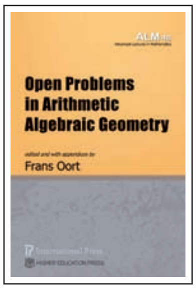
De titel van het boek zet je misschien een beetje op het verkeerde been, want het boek gaat niet over klassieke projectieve meetkunde met de stellingen van Pascal, Brianchon, enzovoort, zoals bijvoorbeeld in het boek *Projectieve meetkunde* van Heyting of in Coxeters *Projective geometry*, maar eerder over elementaire berekeningen van algebraïsch meetkundige aard in projectieve ruimten. De eerste zestig pagina's beschrijven in kort bestek onder andere projectieve ruimten, projectieve transformaties, coördinatensystemen, dualiteit, de dubbelverhouding, hyper(opper)vlakken, doorsnijdingen, kwadrieken en krommen. Dat gebeurt op een zorgvuldige, goed opgebouwde en prettig leesbare manier, maar zonder bewijzen. Voor bewijzen van resultaten wordt doorgaans naar de literatuur verwezen of naar de opgaven. Het boek is redelijk elementair en de algebraïsch-meetkundige machinerie blijft dan ook achterwege, zelfs de term variëteit valt niet. Werken met polynomen en coördinaten staat centraal. Na deze samenvatting van de theorie volgen hoofdstukken met in detail uitgewerkte opgaven (soms zijn zelfs meerdere uitwerkingen toegevoegd). Daarin komen dan trouwens wel weer klassieke resultaten zoals de stelling van Pascal aan bod. Die ruim tweehonderd opgaven vormen de kern van het boek en stellen de lezer in staat zich goed in te werken in de bij de diverse onderwerpen behorende technieken. Het niveau van de opgaven varieert van redelijk rechttoe-rechtaan tot duidelijk meer geavanceerd in de zin dat voornamelijk handige keuzes (bijvoorbeeld coördinaten) gemaakt dienen te worden om een berekening of bewijs tot een goed einde te kunnen brengen. Van de eerste soort is de vraag een vergelijking van een kwadriek te bepalen door vier punten in het (projectieve) vlak en bovendien rakend aan een gegeven lijn door een van de gegeven punten. Van de tweede soort is een opgave over de snijmultipliciteit te P van twee krommen die elkaar snijden te P en daar dezelfde raaklijn hebben (de snijmultipliciteit is in het boek ingevoerd via resultanten). De opgaven laten goed zien hoe ver je met de beperkte theorie kunt komen.

Het boek is vertaald uit het Italiaans, maar de Italiaanse sfeer is daarmee niet geheel verloren gegaan. Die proef je niet alleen in de focus op klassieke algebraïsch-meetkundige technieken, maar ook in het symbool van een geurend koffiekopje dat bij de, in de ogen van de auteurs, lastiger opgaven is geplaatst: "Take it easy, get yourself a cup of coffee or tea, arm yourself with patience and determination, and you will succeed in the end." De auteurs hebben bliksemschichten geplaatst bij opgaven die volgens hen zorgen voor een dieper begrip of die een verband verhelderen.

Het boek is nuttig als (inspiratie)bron van opgaven bij diverse soorten cursussen meetkunde met een algebraïsch tintje. Soms zou bij de opgaven nog een regel toegevoegd kunnen worden die de intuïtie of de strategie toelicht. Hetzelfde geldt voor de theoriebeschrijving: soms mis je een korte toelichting op gemaakte keuzes. Maar dat is detailkritiek. Zo'n boek dat je gedegen laat oefenen met de voornaamste technieken zou wat mij betreft ook welkom zijn bij meer geavanceerde onderwerpen uit de algebraïsche meetkunde.

Hans Sterk

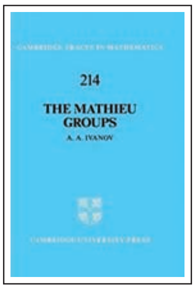
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Frans Oort (ed.)

Open Problems in Arithmetic Algebraic Geometry

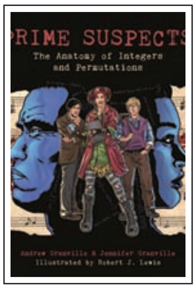
International Press of Boston, 2019
ISBN 9781571463739
intlpress.com/site/pub/pages/books/items/00000528/



A.A. Ivanov

The Mathieu Groups

Cambridge University Press, 2018
ISBN 9781108429788
cambridge.org/9781108429788

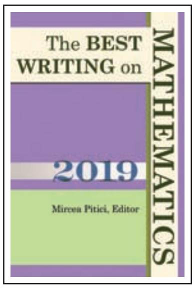


Andrew Granville and Jennifer Granville

Prime Suspects

The Anatomy of Integers and Permutations

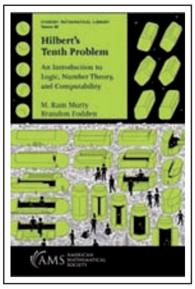
Princeton University Press, 2019
ISBN 9780691149158
press.princeton.edu/books/paperback/9780691149158/prime-suspects



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2019

Princeton University Press, 2019
ISBN 9780691198354
press.princeton.edu/books/paperback/9780691198354/the-best-writing-on-mathematics-2019

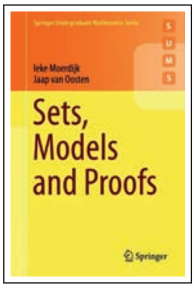


M. Ram Murty, Brandon Fodden

Hilbert's 10th Problem

An Introduction to Logic, Number Theory, and Computability

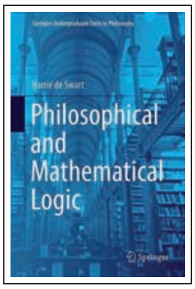
American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470443993
bookstore.ams.org/stml-88



Ieke Moerdijk, Jaap van Oosten

Sets, Models and Proofs

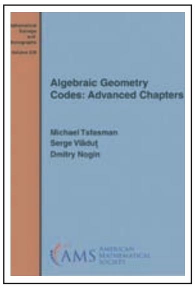
Springer, 2019
ISBN 9783319924137
springer.com/9783319924137



Harrie de Swart

Philosophical and Mathematical Logic

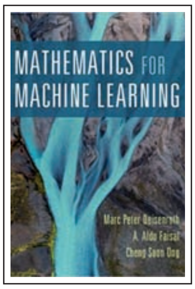
Springer, 2019
ISBN 9783030032531
springer.com/9783030032531



Michael Tsfasman, Serge Vladut, Dimitry Nogin

Algebraic Geometric Codes: Advanced Chapters

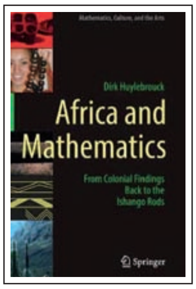
American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470448653
bookstore.ams.org/surv-238



Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, Cheeng Soon Ong

Mathematics for Machine Learning

Cambridge University Press, 2020
ISBN 9781108455145
cambridge.org/9781108455145

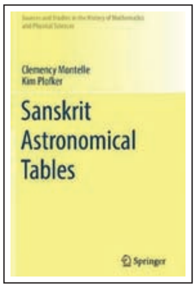


Dirk Huylebrouck

Africa and Mathematics

From Colonial Findings Back to the Ishango Rods

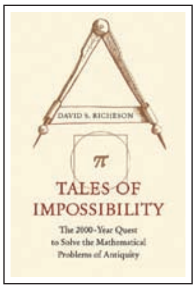
Springer, 2019
ISBN 9783030040369
springer.com/9783030040369



Clemency Montelle, Kim Plofker

Sanskrit Astronomical Tables

Springer, 2019
ISBN 9783319970363
springer.com/9783319970363

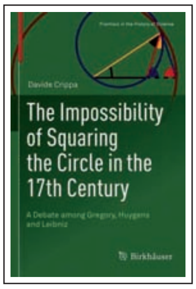


David S. Richeson

Tales of Impossibility

The 2000-Year Quest to Solve the Mathematical Problems of Antiquity

Princeton University Press, 2019
ISBN 9780691192963
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691192963/tales-of-impossibility



Davide Crippa

The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century

A Debate Among Gregory, Huygens and Leibniz

Birkhäuser, 2019
ISBN 9783030016371
springer.com/9783030016371

Jennifer Beineke, Jason Rosenhouse (eds.)

The Mathematics of Various Entertaining Subjects: Volume 3: The Magic of Mathematics

Princeton University Press, 2019
ISBN 9780691182575
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691182575/the-mathematics-of-various-entertaining-subjects