Rob Tijdeman
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
tijdeman@math.leidenuniv.nl

Reis naar het bewijs

Lineaire vormen en de vergelijking van Catalan

In onderstaand verhaal laat Rob Tijdeman zien hoe een succes het gevolg was van een lange reeks opeenvolgende gebeurtenissen waarbij hij het geluk had telkens met een probleem geconfronteerd te worden op een moment waarop hij voldoende kennis had om het op te lossen. Waarschijnlijk komt zo'n proces veel vaker voor.

Mijn wiskundestudie

In 1961 begon ik met een studie wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Het was in die tijd een zeer sterk bemand instituut met onder anderen Beth, De Groot, Hemelrijk, Heyting, Kuiper, Lauwerier, Oort, Popken en Van Wijngaarden. In mijn eerste studiejaar schoof ik aan bij een seminarium van Beth en Heyting over de Turingmachine waarvoor volgens de aankondiging geen voorkennis vereist was. Het bleek voor kandidaten (vierdejaars en ouder) bedoeld te zijn en na een paar weken moest ik afhaken. In mijn vierde studiejaar werd een dergelijk seminarium, waarbij de deelnemers om beurten een deel van de theorie behandelden, aangekondigd onder leiding van Popken en Jager. Ditmaal kon ik het helemaal volgen. Jager was in 1963/64 een half jaar bij Turán in Boedapest geweest en het seminarium betrof de theorie van Turáns hoofdstellingen en open problemen op dat gebied. Het lukte me een elementair probleem van Erdős en Turán over machtsommen op te lossen en dit resulteerde in een scriptie voor mijn doctoraalexamen en mijn eerste artikel [11]. Het daaropvolgende jaar werd ik assistent bij Jager wat in die tijd een 0,5 fte-functie was waarvoor je hand- en spandiensten moest verrichten. In 1967 deed ik doctoraalexamen en kreeg ik een aanstelling als wetenschappelijk medewerker met een kleine onderwijstaak en de opdracht promotieonderzoek te verrichten.

Mijn promotieonderzoek

Dit betrof nulpunten van exponentiaalpolynomen $f(z) := \sum_{k=1}^{l} P_k(z)e^{\omega_k z}$ waarbij $\omega_k \in \mathbb{C}$ en $P_k(z)$ een polynoom van graad $\rho_k - 1$ is voor $k = 1, 2, \ldots, l$ en z een complexe variabele. In 1960 had Turán bewezen dat het aantal nulpunten van $f(z)$ in een vierkant met zijdelengte L niet groter is dan

$$6L\Delta + n\log\left(2 + \frac{n}{\delta L}\right) + \log(2n)$$

waarbij $\Delta = \max_k |\omega_k|$, $\delta = \min_{k \neq j} |\omega_k - \omega_j|$, $n = \sum_{k=1}^{l} \rho_k$ en hij aannam dat de P_k's constanten zijn. Vier jaar later bewezen Dancs en Turán een dergelijk resultaat zonder laatstgenoemde beperking en Coates en Van der Poorten bewezen verwante resultaten. Door combinatie van Jensens ongelijkheid en Turáns eerste hoofdstelling lukte het me om resultaten te bewijzen die de bovengrens

$$3(n-1) + 3L\Delta$$

impliceren [12]. Het volgt uit een asymptotisch resultaat van Pólya uit 1920 dat dit resultaat op een constante factor na best mogelijk is. Merk op dat de afhankelijkheid van δ uit de bovengrens verdwenen is.

Ik werd uitgenodigd voor een getaltheorieconferentie in Oberwolfach in mei 1968. Daar ontmoette ik vele getaltheoretici voor het eerst, zoals Pál Turán en zijn vrouw Vera Sós, Alan Baker, John Coates, Hugh Montgomery, Harold Stark, Wolfgang Schmidt, Theodor Schneider, Harold Davenport, Wilhelm Ljunggren, Louis Mordell. Overigens de drie laatstgenoemden ook voor het laatst. Tijdens deze conferentie vertelden Baker, Coates en Stark over hun nieuwe resultaten waarover later meer. In die tijd ontwikkelde Wolfgang Schmidt zijn Subspace Theorem. Het was een gouden tijd voor de theorie van diofantische approximaties. Voor mij was belangrijk dat Coates me meenam naar de bibliotheek om een stelling in een boek van Gelfond aan te wijzen waarin bovengenoemde δ nog een rol speelde [3]. Volgens John kon die met mijn stelling verwijderd worden.

Hij had zelf dit kunnen uitwerken. Ik ben hem nog steeds dankbaar dat hij mij die kans gaf. Het resulteerde in een artikel waarin stellingen van het volgende type bewezen worden:

Stel zowel de getallen α_1, α_2, α_3 als de getallen η_1, η_2, η_3 zijn lineair onafhankelijk over de rationale getallen. Dan heeft het lichaam van rationale getallen uitgebreid met de twaalf getallen $\alpha_k, e^{\alpha_k \eta_j}\,(k,j=0,1,2)$ ten minste transcendentiegraad 2. [13]

Tijdens de conferentie vroeg Turán me het volgende academische jaar naar Boedapest te komen. Volgens mijn promotoren, Popken en Jager, mocht ik deze kans niet missen. Met onder anderen Erdős, Turán en Rényi was Boedapest toen een centrum voor getaltheorie, discrete wiskunde en kansrekening. Mijn vrouw was weinig enthousiast. Na twee en een half jaar op een inwoning geleefd te hebben, hadden we juist die maand een flat gekregen, met geiser, toilet en douche! Toch wilde ze met me meegaan. Met dank aan NWO die op korte termijn een beurs beschikbaar stelde, reden we in september 1968 naar de hoofdstad van Hongarije, achter het ijzeren gordijn, de laatste vijftig kilometer tussen de militaire voertuigen die terugkeerden

Foto: Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Konrad Jacobs, Erlangen

Pál Turán met zijn vrouw Vera Sós, Moskou, 1966

uit Tsjecho-Slowakije na het einde van de Praagse lente. In Boedapest woonden we weer bij mensen in huis. Hier voltooide ik mijn proefschrift waarop ik in november 1969 promoveerde.

Verblijf aan Institute of Advanced Study

Kort na mijn promotie meldde Kuiper vanuit Princeton dat er het volgende academische jaar een speciaal getaltheorieprogramma zou zijn aan het Institute of Advanced Study en dat dit voor mij een gelegenheid was die ik niet mocht missen. Popken drong erop aan dat ik zou gaan. Tot mijn grote verdriet overleed hij in augustus 1970. Ik kreeg een Fulbrightbeurs en een maand later vlogen mijn vrouw, onze half jaar oude dochter en ik naar New York en vandaar naar Princeton.

Het verblijf in het complex van het Institute of Advanced Study in Princeton was heel anders van karakter dan dat in Boedapest. Hier hadden we een eigen woning en waren we met veel gezinnen die hier ook een half of heel jaar doorbrachten. Hier had ik de tijd om een aantal collega's goed te leren kennen: Alan Baker, Enrico Bombieri, Sarvadaman Chowla, Christopher Hooley, Hugh Montgomery, Wolfgang Schmidt, Atle Selberg, Jean-Paul Serre, Eduard Wirsing. Het belangrijkste voor mij was K. Ramachandra. Hij hielp me de methode van Baker te doorgronden (zie kader). Ramachandra vertelde me ook dat je eerste vijf artikelen de belangrijkste zijn en dat de rest er eigenlijk niet veel toe

Lineaire vormen in logaritmen en transcendentie

Een complex getal heet *algebraïsch* als het nulpunt is van een niet-triviaal polynoom met gehele coëfficiënten en anders *transcendent*. De getallen $\sqrt{2}$ en i zijn algebraïsch, want ze zijn nulpunt van respectievelijk z^2-2 en z^2+1. De transcendentie van e werd in 1873 door Hermite bewezen. Met een verwante methode bewees Lindemann in 1882 dat e^c transcendent is als $c \neq 0$ algebraïsch is. Dit impliceert de transcendentie van $c \neq 0$ als e^c algebraïsch is. In het bijzonder volgt de transcendentie van π vanwege de relatie $e^{\pi i} = -1$.

In 1934 bewezen Gelfond en Schneider beiden dat a^c transcendent is als a en c algebraïsche getallen zijn met $a \neq 0,1$ en c irrationaal. Voorbeelden zijn $2^{\sqrt{2}}$, waarvan transcendentie al in 1930 door Kuzmin bewezen was, en $e^{\pi} = (-1)^{-i}$. Wegens $a^{\log b/\log a} = b$ kan het dus niet zo zijn dat $a(\neq 0,1), b$ en $\log b/\log a (\notin \mathbb{Q})$ alle algebraïsch zijn. Met hun stelling is dus equivalent dat $\log b/\log a$ voor algebraïsche getallen a, b met $a,b \neq 0,1$ hetzij rationaal hetzij transcendent is.

Een *transcendentiemaat* is een functie die een ondergrens in termen van n en H aangeeft voor de afstand tussen een vast transcendent getal en een algebraïsch getal waarvan het minimaalpolynoom graad n heeft en alle coëfficiënten in absolute waarde kleiner dan H zijn. Het geeft dus aan hoe dicht je een transcendent getal met algebraïsche getallen kunt benaderen. In het door Coates aan mij getoonde boek leidt Gelfond transcendentiematen af voor bovengenoemde a^b en $\log b/\log a$. Baker generaliseerde dit tot producten $e^{b_0} a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_n^{b_n}$ en lineaire vormen $b_0 + b_1 \log a_1 + \cdots + b_n \log a_n$ waarbij $a_1, \ldots, a_n$ en $b_0, \ldots, b_n$ algebraïsche getallen zijn. Hij bewees dat zulke lineaire vormen in logaritmen van algebraïsche getallen hetzij 0 hetzij niet heel erg klein zijn. Verder toonde hij aan hoe hiermee onder generieke voorwaarden bovengrenzen gegeven kunnen worden voor de geheeltallige oplossingen x, y van de Thue-vergelijking $F(x,y) = m$ waarbij F een homogeen polynoom van graad ≥ 3 en m een geheel getal $\neq 0$ is, en voor de hyperelliptische vergelijking $y^m = f(x)$ waarbij $m \geq 2$ een geheel getal en f een polynoom met gehele coëfficiënten is met ten minste twee verschillende nulpunten als $m \geq 3$ en ten minste drie verschillende nulpunten als $m = 2$. Coates bewees p-adische versies van Bakers resultaten. De eindigheid van het aantal oplossingen was in deze gevallen al eerder bewezen door Thue, Siegel en Mahler, maar met hun aanpak konden geen bovengrenzen voor de oplossingen worden afgeleid. Een van de meest spectaculaire toepassingen van de lineaire-vormen-methode was het bewijs dat er niet meer imaginair kwadratische getallenlichamen met klassegetal 1 bestaan dan de negen reeds lang bekende, overigens een resultaat dat Stark onafhankelijk van Baker ongeveer gelijktijdig met een methode van Heegner bewees. Voor zijn resultaten kreeg Baker in 1970 de Fieldsmedaille. Zie voor zijn methode [1] en [5].

doet. Financieel gezien zou dat ook voor mij opgaan.

Ik leerde veel in Princeton, maar kreeg weinig klaar. Iemand vertelde me dat dit meer voorkomt. Je hebt het gevoel: “Nu verkeer ik onder ideale omstandigheden, nu gaat het gebeuren.” Maar goede ideeën kun je niet afdwingen. Een morele oppepper kreeg ik toen ik werd uitgenodigd een voordracht te geven in State College. Daar leerde ik Dale Brownawell kennen die in zijn proefschrift een resultaat van R. Spira gebruikt had waarvan later het bewijs fout bleek te zijn. Door in plaats daarvan mijn nulpuntenstelling te gebruiken was zijn proefschrift gered.

Aanstelling in Leiden

Tijdens mijn verblijf in Princeton kreeg ik het bericht dat ik in Leiden tot lector was benoemd. Kort daarna werd aan lectoren het promotierecht gegeven. Vanwege de dood van Popken en mijn interesse in transcendentie vroeg mijn studievriend Piet Cijsouw of hij bij me kon promoveren; hij had daarvoor een jaar vrij gekregen. In een hoog tempo leidde hij de ene na de andere transcendentiemaat af en een jaar later promoveerde hij bij mij, terwijl ik daarvoor nog nooit in een promotiecommissie had gezeten en de gebruiken als de commissie zich terugtrekt niet kende. Zelf was ik in deze periode zeer productief waarbij ik een aantal keren de theorie over lineaire vormen toepaste. Daarmee verbeterde ik schattingen van Erdős voor de afstand tussen opeenvolgende getallen die zijn samengesteld uit een verzameling vaste priemgetallen, en verkreeg ik samen met Ramachandra en zijn leerling Tarlok Shorey schattingen in verband met een ook nu nog open vermoeden van Grimm (zie kader).

Een belangrijke observatie betrof de eenvoudige Thue-vergelijking $ax^n - by^n = m$ met a, b, m constant en ongelijk aan 0. Zoals eerder aangegeven kunnen voor gegeven a, b, m, n met $n \geq 3$ door toepassing van lineaire vormen bovengrenzen voor x, y worden afgeleid. De voor de hand liggende corresponderende ongelijkheid hierbij is

$$|\log(a/b) + n\log(x/y)| < cy^{-n}$$

voor een constante c. Bakers theorie geeft dat het linker lid groter moet zijn dan $y^{-c'\log n}$ voor een constante c'. Door beide ongelijkheden te combineren vinden we $n < c'' \log n$. Hieruit volgt een bovengrens voor n. De theorie over lineaire vormen maakte het dus mogelijk om ook de exponent n af te schatten!

In deze periode kreeg ik nog te maken met een opmerkelijke ingreep van een staatssecretaris. Deze hield mijn benoeming tot hoogleraar tegen, omdat ik als 31-jarige onvoldoende levenservaring zou hebben. Dit betrof al zulke voorstellen van mensen die nog geen 35 jaar waren. Het jaar daarop, toen er nieuwe salarisschalen waren, kon de benoeming wel doorgaan.

De vergelijking van Catalan

Toen ik ergens het vermoeden van Catalan tegenkwam dat $8 = 2^3$ en $9 = 3^2$ de enige opeenvolgende positieve gehele getallen zijn die beide een zuivere macht zijn, zette dat me aan het nadenken. De corresponderende diofantische vergelijking is $x^m - y^n = 1$. De vergelijking bleek zowel voor $m \leq 4$ als voor $n \leq 4$ al opgelost te zijn.

Het is daarom zonder verlies van algemeenheid dat ik in het vervolg aanneem dat m en n oneven priemgetallen zijn. Toepassing van Bakers schatting op de voor de hand liggende ongelijkheid

$$|m\log x - n\log y| < \frac{1}{y^n}$$

geeft geen nieuwe informatie. We kunnen echter ontbinden:

$$y^n = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1)$$

waarbij de grootste gemene deler van de twee factoren rechts een deler van m is. Dat houdt in dat $x - 1$ op een mogelijke factor m na zelf een n-de macht is. Evenzo is $y + 1$ op een mogelijke factor n na een m-de macht. Stel $n < m$. Het andere geval gaat analoog. Als een van beide ggd’s gelijk aan 1 is, volgt als boven dat voor zekere constanten c_1, c_2 geldt dat $n < c_1(\log m)^{c_2}$. De moeilijkheid treedt op als beide ggd’s ongelijk aan 1 zijn. De oplossing voor dit probleem kwam pas in me op toen we ontspannen met vakantie waren in Spanje en

Het vermoeden van Grimm

Een vermoeden van C.A. Grimm [4] is dat als $n+1, n+2, \ldots, n+g$ alle samengesteld zijn, er g priemgetallen $p_1, p_2, \ldots, p_g$ bestaan zó dat $p_j | n+j$ voor $j = 1, 2, \ldots, g$. Bijvoorbeeld kunnen we voor 24, 25, 26, 27, 28 als priemdelers respectievelijk 2, 5, 13, 3, 7 kiezen. Het vermoeden is nog open.

De beginstappen zijn elegant. Eerst passen we een stelling van Philip Hall uit 1935 toe, die wel de huwelijksstelling wordt genoemd, en die als volgt kan worden geformuleerd:

Op een datingsite heeft elk persoon uit een verzameling A een aantal personen uit een verzameling B aangegeven waarmee hij/zij wel wil daten. Dan kan aan de personen uit A onderling verschillende personen uit B worden toegekend als en alleen als voor elke k geldt dat het totale aantal personen dat door welke k personen uit A ook genoemd is ten minste gelijk is aan k.

Het is duidelijk dat deze voorwaarde nodig is. Het punt is dat deze voorwaarde ook voldoende is.

In onze toepassing is $A = \{n+1, n+2, \ldots, n+g\}$, is B de verzameling priemgetallen en kiest elk getal uit A zijn priemdelers. Als dan een toekenning zoals Grimm dat vraagt onmogelijk is, zijn er kennelijk getallen $1 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leq g$ zó dat $(n+i_0)(n+i_1) \cdot (n+i_k)$ niet meer dan k priemdelers heeft. Kies voor elk van die priemgetallen p het getal $n+j$ $(1 \leq j \leq g)$ dat p tot de hoogste macht deelt. Dan is er een getal $n+j$ dat niet gekozen wordt, wat betekent dat elke priemdeler van $n+j$ nog een ander getal $n+h$ $(1 \leq h \leq g)$ ten minste tot dezelfde macht deelt. Die priemmacht deelt ook het verschil van $n+h$ en $n+j$ en is dus ten hoogste g. Omdat er niet meer dan k priemdelers zijn, volgt dat $n < n+j \leq g^k < g^g$, een resultaat van Grimm zelf. Erdős en Selfridge bewezen het iets scherpere $g > c\log n$ voor een constante $c > 0$, Ramachandra gebruikte Bakers methode om nog een factor kleiner dan $(\log\log n)^{1/2}$ te winnen. Cijsouw en ik bewezen dat $g > c(\log n)^2/(\log\log n)^6$ en vervolgens Ramachandra, Shorey en ik dat $g > c(\log n)^3/(\log\log n)^3$ waarbij Shorey een nieuwe schatting voor lineaire vormen introduceerde. Zie [8]. Het laatstgenoemde resultaat houdt in dat Grimms vermoeden waar is als Cramérs vermoeden waar is dat de afstand tussen opeenvolgende priemgetallen p en q voor zekere $c > 0$ nooit groter is dan $c(\log p)^2$. Maar ook dat vermoeden is nog open.

ik me even teruggetrokken had. Stel bijvoorbeeld dat

$$x-1=m^{-1}\rho^n,\ y+1=n^{-1}\sigma^m \quad (\rho,\sigma\in\mathbb{Z}).$$

Dan zou de ongelijkheid

$$|\,n\log n - m\log m + mn\log(\rho\sigma)\,| < \frac{3m^2}{\rho^n}$$

wellicht wat opleveren. Als het een beetje meezat zou ook hier volgen dat $n < c_1(\log m)^{c_2}$ met wellicht andere constanten c_1, c_2. Als n zo klein was zouden we hem wellicht als constante kunnen opvatten en een lineaire-vorm-afschatting kunnen toepassen op de lineaire vorm

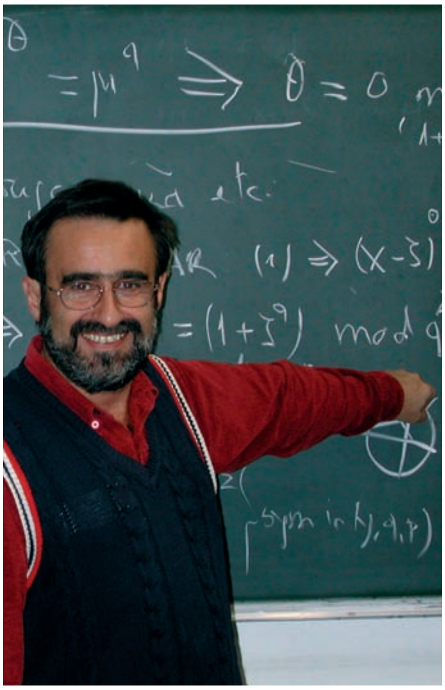
$$\left|\, n\log n + m\log\frac{p^{-1}\rho^n+1}{\sigma^n}\right| < \frac{2n^2}{\sigma^p}.$$

Dat zou leiden tot een ongelijkheid $m < c_3(\log m)^{c_4}$ voor constanten c_3, c_4. Zo zou volgen dat m en daarmee n begrensd zijn. Vervolgens zouden we voor elk resterend paar m, n een hyperelliptische vergelijking $y^n = x^m - 1$ hebben en met de bekende Bakerse theorie bovengrenzen voor x en y krijgen. Zo precies lukte het natuurlijk niet in Spanje, maar het is wel opmerkelijk dat het idee me in gedachten schoot toen ik me ontspande. Weer terug in Nederland bleek dat ik wel een uitbreiding van de beschikbare lineaire-vorm-ongelijkheid nodig had om mijn plan uit te voeren. Gelukkig bleek het mogelijk Bakers ongelijkheid zo te verfijnen dat het argument kloppend gemaakt kon worden. Van een 130 jaar oud vermoeden had ik aangetoond dat alle oplossingen onder een te berekenen grens moesten liggen, zie [14] of [10].

Latere ontwikkelingen

Ik deed geen pogingen om de bovengrens uit te rekenen, wetende dat deze heel erg groot zou zijn. Kort daarna berekende Michel Langevin met mijn methode dat $m,n < 10^{107}$ en

$$|\,x^m\,|, |\,y^n\,| < 10^{10^{10^{10^{320}}}}.$$



Preda Mihăilescu

Deze grens werd in stappen verbeterd. Zo bewees Mignotte in 1992 dat $m,n < 1{,}31\cdot 10^{18}$. Anderzijds bewezen Mignotte en Roy 1995–1997 dat $\min(m,n)\geq 10^5$. Het gat tussen onder- en bovengrens bleef te groot om te hopen het met computerberekeningen te kunnen overbruggen. Een nieuwe aanpak was nodig. Die werd ontwikkeld door Preda Mihăilescu met behulp van de theorie van cyclotomische lichamen. In 1999 bewees hij

$$m^{n-1}\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ n^2),\quad n^{m-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ m^2).$$

Dit stelde Mignotte in staat om de grenzen te verscherpen tot $10^7 \leq \min(m,n) \leq 7{,}2\cdot 10^{11}$, $\max(m,n)\leq 7{,}8\cdot 10^{16}$. Eind 2001 zond Mihăilescu een manuscript met een volledig bewijs van het vermoeden van Catalan naar Yuri Bilu. Deze herschreef het bewijs zodat het beter toegankelijk werd. Aanvankelijk speelden lineaire vormen nog een rol [6], maar uiteindelijk wist Mihăilescu het bewijs zo aan te passen dat er geen lineaire vormen of computers meer aan te pas kwamen [7]. Voor een goede beschrijving van alle ontwikkelingen rond het vermoeden van Catalan, zie [2].

Overigens zijn er nauwelijks toepassingen van de Catalan-vergelijking. Dat ligt anders voor een andere toepassing van lineaire vormen op exponentiaalvergelijkingen, de stelling van Schinzel en mij [9]. Deze zegt:

Als een polynoom $P(x)$ met rationale coëfficiënten ten minste twee verschillende nulpunten heeft, dan bestaat een constante $c(P)$ zó dat de vergelijking $y^m = P(x)$ met $x, y\in\mathbb{Z}, |\,y\,| > 1$ impliceert dat $m < c(P)$.

Aanvankelijk was ook hier de bovengrens voor m zo groot dat de schatting niet gebruikt kon worden voor het bepalen van alle oplossingen m, x, y van een hyperelliptische vergelijking. Maar nadat Benne de Weger [15] en anderen erin geslaagd waren een idee van Baker en Davenport om de bovengrens voor m ruwweg door zijn logaritme te vervangen hadden gegeneraliseerd, konden bovengrenzen voor m teruggebracht worden tot een paar honderd en was het in bepaalde gevallen mogelijk alle oplossingen te bepalen. Daarnaast zijn er tegenwoordig Chabauty en modulaire methoden beschikbaar waarmee verwante exponentiaalvergelijkingen opgelost kunnen worden.

Referenties

1 A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975.

2 Y.F. Bilu, Y. Bugeaud en M. Mignotte, *The Problem of Catalan*, Springer, 2014.

3 A.O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, Dover Publ., 1960.

4 C.A. Grimm, A conjecture on consecutive composite numbers, *Amer. Math. Monthly* 76 (1969), 1126–1128.

5 D. Masser, Alan Baker 1939–2018, *Notices AMS* 66(1) (2019), 32–35.

6 P. Mihăilescu, Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, *J. reine angew. Math.* 572 (2004), 167–195.

7 P. Mihăilescu, On the class groups of cyclotomic extensions in the presence of a solution to Catalan's equation, *J. Number Th.* 118 (2006), 123–144.

8 K. Ramachandra, T.N. Shorey en R. Tijdeman, On Grimm's problem relating to factorisation of a block of consecutive integers, *J. reine angew. Math.* 273 (1975), 109–124.

9 A. Schinzel en R. Tijdeman, On the equation $y^m = P(x)$, *Acta Arith.* 31 (1976), 199-204.

10 T.N. Shorey en R. Tijdeman, *Exponential Diophantine Equations*, Cambridge University Press, 1986.

11 R. Tijdeman, On a problem of Erdős and Turán, *Indag. Math.* 28 (1965), 374–383.

12 R. Tijdeman, On the number of zeros of general exponential polynomials, *Indag. Math.* 33 (1971), 1–7.

13 R. Tijdeman, On the algebraic independence of certain numbers, *Indag. Math.* **33** (1971), 146–162.

14 R. Tijdeman, On the equation of Catalan, *Acta Arith.* 29 (1976), 197–209.

15 B.M.M. de Weger, Algorithms for Solving Diophantine Equations, *CWI-Tract* 65, CWI Amsterdam, 1989.