Arnout van de Rijt
Faculteit Sociale Wetenschappen
Universiteit Utrecht
a.vanderijt@uu.nl

Vincent Buskens
Faculteit Sociale Wetenschappen
Universiteit Utrecht
v.buskens@uu.nl

Wiskunde in de sociologie

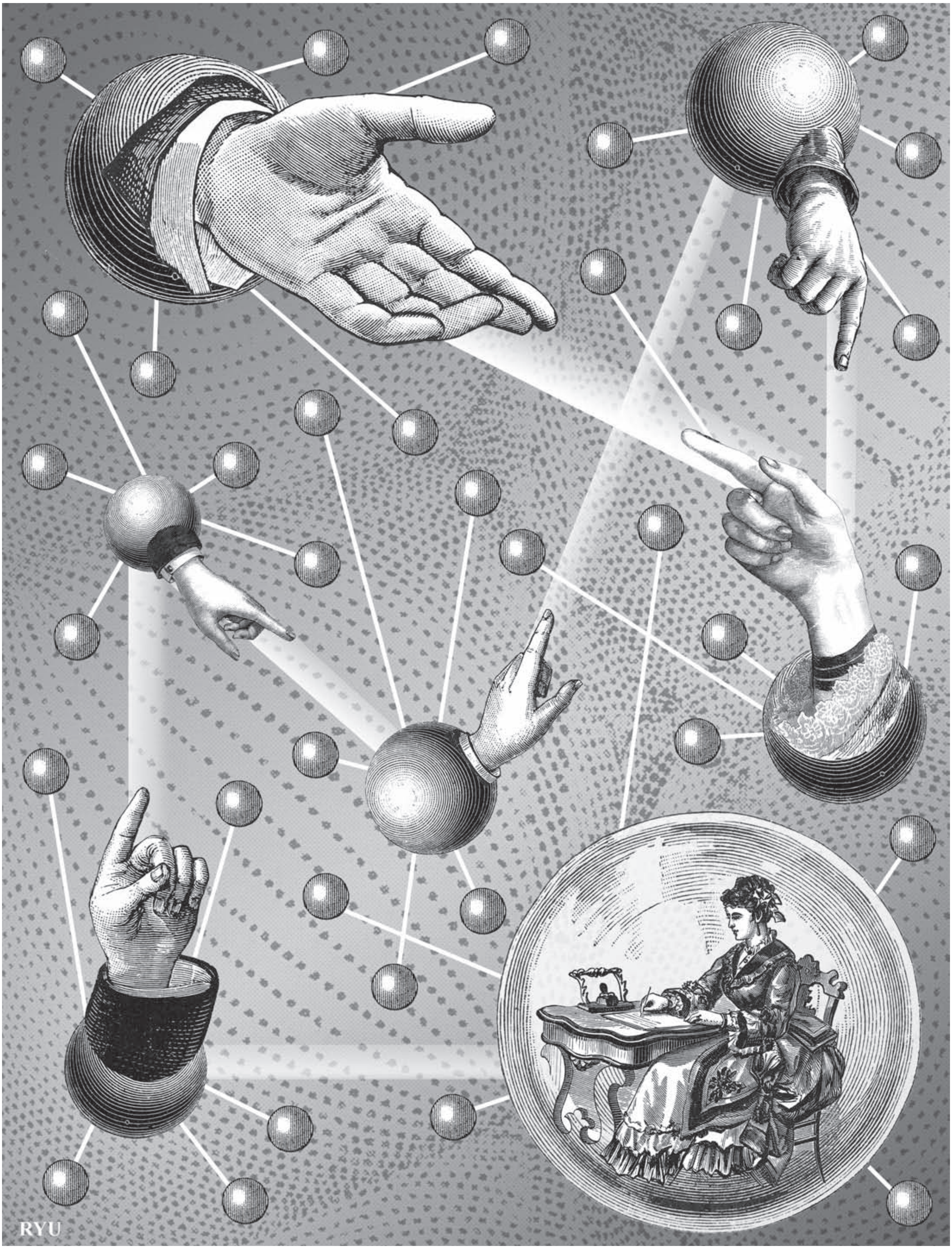
De wiskundige sociologie ontstond na de Tweede Wereldoorlog. Zij onderscheidt zich van de reguliere sociologie, waarin theorieën meestal niet geformaliseerd worden. Mathematisering van theorieën blijft een uitzonderingssituatie in de hedendaagse sociologie. Wiskundige sociologie is in Nederland relatief oververtegenwoordigd in vergelijking met het buitenland. In Nederland zijn de wiskundig sociologen vooral te vinden aan de Universiteit Utrecht, de Universiteit van Amsterdam, de Radboud Universiteit en de Rijksuniversiteit Groningen. Arnout van de Rijt en Vincent Buskens van de Universiteit Utrecht laten aan de hand van voorbeelden zien wat wiskundige sociologie inhoudt.

Er zijn leuke wiskundige resultaten mogelijk in de sociologie die verrassende inzichten geven. Voor de geïnteresseerde lezer citeren we een aantal inleidingen in de wiskundige sociologie [7, 12, 14, 15, 23, 32]. De grondleggers van de wiskundige sociologie waren erop uit om door middel van formele modellering van sociale processen het logische beargumenteren van gevolgen van assumpties over menselijk gedrag voor uitkomsten over de samenleving te verbeteren. Het blijkt namelijk dat bijvoorbeeld vanwege domino-effecten uitkomsten op het niveau van de samenleving vaak op niet-triviale manieren afhangen van wat individuen willen en doen. De uitkomsten van dit soort domino-effecten zijn vaak via informele argumentaties moeilijk te anticiperen. Zij kunnen echter inzichtelijk gemaakt worden door de formalisering van aannames en bijbehorende processen. In dit stuk bespreken we vier voorbeelden uit onze onderzoekspraktijk.

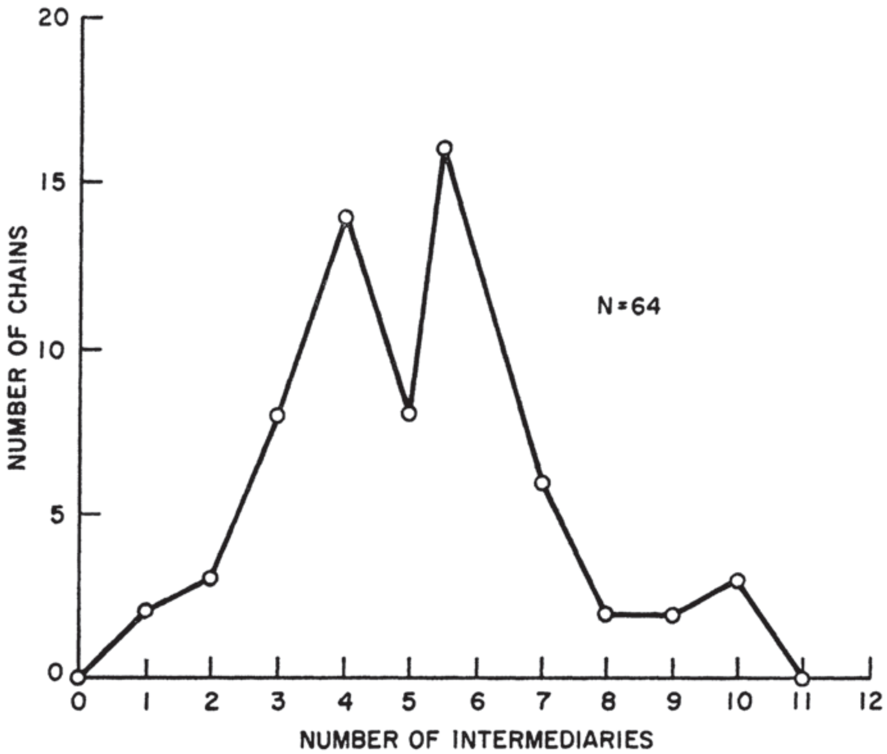
Small worlds

Eerst een puzzel. In 1967 rapporteerde Stanley Milgram de resultaten van een experiment [33]. Zo'n driehonderd inwoners van Kansas en Nebraska werd een envelop met bescheiden gegeven. De uiteindelijke bestemming, de 'Target Person', was iemand in Massachusetts. De inwoners werd gevraagd de envelop naar iemand te sturen die de betreffende persoon mogelijk zou kennen. Als ze zo'n persoon niet kenden, werd ze gevraagd de envelop te sturen naar iemand die zo iemand zou kennen, et cetera. Verrassend genoeg vond Milgram dat de brief gemiddeld in zes stapjes zijn bestemming bereikte. Dit komt overeen met vijf tussenpersonen, of 'intermediaries'. De originele grafiek van Milgram met de small-worlds-bevinding is weergegeven in Figuur 1.

Dit empirische resultaat is gemakkelijk te verklaren door je een wereld voor te stellen waarin iedereen vriendjes is met, zeg, vijftig willekeurig gekozen anderen. In dat geval kun je via de vrienden van je vrienden van je vrienden van je vrienden van je vrienden al in zes stappen 50^6



Illustratie: Ryu Tajiri



Figuur 1 Originele grafiek van Stanley Milgram over 'small worlds'.

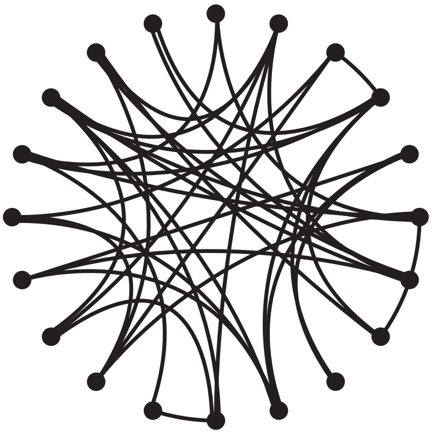
mensen bereiken, dus iedereen op aarde. Een miniatuurversie van zo'n wereld is afgebeeld in Figuur 2. Dit model is een 'random network' en is opgesteld door Erdős en Rényi. (In dit model is het Erdősgetal 3 van de tweede auteur niks speciaals!)

Maar in zo'n wereld leven we niet. We kennen vooral mensen die heel dichtbij wonen en die een soortgelijk inkomen, dezelfde hobby, en dezelfde cultuur hebben als wijzelf. Dat creëert kliekjes. De vrienden van mijn vrienden zijn veelal ook mijn vrienden. De wereld ziet er meer uit als de 'regular ring lattice' in Figuur 3. En daarin zit hem de puzzel [22]. In de ring lattice kun je alleen lokaal wandelen. Vertices kennen alleen hun buren en overburen. Je hebt veel meer stapjes nodig om elders uit te komen. Hoe kan de wereld er nou enerzijds grotendeels uitzien als een regular ring lattice (Figuur 3), en anderzijds toch de eigenschap delen met het random netwerk (Figuur 2) dat je slechts een paar vriendschappen van iedereen verwijderd bent?

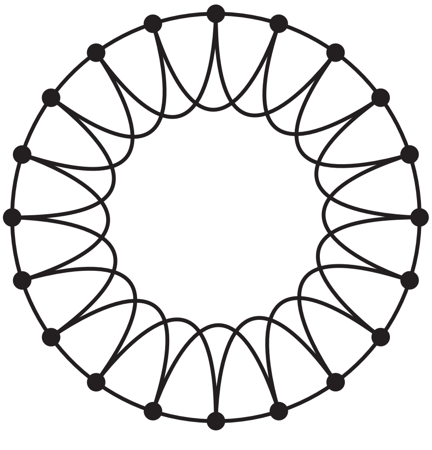
Deze sociologische puzzel werd wiskundig opgelost door Duncan Watts en Steve Strogatz. De oplossing staat in een beroemd artikel dat in 1998 gepubliceerd werd in *Nature* [35]. Watts en Strogatz namen de regular ring lattice als uitgangspunt maar voegden daar een beetje randomness aan toe. Dit deden ze door zijden uit de graaf te verwijderen en aan willekeurige andere punten weer vast te maken (zie Figuur 4). Daarmee creëerden ze een hybride netwerk dat 99% overeenkomt met een ring lattice en 1% met een random netwerk. Ze lieten vervolgens zien dat de gemiddelde kortste route tussen twee personen in dit netwerk bijna gelijk is aan die van een random netwerk: $\ln(n)/\ln(k)$. Hier is n het aantal personen en k het aantal vriendschappen per persoon. In onze wereld met $n \approx 7.000.000.000$ levert een gemiddeld aantal vriendschappen van $k = 50$ een kortste route van ongeveer zes stappen op. Precies die 'six degrees of separation' die Milgram 31 jaar eerder proefondervindelijk ontdekte.

Een vraag die onbeantwoord blijft is echter: Hoe wisten Milgrams proefpersonen nou in hemelsnaam naar wie ze de envelop moesten doorsturen? Ze hadden tenslotte geen wereldkaart van het mondiale sociale netwerk waarop je de kortste route zou kunnen opzoeken. Toch wisten ze heel korte routes te vinden. Kennelijk was het genoeg dat de proefpersonen slechts een paar dingen van de bestemmingspersoon afwisten zoals beroep, opleiding en etniciteit. Op basis daarvan stuurden ze het naar vrienden en kennissen die langs die paar dimensies het meest op de bestemmingspersoon leken. Maar is dit een plausibele verklaring?

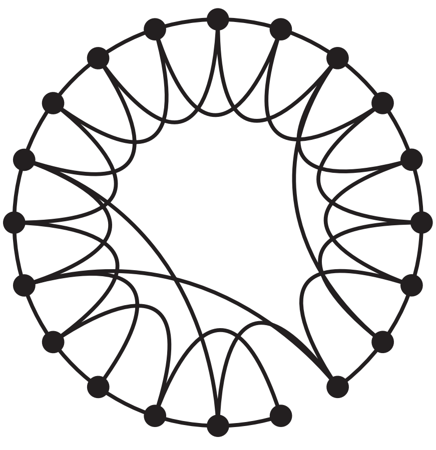
Om dit beter te begrijpen voerde de eerste auteur met Xiaomeng Ban en Jie Gao in een artikel in 2010 de volgende exercitie uit [4]. Zij namen vijf bestaande sociale netwerken en bedden elk in in een laagdimensionale ruimte, waarbij vrienden dicht bij elkaar werden geplaatst. In si-



Figuur 2

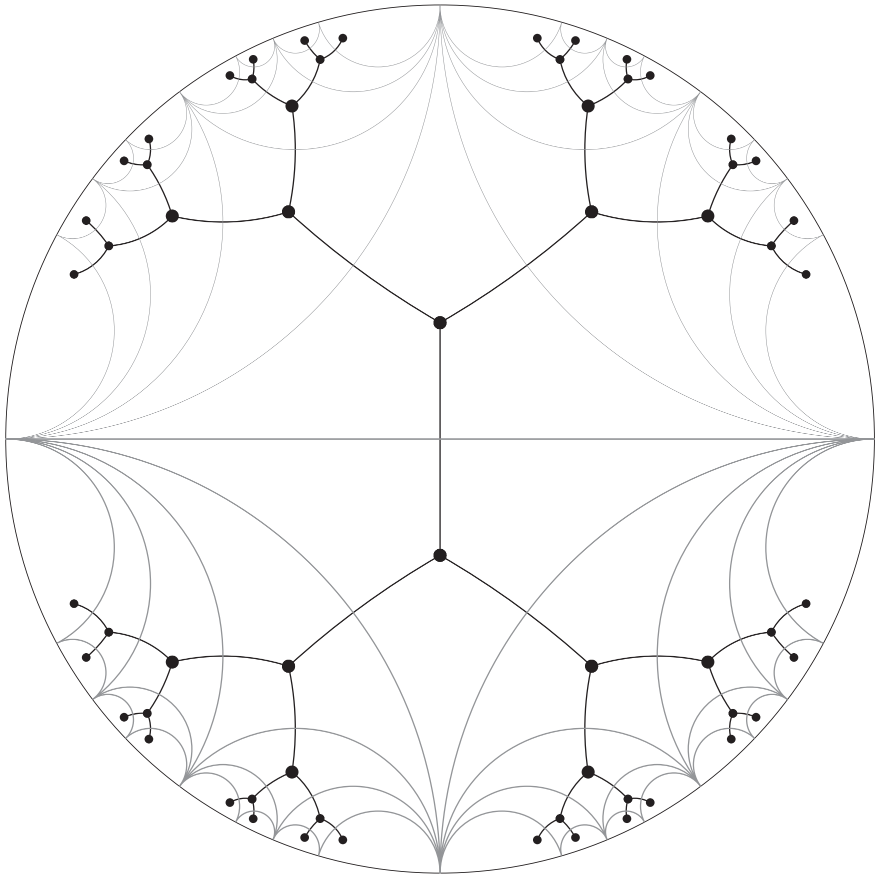


Figuur 3



Figuur 4

Illustraties: D.J. Watts en S.H. Strogatz [35]



Illustratie: R. Kleinberg [21]

Figuur 5

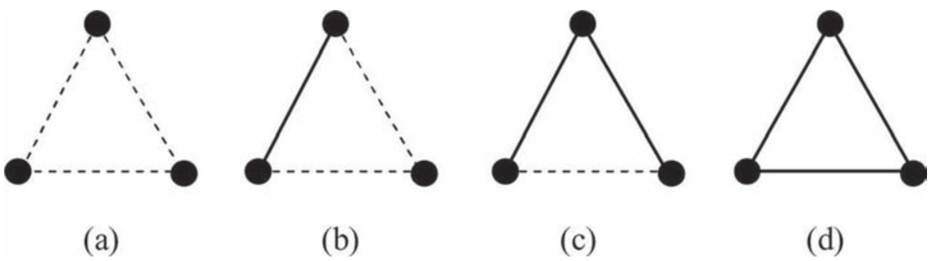
mulaties werd synthetische proefpersonen informatie en een simpele beslissingsregel gegeven. Zij kregen de coördinaten in die ruimte vervolgens toegewezen. Zij kregen ook de taak een envelop richting een andere proefpersoon te sturen waarvan coördinaten werden gegeven, net als in Milgrams small-world-experiment. Een 'greedy algorithm' werd toegepast waarbij bots de envelop doorstuurden naar een bevriende bot die op de kleinste afstand van de bestemming zat. Dit greedy algorithm bootst dus een proefpersoon van Milgram na die de envelop doorstuurt naar een kennis die het meest lijkt op de bestemming. Dit bleek inderdaad te werken! In alle vijf de netwerken waren de bots in staat hun bestemming in hooguit zes stappen te bereiken. Dit werkte het beste als de netwerken werden ingebed in het hyperbolische vlak (zie Figuur 5). Computerwetenschapper Robert Kleinberg [21] had eerder al bewezen dat 'greedy delivery' hierin nooit vastloopt. Onze resultaten laten zien dat levering in alle netwerken niet alleen gegarandeerd is, maar dat het ook in slechts een handjevol stappen kan. Zo kunnen we dus begrijpen dat Milgrams proefpersonen middels een simpele heuristiek korte paden zonder schatkaart met succes wisten te vinden.

Sociale balans

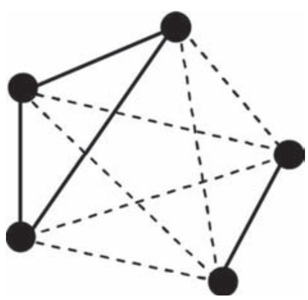
In de oploop naar zowel de Eerste als Tweede Wereldoorlog organiseerden landen zich in twee allianties [2]. In het verloop van de oorlogen wisselden sommige landen van loyaliteit, maar altijd waren ze óf "with us" óf "against us". Ook in de bilaterale relaties tussen landen in het Midden Oosten zien we zulke macro-patronen [24]. Gangs vormen vaak tweezijdige allianties bij het voeren van strijd over territorium in steden [25]. En in schoolklassen zien we ook vaak twee groepen die tegenover elkaar staan [28]. Hoe verklaren we de neiging van mensen, organisaties, en landen om zich zo dualistisch te gedragen, om twee vijandige clubjes te vormen?

In 1956 deden Dorwin Cartwright en Frank Harary een prachtige wiskundige ontdekking [11]. Ze herformuleerden eerst een gedragsprincipe van Frits Heider betreffende menselijke relaties in termen van netwerken met positieve en negatieve relaties: de vriend van een vriend is een vriend, de vijand van een vriend is een vijand, de vriend van een vijand is een vijand, en de vijand van een vijand is een vriend [20]. Er zijn vier soorten driehoeksrelaties, weergegeven in Figuur 6. Solide lijnen stellen positieve relaties voor, onderbroken lijnen negatieve. Twee van de vier driehoeksrelaties, (b) en (d), voldoen aan het balans-theoretische principe. De andere twee, (a) en (c), schenden het.

Cartwright en Harary lieten zien dat als alle driehoekjes in een netwerk van type (b) of (d) zijn, dan bestaat het netwerk noodzakelijkerwijs uit precies twee vijandige groepen wanneer er conflict is! Een voorbeeld is weergegeven in Figuur 7. Drie actoren zitten in de ene groep, de overige twee in de andere. Binnen groepen zijn er alleen positieve relaties, tussen groepen slechts negatieve. Dit resultaat laat dus zien dat in situaties waar individuen, organisaties of landen Heiders gedragsprincipe



Figuur 6



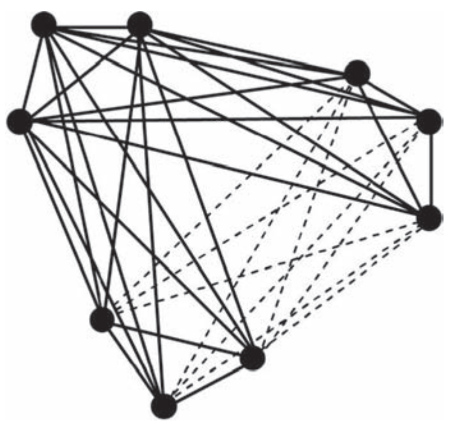
Figuur 7

Illustraties: A. van de Rijt [30]

strikt volgen, zij bij conflict noodzakelijkerwijs in een tweekampensituatie terechtkomen. Iets anders is onmogelijk zonder schending van het gedragsprincipe.

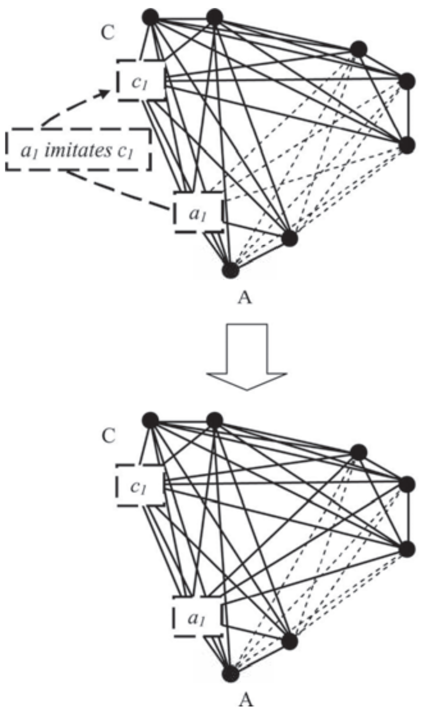
Het resultaat van Cartwright en Harary zegt echter niets over óf zo'n gebalanceerde graaf bereikt zal worden vanuit een situatie waarin niet elke driehoekje gebalanceerd is. Stel dat we in een situatie zitten waarin er één of meerdere ongebalanceerde driehoekjes in het netwerk aanwezig zijn. Is het dan altijd mogelijk voor een actor om het aantal ongebalanceerde driehoekjes waarvan zij deel uitmaakt te verminderen door een vriendschap in een ruzie om te zetten of vice versa, van een vijand een vriend te maken? Deze vraag stelden wiskundigen Tibor Antal, Pavel Krapivsky en Richard Redner in 2005 [2]. Zij ontdekten zodoende het bestaan van 'jammed configurations', waarmee het antwoord "nee!" werd gevonden. In het netwerk in Figuur 8 bijvoorbeeld, zitten tal van ongebalanceerde driewegsrelaties, maar elke verandering maakt de situatie alleen maar erger. Het betreft een dynamisch evenwicht. Het is dus mogelijk dat actoren vast komen te zitten in complexere vijand-vriendpatronen dan de simpele Axis-Allies-configuraties van Cartwright en Harary.

Hoe verklaren we dan de empirische tendens voor het vormen van tweekamppatronen? De eerste auteur onderzocht in 2011 wat er zou gebeuren met de dynamica van balanstheorie als individuen soms een fout maken door een vriend in een vijand te veranderen, of andersom, wanneer dit het aantal ongebalanceerde driehoekjes verder verhoogt [30]. Kan de dynamiek hiermee worden losgeschud uit een jammed state? Het geïmpliceerde spel heeft een potentiaal die alleen gemaximaliseerd wordt in een Cartwright–Harary-netwerk. Alleen evenwichten die een maximale potentiaal hebben zijn 'stochastisch stabiel'. Met stochastisch stabiel wordt bedoeld dat als de kans op fouten richting de limiet van nul gaat, de kans dat de dynamiek bij het evenwicht in de buurt is niet ook naar nul gaat [16]. Verder bekeek de eerste auteur ook het scenario waarin actoren meer dan één verandering tegelijk kunnen aanbrengen in hun relaties. Het bleek te bewijzen dat bij meerdere veranderingen tegelijk in de relaties van een persoon altijd een verlaging van het aantal gebalanceerde driehoekjes mogelijk is. Dit kan een actor altijd doen door de relaties van een andere actor te kopiëren. Dit is geïllustreerd in Figuur 9: a_1 imiteert c_1. Daarmee verlaagt a_1 het aantal ongebalanceerde driehoekjes. Hieruit volgt ook weer dat er dan uiteindelijk altijd een Cartwright–Harary-netwerk bereikt wordt.



Illustratie: A. van de Rijt [30]

Figuur 8



Illustratie: A. van de Rijt [30]

Figuur 9

Coöperatie in netwerken

Een andere puzzel. Veel mensen op deze wereld vertrouwen elkaar of werken met elkaar samen. Dit terwijl ze weten dat anderen goede redenen kunnen hebben om vertrouwen te misbruiken of te profiteren van de inspanningen van anderen. Speltheorie is een wiskundig instrumentarium voor sociale wetenschappers zoals sociologen en economen. Het helpt om gedrag in situaties waarin mensen van elkaar afhankelijk zijn beter te begrijpen. Het gevangenendilemma is een traditionele representatie van zo een probleem. Twee gevangenen kunnen kiezen tussen een ander aangeven of zwijgen. Hun gevangenisstraf hangt af van wat ze zelf doen en wat de ander doet. Het dilemma is zo geframed dat wat de ander ook doet, je altijd minder jaar de gevangenis in hoeft als je de ander aangeeft. Je bent het allerbeste af als de ander zwijgt en je zelf de ander aangeeft. Zie Tabel 1. Daarom voorspelt speltheorie ook dat beide gevangenen de ander zullen aangeven. Dit is het zogenaamde Nash-evenwicht van het spel [26]: een uitkomst waarbij beide spelers hun eigen uitkomst optimaliseren als we het gedrag van de ander als gegeven beschouwen. Het probleem is, dat beide gevangenen langer de gevangenis in gaan als ze beide de ander aangeven dan wanneer ze beide blijven zwijgen. De keuze zwijgen staat hier dus voor samenwerken met de ander om beide minder straf te krijgen. Maar hoe kan het dan dat we veel samenwerking om ons heen zien?

Speltheorie leert ons ook dat als dit spel niet eenmalig gespeeld wordt de analyse verandert. Stel dat twee spelers na elk spel met een vaste kans p het spel opnieuw spelen en met de complementaire kans de serie spellen eindigt. Deze kans p heeft meestal te maken met de situatie waarin coöperatie plaatsvindt. Vaak is het alleen van belang of een p groter of kleiner is als we twee situaties vergelijken. Bijvoorbeeld in een buurt met veel mobiliteit is de kans kleiner dat mensen heel vaak elkaar tegenkomen om elkaar te helpen dan in een buurt met weinig mobiliteit.

Laten we even een getallenvoorbeeld bekijken, bijvoorbeeld een Gevangendilemma waarbij wederzijdse samenwerking 3 oplevert, 1 als beide niet samenwerken. De combinatie van samenwerken en niet samenwerken levert 0 op voor degene die samenwerkt en 4 voor de ander. Stel dat dit spel zich nu met een kans $p = 0{,}5$ herhaalt en iemand gebruikt als strategie om samen te werken zolang de partner dat ook doet. Zodra de partner één keer niet samenwerkt, werkt hij nooit meer samen. Als deze persoon iemand met dezelfde strategie tegenkomt, is hun verwachte uitbetaling: $3 + 1{,}5 + 0{,}75 + \cdots = 6$. Merk op dat we hier ook aannemen dat de uitbetaling 0 is als het spel ophoudt. Dus de verwachte uitkomst van het tweede spel

Gevangenendilemma		Gevangene 2	
		Ander aangeven	Zwijgen
Gevangene 1	Ander aangeven	3 jaar, 3 jaar	0 jaar, 5 jaar
	Zwijgen	5 jaar, 0 jaar	1 jaar, 1 jaar

Tabel 1 Matrixweergave gevangenendilemma.

is $0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$. Als deze persoon iemand tegenkomst die nooit samenwerkt is zijn uitbetaling $0 + 0{,}5 + 0{,}25 + \cdots = 1$, en voor de ander $4 + 0{,}5 + 0{,}25 + \cdots = 5$. Twee personen die nooit samenwerken hebben een verwachte uitbetaling van $1 + 0{,}5 + 0{,}25 + \cdots = 2$. Als we de proefpersonen zouden verplichten uit deze twee strategieen te kiezen, kunnen we het spel weer in een matrix als in Tabel 2 weergeven met in de cellen de verwachte uitkomsten. Uit dit voorbeeld blijkt dat als beide kiezen om samen te werken totdat ze teleurgesteld worden doordat de ander dat niet doet, dit ook een Nash-evenwicht is, waarbij samenwerking dus tot stand komt. Merk op dat nooit samenwerken ook een evenwicht blijft.

Standaard resultaten laten zien dat als de kans om te stoppen maar klein genoeg is (voor de limiet voor p naar 0), er Nash-evenwichten bestaan waarin de spelers altijd samenwerken. Overigens zijn deze resultaten veel algemener. Er zijn namelijk Nash-evenwichten te construeren voor elke mogelijk gemiddelde uitkomst over de spellen zolang beide spelers maar ten minste de uitbetaling krijgen die ze krijgen in het Nash-evenwicht van het eenmalige spel. Deze uitkomst kan gezien worden als een soort dreigpunt. Het is ook vrij makkelijk een strategie te beschrijven om dit voor elkaar te krijgen. Stel twee spelers zijn het eens het spel te spelen zodat ze gemiddeld ieder meer krijgen dan ze in het dreigpunt krijgen. En stel dat als iemand afwijkt van de afspraak de andere speler daarna dan altijd de Nash-evenwichtstrategie van het eenmalige spel speelt. De speler die als eerste afwijkt, heeft daarna geen betere optie meer dan ook maar naar het dreigpunt toe te gaan. Als hij zich echter aan de afspraak had gehouden, had hij meer kunnen verdienen dan in het dreigpunt. De algemene theorie die dit beschrijft wordt ook wel *Folk Theorem* genoemd. Dit omdat niemand zich meer kan herinneren wie het eigenlijk als eerste bedacht had [18].

Vanuit de sociologie weten we dat er nog meer mechanismen zijn die samenwerking bevorderen naast het herhaaldelijk omgaan met dezelfde mensen. Het sociale netwerk kan ook een belangrijke rol spelen in het bevorderen van samenwerking of vertrouwen. Hierin kan reputatie-informatie worden doorgespeeld. We kunnen in de samenleving afspreken wat we doen als we ontdekken dat iemand niet samenwerkt of vertrouwen misbruikt. Zo kunnen we afspreken dat dan niet alleen de directe partner, maar ook alle mensen die ervan horen in hun interacties met de persoon die zich misdroeg, zich gaan gedragen volgens het bovengenoemde dreigpunt. In dat geval wordt de straf voor het niet-coöperatieve gedrag alleen maar zwaarder. Originele analyses van Raub en Weesie [29] laten zien dat hoe beter de informatieverpreiding is in het netwerk hoe meer samenwerking er in een groep mogelijk is. Buskens en Weesie [10] stellen een nog gedetailleerder model voor over vertrouwen en passen daarop basale Markov-theorie toe. Zo laten ze zien dat niet alleen iemand die meer contacten heeft, maar ook iemand die meer contacten heeft die weer meer contacten hebben, makkelijker anderen kan vertrouwen.

Hoewel de speltheoretische resultaten hele mooie algemene resultaten laten zien, zijn de voorspellingen ook niet altijd even robuust. Bijvoorbeeld is het feit dat nooit iemand een foutje maakt cruciaal om samenwerking in stand te houden. Alles valt uit elkaar zo gauw er wel een foutje wordt gemaakt. Nu zijn er allerhande analytische uitbreidingen die hier ook weer rekening mee kunnen houden. Daarbij worden de aannames over hoe individuen zich gedragen in dergelijke situaties echter niet per se plausibeler. We kunnen er nu eenmaal niet van uitgaan dat iedereen zich als een volleerd speltheoreticus gedraagt. Daarom wordt voor deze toepassingen ook vaak gekozen voor modellen waarin de aannames over hoe individuen zich gedragen eenvoudiger zijn. De studie van Axelrod [3] is klassiek in dit opzicht. Deze laat zien dat mensen die de strategie gebruiken van ‘oog om oog, tand om tand’ (“ik doe tegenover jou vandaag, wat jij gisteren ten opzichte van mij deed”) heel succesvol zijn in het spelen van herhaalde prisoner’s dilemma’s. Deze strategie leidt ook tot veel samenwerking als hij met andere coöperatieve strategieën wordt gecombineerd.

Het type simulatiestudies zoals die van Axelrod, hebben een brede literatuur geïnspireerd over hoe mensen op netwerken dit soort spellen spelen. Iedereen speelt dan het gegeven spel met zijn buren. Een veel gebruikte aanname is dat actoren hun gedrag aanpassen als ze in het eenmalige spel meer kunnen verdienen gegeven het gedrag van al hun buren in de vorige ronde. De tweede auteur heeft aan verschillende van dit soort studies bijgedragen [8,9]. Deze literatuur heeft wel al veel resultaten opgeleverd voor specifieke spellen op specifieke netwerken, maar meer algemene wiskundige resultaten zijn zeker nog welkom.

Wijsheid van de massa

Iedereen heeft op een fancy fair wel eens meegedaan aan het gokken hoeveel snoepjes of knikkers er in een bepaalde vaas zitten. Maar zijn we eigenlijk wel goed in het gokken van zo een aantal? Galton [19] liet al in het begin van vorige eeuw zien dat we zelfs als we er als individu niet zo goed in zijn, we er als grote groep mensen wel goed in kunnen zijn. Galton liet bijna 800 mensen het gewicht van een os inschatten. Er bestond grote variatie in inschattingen en veel mensen zaten er ver vanaf. Echter, de mediane inschatting, zoals Galton ‘vox populi’ definieerde, week minder dan 1% af van het echte gewicht

Herhaald gevangenendilemma		Speler 2	
		Nooit samenwerken	Samenwerken tot teleurstelling
Speler 1	Nooit samenwerken	2, 2	5, 1
	Samenwerken tot teleurstelling	1, 5	6, 6

Tabel 2 Matrixweergave Herhaald gevangenendilemma.

Degrees of the length of Array 0°—100°	Estimates in lbs.	Centiles: Observed deviates from 1207 lbs.	Centiles: Normal p.e =37	Excess of Observed over Normal
5	1074	−133	−90	+43
10	1109	− 98	−70	+28
15	1126	− 81	−57	+24
20	1148	− 59	−46	+13
q_1 25	1162	− 45	−37	+ 8
30	1174	− 33	−29	+ 4
35	1181	− 26	−21	+ 5
40	1188	− 19	− 14	+ 5
45	1197	− 10	− 7	+ 3
m 50	1207	0	0	0
55	1214	+ 7	+ 7	0
60	1219	+ 12	+14	− 2
65	1225	+ 18	+21	− 3
70	1230	+ 23	+29	− 6
q_3 75	1236	+ 29	+37	− 8
80	1243	+ 36	+46	−10
85	1254	+ 47	+57	−10
90	1267	+ 52	+70	−18
95	1293	+ 86	+90	− 4

q_1, q_3, the first and third quartiles, stand at 25° and 75° respectively.
m, the median or middlemost value, stands at 50°.
The dressed weight proved to be 1198 lbs.

Figuur 10 Originele tabel uit het artikel van Galton [19].

van de os (zie Figuur 10). Dit fenomeen is bekend geworden als de wijsheid van de massa. Maar gaat het nou echt altijd op? En zo niet, wanneer niet en wanneer wel?

Stel dat de inschattingen van mensen symmetrisch verdeeld zijn rond de correcte uitkomst en mensen dus geen systematische fout maken. Zij over- of onderschatten de ware uitkomst gemiddeld niet. Vanuit statistische theorie moge dan duidelijk zijn dat het gemiddelde of de mediaan van veel onafhankelijke inschattingen dichterbij de ware uitkomst ligt dan veel van de individuele inschattingen. Zo stelde Condorcet in de achttiende eeuw al dat de meerderheidsstem in een grote groep onafhankelijke stemmers bijna altijd correct is, zolang de gemiddelde persoon het vaker juist dan mis heeft [13]. Er zijn echter twee aspecten mogelijk problematisch bij inschattingen die mensen maken in echte situaties. Ten eerste zijn er veel situaties waarin mensen zich systematisch vergissen. En dan zal het gemiddelde van de massa niet dichtbij de echte waarde komen. Het kan niettemin nog steeds zo zijn dat het gemiddelde van de massa beter is dan de meeste individuele keuzes.

Het tweede probleem is afhankelijkheid. Als mensen een keuze maken, kijken ze vaak eerst om zich heen als ze niet meteen kunnen bepalen wat de beste keuze is. Ze laten zich dan bij hun keuze beïnvloeden door de keuzes van anderen. Nu hebben verschillende studies [5,16,26] proefpersonen in experimenten iets laten schatten. Voorbeelden zijn het aantal ballen in een vaas of de lengte van de grens van Zwitserland. In een tweede ronde krijgen de proefpersonen in deze studies elkaars aanvankelijke antwoorden te zien. Ze mogen dan nog eens gokken. De studies laten zien dat sociale beïnvloeding nuttig kan zijn om tot goede keuzes te komen. Via sociale beïnvloeding worden op basis van de wijsheid van de massa uit de eerste ronde de keuzes in de tweede ronde in de juiste richting bijgesteld. Zo wordt het proces van tot een goed antwoord komen versneld. Becker e.a. [5] vonden zelfs dat niet alleen de variantie omlaag gaat van ronde 1 naar ronde 2, maar dat ook het gemiddelde dichter bij de juiste waarde komt te liggen. Dit gebeurt omdat zij die het minst accuraat zijn zich in het experiment meer aanpassen aan de meerderheidsopinie dan zij die meteen al warm zijn. Maar in een recent model laat de eerste auteur van dit artikel zien dat er wel een addertje onder het gras zit [31].

Het probleem is dat de opzet in de genoemde experimenten zo is dat iedereen eerst een onafhankelijke schatting maakt. De collectie antwoorden wordt vervolgens gedeeld met iedereen. Hiermee wordt het beïnvloedingsproces een goede start gegeven. De eerste inschattingen vormen een ‘wijs anker’ op basis waarvan iedereen zijn oorspronkelijke oordeel kan herzien. Echter, als een beïnvloedingsproces juist begint vanaf een punt dat nogal vér van de waarheid verwijderd is, dan kunnen groepskeuzes ook voor langere tijd verder van de waarheid af blijven. In een recente studie vergeleek de eerste auteur twee processen om bij een goed-foutvraag tot het goede antwoord te komen. Een voorbeeld van een goed-foutvraag is welk van twee schilderijen geschilderd is door Vincent van Gogh (zie Figuur 11). In proces 1 laten we in verschillende groepen iedereen een onafhankelijk gokken en beschouwen het antwoord dat de meeste mensen in de groep hebben gekozen als het groepsoordeel. In proces 2 laten we de mensen in even grote groepen om de beurt kiezen en vertellen ze steeds hoeveel mensen tot dan toe al voor het ene of het andere schilderij hebben gekozen. Opnieuw beschouwen we het antwoord dat de meeste mensen in de groep geven als het groepsoordeel. In proces 2 is het aannemelijk dat mensen de informatie over de eerdere keuzes van anderen laten meewegen in hun keuze als ze onzeker zijn. Ze zijn dan meer geneigd zich te conformeren aan de eerdere keuzes. Meer mensen zullen dan het goede antwoord kiezen, en deze voorspelling wordt inderdaad bevestigd in het experiment van de eerste auteur. Dit lijkt dus te wijzen in de richting van een positief effect van sociale beïnvloeding op het goede antwoord. Wat blijkt echter, zowel in het model als in het experiment: De eindbeslissing van groepen in proces 2 is minder vaak correct dan in proces 1. Meer groepen komen onder sociale invloed op het verkeerde antwoord uit dan

Figuur 11 Welk schilderij is van Vincent van Gogh?

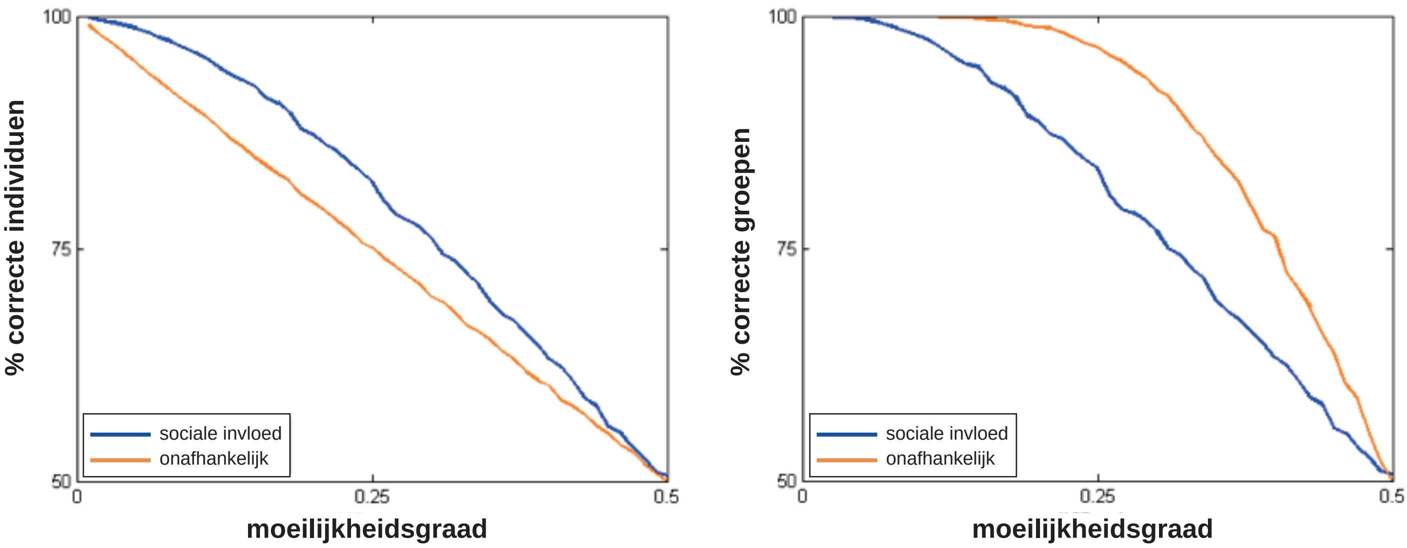
in het geval waarbij de groepsleden onafhankelijke keuze hebben gemaakt. Terwijl in het geval van onafhankelijkheid er in bijna alle groepen wel een meerderheid is die het goede antwoord kiest, worden er in het tweede geval twijfelaars door foute beginkeuzes naar de verkeerde kant getrokken waardoor meer groepen op het verkeerde antwoord komen. Er zijn dus wel individueel meer goede keuzes in het tweede geval, maar die zitten geconcentreerd in minder groepen. Dit modelresultaat is geïllustreerd in Figuur 12. In het model maken individuen $i=1,\dots,N$ om de beurt een binaire keuze $C_i \in \{-1,1\}$, waar 1 goed is en -1 verkeerd. $d \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ is de moeilijkheidsgraad van de vraag, en s_i de beïnvloedbaarheid van i. Aangenomen wordt dat de kans dat een individu i het juiste antwoord kiest een logistische functie is van de eerdere keuzes van $j<i$ met parameters d en s_i:

$$\mathrm{Prob}(C_i=1) = \left(1+\frac{d}{1-d}e^{-s_i\frac{\sum_{j<i}C_j}{i-1}}\right)^{-1}.$$

De twee panels laten respectievelijk het percentage correcte individuen (links) en het percentage correcte groepen (rechts) zien voor variabele moeilijkheidsgraden d. Aangenomen is dat groepen uit 12 individuen bestaan en dat s_i normaal verdeeld is met gemiddelde 3 en standaarddeviatie 1. Deze parameters komen goed overeen met schattingen uit logistische regressiemodellen van de data uit het laboratoriumexperiment. In het linker panel is te zien dat de mogelijkheid tot sociale beïnvloeding in proces 2 de individuele wijsheid verhoogt, ongeacht de moeilijkheidsgraad. In het rechter panel is daarentegen te zien dat voor alle moeilijkheidsgraden sociale beïnvloeding de wijsheid van groepen verlaagt. Schapen worden slimmer, kuddes worden dommer. Er is reeds levendige literatuur [1,6] in economics and decision theory die aan dit soort scenario's rekent, met nog veel openstaande problemen voor geïnteresseerde wiskundigen.

Afsluiting

Dit laatste voorbeeld is een mooi voorbeeld over hoe micro-uitkomsten en macro-uitkomsten uit elkaar kunnen lopen. Op individueel niveau willen we graag gebruikmaken van de informatie van anderen, maar voor de groep zou het beter zijn als iedereen onafhankelijk zou beslissen. Deze uitkomst was moeilijk te doorzien zonder een formeel model te ontwikkelen wat deze uitkomst genereert. Merk op dat we



Illustratie: A. van de Rijt en V. Frey [31]

Figuur 12 Modelresultaat voor individuen en groepen voor de vraag welk schilderij van Van Gogh is.

daarna wel makkelijker kunnen verwoorden waarom deze uitkomst toch intuïtief is.

Duncan Watts gaf de pakkende titel aan zijn interessante boek over 'common sense': *Everything is Obvious (Once You Know the Answer)* [34]. Dit om aan te geven dat in de sociale wetenschappen veel verbanden aannemelijk te maken zijn, als je eenmaal weet dat ze er zijn. Met behulp van wiskundige formaliseringen kunnen we echter bewijzen hoe verbanden ook binnen de sociale wetenschappen volgen uit aannames die we maken over individueel gedrag. En we kunnen bewijzen hoe condities in de samenlevingen dit gedrag kunnen beïnvloeden. Zo een formalisering bewijst niet dat het verband echt zo tot stand komt. Dat kan alleen door het verband ook empirisch aan te tonen. De formaliseringen helpen wel om logisch correcte afleidingen te maken over waarom een bepaald verband zou kunnen bestaan. En als het empirisch verband inderdaad is aangetoond, helpt het wiskundige model ook om intuïtieve herformuleringen van het mechanisme te geven, die logisch consistent zijn. Die zijn ook door niet-wiskundigen te appreciëren.

De beschreven voorbeelden zijn slechts een kleine steekproef van materiaal uit de mathematische sociologie. Nog veel groter echter is de hoeveelheid interessante sociologische ideeën en inzichten op allerlei toepassingsterreinen die nog niet gemathematiseerd zijn. De auteurs reiken geïnteresseerde wiskundigen de hand.

Referenties

1 S. Alpern en B. Chen, Who should cast the casting vote? Using sequential voting to amalgamate information, *Theory and Decision* 83(2) (2017), 259–282.

2 T. Antal, P. L. Krapivsky en S. Redner, Dynamics of social balance on networks, *Physical Review E* 72(3) (2005), 036121.

3 R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, 1984.

4 X. Ban, J. Gao en A. van de Rijt, Navigation in real-world complex networks through embedding in latent space, *ALENEX10*, SIAM, 2010, pp. 138–148.

5 J. Becker, D. Brackbill en D. Centola, Network dynamics of social influence in the wisdom of crowds, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 114(26) (2017), E5070–E5076.

6 S. Bikhchandani, D. Hirshleifer en I. Welch, A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades, *Journal of Political Economy* 100(5) (1992), 992–1026.

7 P. Bonacich en P. Lu, *Introduction to Mathematical Sociology*, Princeton University Press, 2012.

8 J. Broere, V. Buskens, J. Weesie en H. Stoof, Network effects on coordination in asymmetric games, *Scientific Reports* 7(1) (2017), 17016.

9 V. Buskens en C. Snijders, Effects of network characteristics on reaching the payoff-dominant equilibrium in coordination games: a simulation study, *Dynamic Games and Applications* 6(4) (2016), 477–494.

10 V. Buskens en J. Weesie, Cooperation via social networks, *Analyse & Kritik* 22 (2000), 44–74.

11 D. Cartwright en F. Harary, Structural balance: a generalization of Heider's theory, *Psychological review* 63(5) (1956), 277.

12 J.S. Coleman, *Introduction to Mathematical Sociology*, Free Press of Glencoe, 1964.

13 M.J.A.N. Condorcet, *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix*, Imprimerie Royale, Paris, 1785.

14 T. Fararo, *Mathematical Sociology*, Wiley, 1973.

15 T.J. Fararo, Reflections on mathematical sociology, in *Sociological Forum,* Vol. 12, No. 1, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, 1997. pp. 73–102.

16 D.P. Foster en H.P. Young, Stochastic evolutionary game dynamics, *Theoretical Population Biology* 38(2) (1990), 219–232.

17 N.E. Friedkin en F. Bullo, How truth wins in opinion dynamics along issue sequences, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 114(43) (2017), 11380–11385.

18 J.W. Friedman, A non-cooperative equilibrium for supergames, *Review of Economic Studies* 38 (1971), 1–12.

19 F. Galton, Vox populi (the wisdom of crowds), *Nature* 75 (1907), 450–451.

20 F. Heider, Attitudes and cognitive organization, *Psychol.* 21 (1946), 107–112.

21 R. Kleinberg, Geographic routing using hyperbolic space, *Proceedings of the IEEE INFOCOM 2007 – 26th IEEE International Conference on Computer Communications*, IEEE, 2007, pp. 1902–1909

22 J.S. Kleinfeld, The small world problem, *Society* 39(2) (2002), 61–66.

23 M. Korzec en A. Verbeek, Mathematische sociologie, *Mens en Maatschappij* 53(3) (1978), 323–336.

24 M. Moore, An international application of Heider's balance theory, *European Journal of Social Psychology* 8(3) (1978), 401–405.

25 K. Nakamura, G. Tita en D. Krackhardt, Violence in the 'balance': a structural analysis of how rivals, allies, and third-parties shape inter-gang violence, *Global Crime* (2019).

26 J. Nash, Non-cooperative games, *Annals of Mathematics* 54 (1951), 286–295.

27 J. Lorenz, H. Rauhut, F. Schweitzer en D. Helbing, How social influence can undermine the wisdom of crowd effect, *PNAS* 108(22) (2011), 9020–9025.

28 J.A. Rambaran, J.K. Dijkstra, A. Munniksma en A.H. Cillessen, The development of adolescents' friendships and antipathies: A longitudinal multivariate network test of balance theory, *Social Networks* 43 (2015), 162–176.

29 W. Raub en J. Weesie, Reputation and efficiency in social interactions: An example of network effects, *American Journal of Sociology* 96 (1990), 626–654.

30 A. van de Rijt, The micro-macro link for the theory of structural balance, *The Journal of Mathematical Sociology* 35(1-3) (2011), 94–113.

31 A. van de Rijt en V. Frey, Social influence undermines the wisdom of the crowd in sequential decision-making, Working paper (2019),

32 A.B. Sorensen, Mathematical models in sociology, *Annual Review of Sociology* 4(1) (1978), 345–371.

33 J. Travers en S. Milgram, An experimental study of the small world problem, *Sociometry* 32 (1969), 425–443.

34 D.J. Watts, *Everything Is Obvious: Once You Know the Answer*, Crown Business, 2011.

35 D.J. Watts en S.H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, *Nature* 393(6684) (1998), 440–443.