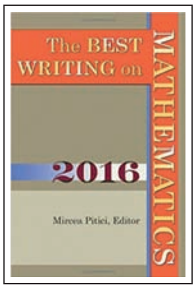
Boekbesprekingen

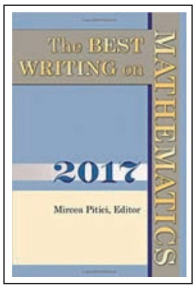
| Book Reviews



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2016

Princeton University Press, 2017
xxii + 377 p., prijs $32.95
ISBN 9780691175294



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2017

Princeton University Press, 2018
xvi + 224 p., $24.95
ISBN 9780691178639

In NAW van maart 2015, pagina 87, en in NAW van december 2016, pagina's 303 en 304, staan de recensies afgedrukt van de corresponderende boeken uit 2013, respectievelijk 2014 en 2015. Net zo als bij die eerdere besprekingen beperken we ons ook nu tot het weergeven van de inhoud van een aantal der bijdragen, ditmaal van twaalf van de dertig uit de 2016-bundel en van tien van de negentien uit de 2017-bundel. De bijdragen zijn uit verschillende tijdschriften afkomstig.

Uit de 2016-bundel: (1) H.E. Christanson en S.R. Garcia, 'G.H. Hardy, Mathematical biologist'. Een korte bijdrage over het hoe en waarom Hardy ertoe kwam zich te verdiepen in de genetica. (2) B. Polster, 'Stacking wine bottles revisited'. Hier wordt, met kleurenplaatjes en tekst, verhaald hoe men op de bodem van een kist n even grote flessen onregelmatig naast elkaar kan leggen, en vervolgens de kist opvult naar boven, waarna het blijkt dat altijd bovenop de $(2n-1)$-de rij een plank gelegd kan worden, precies horizontaal, die aan elk der n eronder liggende flessen raakt. Variaties op dit feit worden uiteengezet. (3) J. Bowman, 'The way the billiard ball bounces'. Na een gemakkelijk te begrijpen inleiding aangaande periodieke banen, worden verbindingen geschetst die er zijn met het werk van de Fieldsmedaillewinnaars Avila en Mirzakhami. (4) E. Klarreich, 'Mathematicians chase Moonshine shadows'. Een overzicht van de zogeheten 'moonshine' in de eindige-groepentheorie en elders, wordt gepresenteerd. Het betreft werk van McKay, Thompson, Borcherds, Cheng, Ramanujan, Duman en Ono. (5) D. Castelvecci, 'The impenetrable proof'. Een bijdrage over Mochizuki's poging om het bewijs van het abc-vermoeden te leveren. Ook over de ontvangst door collega's wordt verteld. (6) B. Green, 'Why string theory still offers hope we can unify physics'. Een persoonlijke bijdrage over het onderwerp, van de studententijd van de auteur tot op heden. (7) T. Khovanova, E. Nie en A. Puranik, 'The pioneering role of the Sierpinski gasket'. De *Ulam–Warburton automaton* en de *Sierpinski gasket* zijn nauw met elkaar verbonden; het verband ertussen (veel dieper dan ogenschijnlijk bekend) wordt tentoongespreid. Mooie bijdrage! (8) J. Dauben en M. Senechal, 'Math at the Met'. Een verhaal over het Metropolitan Museum of Art in New York, met name over wat er binnen te zien is op het gebied van bètawetenschappen. Prachtige illustra-

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview

ties in kleur in deze bijdrage, alsmede uitvoerige referenties, onder andere over getallen, spellen, ruimte en tijd. (9) D. Richetan, 'Circular reasoning; who first proved that C divided by d is a constant'. Een verhaal, zich uitstrekkende over de tijd, aangaande het feit dat de verhouding van de omtrek van een cirkel tot de straal ervan constant is. Goed historisch overzicht. (10) V. Blåsjö, 'The myth of Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus'. Zie NAW 5/6 (2015), 46–50. (11) A. Shell-Gallash, 'The spyrograph and mathematical models from nineteenth century Germany'. Er bestaan verbanden tussen beide zaken, zoals de inversor van Peaucellier en Schillings lijnen producerende modellen. Deze en andere worden beschreven, voorzien van kleurenillustraties. (12) J. Stillwell, 'What does 'depth' mean in mathematics?'. Inderdaad, het begrip 'diepte' wordt hier uitgediept. Als kapstokken worden gebruikt: Dirichlets stelling over priemgetallen in een rekenkundige rij, Poincarés vermoeden (bewezen door Perelman), Fermats laatste stelling (bewezen door Wiles), de classificatie van de eindige simpele groepen (1880–1981). Maar er is meer te vinden in deze bijdrage.

Dan de 2017-bundel: (a) E. Lamb, 'The largest known prime number'. Ten tijde van de publicatie van dit artikel ging het om de vondst van het 49ste Mersenne-priemgetal. Achtergronden hiervan zijn beschreven. (b) S. Roberts, 'An infinitely rich mathematician turns 100'. De getallentheoreticus Richard Guy werd 100 in 2016. Het artikel vertelt over zijn leven en werk en invloed. (c) G.L. Alexanderson en L.F. Klosinski, 'Ramanujan in bronze'. Het artikel geeft een overzicht over leven en werk van Ramanujan en Hardy, maar veel meer nog over een buste-beeld van Ramanujan dat na vele omzwervingen door Alexanderson werd verworven op een veiling voor slechts 500 dollar. (d) L. Riddle, 'Creating symmetric fractals'. Deze worden met herhaalde-functie-systemen, abstracte algebra en het tellen van pixels voortgebracht. Kleurenafbeeldingen op glanspapier verluchtigen de bijdrage. (e) N. Kasraei, Y. Kourian en M. Madavinejad, 'Girth for domes: An analysis of three Iranian domes'. Het gaat hier om de koepel van de Yazd Jame-moskee en de inwendige en uitwendige koepel van de Saveh Jame-moskee te Iran. Uitvoerig worden de constructies beschreven. Ook hier kleurenafbeeldingen op glanspapier. (f) S. Breen en A. O'Shea, 'Threshold concepts and undergraduate mathematical teaching'. Het artikel bespreekt 'drempelbegrippen' oftewel begrippen die, eenmaal doorzien, toegang geven tot ontwikkeling van deelgebieden van de wiskunde. Toegelicht is dat onder andere voor limieten, functies, nevenklassen en factorgroepen van groepen, juist ook in verband met onderwijs aan eerstejaarsstudenten. (g) V. Blåsjö, 'How to find the logarithm of any number using nothing but a piece of string'. Verhaald wordt over het 'Leibniz-recept', als gedaan in de zeventiende eeuw voor de kettinglijn. (h) C.H. Se'quin en R. Shian, 'Rendering Pacioli's rhombicuboctahedron'. Uitvoerig wordt beschreven, voorzien van zwart-wit-illustraties en kleurenillustraties, hoe de rhombicuboctahedron voorkomend op het schilderij *Ritratto di Fra'Luca Pacioli* uit 1495, kan worden weergegeven door middel van meetkunde en computertechnieken, deels via oude technieken en deels via moderne. (i) J. Gray, 'Who would have won the Fields medal 150 years ago?'. De auteur suggereert, met redenen omkleed, wie daarvoor in aanmerking hadden kunnen komen, aannemende dat een (met namen omklede) commissie van beoordelaars aan het werk was geweest. Hij komt dan uit bij Cremona en Gibbs als winnaars. Aardig speculatief artikel. (j) J.P. Marquis, 'Stairway to heaven: The abstract method and levels of abstrahism in mathematics'. Voor de inhoud van deze meer dan voortreffelijke bijdrage, zich afspelende in de twintigste eeuw, zij direct verwezen naar *The Mathematical Intelligencer* 38(3) (2016), 41–51.

De hier niet behandelde bijdragen uit de 2016-bundel gaan onder andere over didactiek-aspecten, Hardy en zijn *A Mathematician's Apology*, fractalen met foto's, grafentheorie, combinatoriek, Einstein en Pythagoras, Oresmes beginsel van kromming, opsporen van fouten in grote databestanden, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Idem dito voor de 2017-bundel: wiskundig geproduceerde zaken in de praktijk, *quantum strings* en random groei, dingen verkregen door achteruit redeneren, projectieve maanschaduwmeetkunde, rekenen op je vingers als kind, didactiek en leerprocessen, paradoxen en beperkingen in de wetenschap, Bayesiaanse hersenen, voorspellingen via statistiek. Dit alles overziende, kan ik beide bundels van harte aanbevelen. Misschien die van 2017 iets meer dan die van 2016?

Robert van der Waall

Stefan Müller-Stach (Hrsg.)

Richard Dedekind

Was sind und was sollen die Zahlen?

Stetigkeit und Irrationale Zahlen

Springer 2017
x + 204 p., prijs € 29,99
ISBN 9783662543382

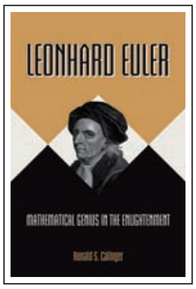
Het boek bevat de teksten *Was sind und was sollen die Zahlen?* [WZ] en *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* [SZ] van Richard Dedekind. Het boek behoort tot de Springer-reeks 'Klassische Texte der Wissenschaft'. Elk boek uit die reeks heeft nagenoeg dezelfde structuur: een of ander beroemd werk wordt in oorspronkelijke druk in het midden opgenomen en van gedetailleerd commentaar voorzien. Dat is de kern van zo'n boek. Eraan voorafgaand is onder andere een korte biografie van de auteur van het te bespreken werk te vinden en wat de aanleiding is geweest voor de auteur om het werk te schrijven; erna wordt de invloed en receptiegeschiedenis van het werk beschreven. Zo is ook de structuur van het hier te bespreken boek. De teksten WZ en SZ zijn door Stefan Müller-Stach van een uitgebreide en gedetailleerde toelichting voorzien; de gedrukte teksten WZ en SZ maken de helft uit van het boek van tweehonderd pagina's en bevinden zich zoals gebruikelijk in de reeks in het midden van het boek. Dit middendeel wordt voorafgegaan door een historische inleiding en een overzicht van het onderzoek dat Dedekind deed naar het getalbegrip. Na het middendeel volgt een beschrijving van de receptiegeschiedenis en de invloed van de werken WZ en SZ samen met een overzicht van de stand van zaken van het onderzoek betreffende het getalbegrip. Het middendeel is het meest interessante stuk van het hele boek en is zeer goed te volgen; er is weinig voorkennis voor nodig. De toelichting die Müller-Stach geeft is goed en erg nuttig. Het probleem van dit boek is dat alles behalve het middendeel voor menigeen niet zo makkelijk leesbaar zal zijn. In de eerste twee hoofdstukken behandelt Müller-Stach immers veel zaken die niet direct met WZ of SZ uit hoofdstuk 3 te maken hebben. De lezer wordt blijkbaar wel verondersteld van die zaken kennis te hebben. Om er een aantal te noemen: categorietheorie, theorie van recursie en berekenbaarheid, modeltheorie, algebraïsche getaltheorie en zelfs klassenlichamentheorie. Doordat er zoveel behandeld wordt wat niet direct relevant is voor het bestuderen van WZ en SZ wordt ook het geduld van de lezer erg op de proef gesteld. Een punt wat ik niet zo kon waarderen is het volgende. In hoofdstuk 2 noemt Müller-Stach de recursiestelling uit WZ (Satz 126) een van de belangrijkste stellingen van Dedekind en dan laat hij nog twee versies ervan volgen. In het artikel van Müller-Stach 'Richard Dedekind: Style and Influence' (arXiv:1612.03326) noemt hij het zelfs het belangrijkste resultaat van WZ. Veel van de onderwerpen overigens die hij in dat artikel schrijft vindt u ook in zijn boek. Müller-Stach mag best die mening hebben maar mij interesseert meer welk resultaat Dedekind het belangrijkste vindt van WZ. Wat Dedekind het belangrijkste resultaat vindt is vermeld in zijn beroemde brief aan Keferstein, waarover later meer.

Laten we overgaan tot de kern van het boek; het is zeer goed mogelijk u bij het lezen te beperken tot die kern. Het meest interessante deel van het boek is behalve de teksten van WZ en SZ, hoofdstuk 4 waarin uitleg gegeven wordt van de teksten WZ en SZ en waarin de inhoud ervan samengevat wordt in modern taalgebruik. De oorspronkelijke tekst WZ die uit 172 items bestaat ('Satz', 'Erklärung', 'Bemerkung'...), wordt per item uitgebreid en uitstekend van uitleg voorzien. Een echte omissie is hoe Müller-Stach omgaat met de voor het begrip van WZ belangrijke brief van Dedekind van 27 februari 1890 aan Hans Keferstein, een 'Oberlehrer' in Hamburg. Keferstein had in 1890 een artikel gepubliceerd bij de Mathematischen Gesellschaft Hamburg over de boeken van Frege en Dedekind betreffende het getalbegrip; wat Dedekind betreft gaat het over de tekst WZ. Dedekind voelde zich gedwongen in 1890 om te antwoorden met een essay dat hij op 9 februari 1890 aan Keferstein stuurde en waarin hij Keferstein bekritiseerde op drie punten. Hij stuurt het naar Keferstein met het verzoek het te publiceren in hetzelfde tijdschrift waarin Keferstein zijn paper publiceerde of, als Keferstein overtuigd was geraakt van zijn eigen ongelijk, daarover een verklaring te publiceren. Dedekind liet het aan Keferstein zelf over hoe ermee om te gaan. Eén van de drie punten was dat Keferstein het belangrijke kettingbegrip uit WZ wilde schrappen, wat zou inhouden dat de mathematische inductie onmogelijk werd. Het kettingbegrip houdt in: laat φ een afbeelding zijn van een verzameling X naar zichzelf; een deelverzameling Y van X heet een ketting als $\varphi(Y)$ bevat is in Y. Op 14 februari 1890 bevestigt Keferstein de ontvangst van het essay maar is niet van plan zijn mening betreffende het kettingbegrip te herzien. Dedekind stuurt hem op 27 februari 1890 een lange brief waarin hij op briljante wijze de ontwikkeling van zijn ideeën uiteenzet die ten grondslag liggen aan WZ. Hij schrijft dat zijn aannames zeer zorgvuldig zijn gekozen en dat dat zeker het geval is voor het kettingbegrip dat Keferstein wil elimineren. Voor meer informatie zie het boek *From Frege to Gödel* van Jean van Heijenoort. Het enige wat Müller-Stach over deze brief meldt in het eerste hoofdstuk is dat hij de brief als bijlage opgenomen heeft omdat deze een zeer goede inkijk geeft in de denkwijze van Dedekind. Op deze brief moet je zeker uitgebreid ingaan als je WZ behandelt. Deze brief geeft bovendien antwoord op de vraag wat Dedekind het belangrijkste vindt van WZ; in de aanvang van de brief formuleert Dedekind een tweetal vragen waar WZ antwoord op moet geven. Meegenomen is in ieder geval dat de brief nu in het Duits beschikbaar is. In het boek van Jean van Heijenoort staat de brief afgedrukt in het Engels.

De paragraafsgewijze behandeling van SZ is kort maar daarom zeker niet minder interessant. Het begrip 'Stetigkeit' staat daarbij centraal. Dedekind definieert in paragraaf 4 van SZ het begrip voor de getallenrechte als volgt: "Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke, hervorbringt." Maar als Dedekind eenmaal zijn sneden ingevoerd heeft en tot reële getallen heeft verklaard toont hij in paragraaf 5 van SZ aan dat dit begrip ook van toepassing is op de verzameling sneden: "Zerfällt das System R aller reellen Zahlen in zwei Klassen U_1, U_2 von der Art, dass jede Zahl α_1 der Klasse U_1 kleiner ist als jede Zahl α_2 der Klasse U_2, so existiert eine und nur eine Zahl α, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird." Müller-Stach merkt op dat dit begrip 'Stetigkeit' tegenwoordig aangeduid wordt met 'Volständigkeit'. Deze opmerking is belangrijk om te begrijpen wat Dedekind met de titel van SZ bedoelt. Het is dan ook niet verstandig om het woord 'Stetigkeit' zomaar te vertalen met 'Continuïteit'. De uitleg over Dedekind-sneden door Müller-Stach in modern taalgebruik is uitgebreid. Dat er ook sneden zijn die niet voortgebracht worden door rationale getallen toont hij zoals meestal gebeurt, aan de hand van de Dedekind-snede van $\sqrt{2}$; Dedekind doet het in paragraaf 4 van SZ voor $\sqrt{n}$ met n een positief geheel getal dat zelf geen kwadraat is van een geheel getal, om op die manier te laten zien dat er oneindig veel sneden zijn die niet voortgebracht worden door een rationaal getal. Dedekinds indirecte bewijs is overigens verrassend. Om aan te tonen dat de geordende lichamen gevormd door Dedekind-sneden, Cantors fundamentaalrijen en intervalschakelingen isomorf zijn verwijst Müller-Stach naar het boek van Heinz-Dieter Ebbinghaus e.a., *Zahlen* (Springer, 1992). Het is aan te bevelen om de eerste twee hoofdstukken van dat boek eens door te nemen, ze zijn geschreven door Klaus Mainzer. De meesten van ons hebben waarschijnlijk slechts op één manier kennis gemaakt met de introductie van de reële getallen, in dit boek worden meerdere manieren geïntroduceerd en met elkaar vergeleken. Dat er ook problemen zijn met Dedekind-sneden, waarover Müller-Stach overigens niets meldt, wordt verwoord door Freudenthal in *Euclides* 24(3), jaargang 1948/1949: "De snede van Dedekind hoort niet thuis in de universitaire leerboeken der analyse als grondslag van de theorie der reële getallen. De snede van Dedekind is een gezochte en gekunstelde methode, die aanvankelijk elegant lijkt, maar zeer omslachtige en onelegante bewijzen vereist, wanneer men de theorie der reële getallen hierop wil baseren..." Indien men een volledige uitwerking wil zien van de eigenschappen van Dedekind-sneden dan is het aan te bevelen om de hoofdstukken 3 en 4 van het boek *Grundlagen der Analysis* (*Foundations of Analysis*) van Edmund Landau eens te bekijken. Men zal direct overtuigd zijn van Freudenthals bezwaren; maar het werk dat Landau daar verzet zal toch moeten gebeuren. Freudenthal voert de reële getallen in met oneindige decimaalbreuken. In SZ schrijft Dedekind ook dat het bewijzen van alle eigenschappen van de reële getallen omslachtig is; maar ik heb het idee dat hij in paragraaf 6 van SZ aangeeft hoe die zaken toch elegant te bewijzen. Het voorbeeld dat hij kiest, is de eigenschap $(a+b)c = ac+bc$ in de reële getallen. Wellicht wil hij daar het volgende zeggen: stel dat je die eigenschap kent voor de rationale getallen, dan kies je drie rijen rationale getallen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ en $\{c_n\}$ die naar a, b en c convergeren; omdat $(a_n+b_n)c_n = a_nc_n+b_nc_n$ geldt voor rationale getallen, volgt de eigenschap dan ook voor de limieten. Voorgaande is makkelijk in te zien als je de reële getallen identificeert met de punten op de getallenrechte; maar de betekenis van de redenering wordt anders en abstracter als je de formules interpreteert binnen de verzameling Dedekind-sneden of de verzameling equivalentieklassen van Cauchy-rijen. Dedekind verwijst in de voornoemde paragraaf naar de continuïteit van de functies maar werkt het niet verder uit. Müller-Stach besteedt er helemaal geen aandacht aan en werkt het dan ook niet uit en dat is toch jammer gezien het moeizame werk van Landau en de bezwaren van Freudenthal.

In hoofdstuk 5 ‘Rezeptionsgeschichte’ en hoofdstuk 6 ‘Wirkungsgeschichte und Positionen der Forschung’ worden veel onderwerpen beknopt genoemd die meestal indirect met Dedekind te maken hebben: onder andere het werk van Peano, Noether, Van der Waerden, Hilbert en Skolem, het programma van Hilbert, recursieve functies en de theorie van berekenbaarheid, de ZF-axioma’s. Müller-Stach verwijst bij die onderwerpen naar zijn uitgebreide literatuurlijst van 256 boeken of artikelen. Deze laatste twee hoofdstukken samen met de literatuurlijst stellen de lezer prima in staat om onderwerpen die hem of haar interesseren verder te bestuderen. Er valt zeker voor iedereen wel wat te ontdekken. Tot slot: het centrale deel van het boek dat bestaat uit de teksten van WZ en SZ van Dedekind en de toelichting van Müller-Stach zijn zeer goed te lezen en zeker nuttig om te bestuderen. Wat het overige gedeelte betreft zal iedereen een eigen modus moeten vinden hoe daarmee om te gaan.

Math Dicker



Ronald S. Calinger
Leonhard Euler
Mathematical Genius in the Enlightenment
Princeton University Press, 2016
xvii + 669 p., prijs $55.00
ISBN 9780691119274

Leonhard Euler (1707–1783), een van de meest fascinerende wiskundigen, alleen al door de haast niet te bevatten omvang van zijn werk (meer dan 25000 pagina’s), en door de veelzijdigheid daarvan. Door indrukwekkende resultaten, ook door zijn invloed op tijdgenoten in vele brieven met 275 correspondenten, ook door zijn aantekeningen in zijn ‘Notizbuch’, en door zijn methode van werken heeft hij een enorme nalatenschap voor ons gecreëerd. We zien hoe Euler gecompliceerde berekeningen kon uitvoeren en die inpassen in diepe theorie; toepassingen en onderwijs zien we in zijn werk.

Zijn publicaties zijn in de getaltheorie, analyse in vele verschijningsvormen, meetkunde, logica, grafentheorie en waarschijnlijkheidsrekening; in de natuurkunde: mechanica, akoestiek en optica, in astronomie en in muziek.

Hij leefde in Bazel (1707–1727), Sint-Petersburg (1727–1741), Berlijn (1741–1766) en weer Sint-Petersburg (1766–1783). Euler had contacten met grote wiskundigen, filosofen en staatshoofden uit die tijd. Hij had een omvangrijke familie en daarbij het vermogen zich te concentreren in een hectisch familieleven. Van zijn omvangrijke werk is nog niet alles gepubliceerd. Welke aspecten moeten in een biografie van deze veelzijdige persoon beschreven worden?

In dit boek worden hoofdzakelijk aspecten beschreven over het leven van Euler, in alle verschijningsvormen. Een prachtige documentatie van de posities die hij ingenomen heeft en van personen waarmee hij in contact stond. We krijgen een mooi tijdsbeeld van de intellectuele omgeving waarin Euler geleefd en gewerkt heeft. We zien aspecten van zijn familieleven en hoe hij daarmee omging. De auteur heeft nieuwe bronnen bestudeerd en toegankelijk gemaakt. Een prachtig uitgangspunt voor oriëntatie op deze aspecten van deze grote geleerde en zijn rol in zijn tijd.

Een biografie zou niet alleen moeten bestaan uit het vermelden van feiten. Ik mis in dit boek vragen, evaluaties, overzichten en vooral inhoudelijke conclusies over de wiskundige Euler en zijn invloed op de wiskunde, op de natuurkunde en op andere intellectuele aspecten van ons leven. Iemand met een formidabele kennis over dit onderwerp, zoals deze auteur, zou ons een grote dienst bewijzen met *het formuleren van historische vragen en historische interpretaties van dit materiaal*.

Het boek is minder overzichtelijk dan ik zou willen. Eenzelfde onderwerp wordt in dit boek vaak op heel verschillende plaatsen besproken. Het zou beter zijn om elk onderwerp systematisch en gestructureerd als aparte paragraaf te behandelen. En het helpt de lezer ook al niet dat de algemene index ontoereikend is; voor één onderwerp wordt (willekeurig?) wel of niet verwezen naar een pagina waar dit voorkomt.

De auteur geeft af en toe wiskundige uitleg. Soms begrijp ik niet wat de auteur wil zeggen. Formules komen haast niet voor, en waar ze er wel zijn zien we fouten. Hoe kun je zo over een groot wiskundige schrijven? Ik geef een paar voorbeelden.

Het lijkt mij onwaarschijnlijk dat Euler de waarde van π als $3.14159365\ldots$ gebruikte zoals op pagina 289 beweerd wordt (de zesde decimaal is fout). Eveneens is het onwaarschijnlijk dat Euler de waarde $e = 2.718281845904$ (pagina 204) gebruikte (de achtste en negende decimaal ontbreken, en $e \notin \mathbb{Q}$).

Op pagina 80 wordt een fragment uit een brief van Goldbach aan Euler (Moskou 1 december 1729) weergegeven waarin verteld wordt dat Fermat, Goldbach en Euler de vraag bestudeerden naar de primaliteit van $2^{2n-1}+1$. Een wiskundige ziet dat dit getal voor elke $n \geq 1$ deelbaar is door 3, dus niet priem voor $n > 1$. We zien dat het hier gaat om de ‘Fermat-getallen’ $2^{2^{n-1}}+1$. Iemand die deze kennis niet heeft, kan dan toch wel de brief van Goldbach zorgvuldig lezen en deze formule juist vermelden (zoals het overigens later wel goed op dezelfde pagina staat)? Waarom niet een wiskundige vragen het manuscript op dergelijke verschrijvingen te controleren? Die zou bovenstaande fouten kunnen corrigeren, en die zou zich direct afvragen of inderdaad Euler beweerde dat de diofantische vergelijking $89 = 11 \cdot x^2 + y$ geen oplossingen heeft (pagina 104).

De Latijnse tekst “... Fermatii observatio ...” uit de brief van Goldbach aan Euler, Moskou 1 december 1729, wordt hier vertaald als “... Fermat’s conjecture ...”, zie pagina 80. Het is een interessante vraag welke beweringen Fermat als vraag, als vermoeden of als stelling beschouwde; daar wordt hier aan voorbijgegaan.

Voor Goldbach (1690–1764) en Euler was deze terminologie in hun werk wel degelijk duidelijk. In de brief van Goldbach aan Euler, Moskou 7 juni 1742, wordt zijn beroemde vermoeden (een vorm van: “elk even getal minstens 4 kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen”) geformuleerd als “...eine conjecture hazardieren...” (bij mijn weten de eerste keer dat dit woord met deze betekenis in de wiskundige literatuur gebruikt wordt). Euler schrijft terug, Berlijn 30 juni 1742: “ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann.” We zien dat Goldbach en Euler zorgvuldig onderscheid maakten tussen verschillende kwalificaties van een wiskundige uitspraak. De vertaling ‘observatio’ $\rightarrow$ ‘conjecture’ lijkt mij onjuist; het gaat voorbij aan historisch interessante vragen rond Fermat, Goldbach en Euler en ook over het later gebruik van het woord ‘conjecture’.

Terzijde: er bestaat ook het Nederlandse woord ‘conjectuur’, maar met een heel andere connotatie (als je een verminkt of onleesbaar manuscript probeert te ontcijferen kun je gissen wat er zou moeten staan: gissing, tekstverbetering).

Het *Bazel-probleem*: bereken de som $\sum_{n>0} 1/n^2$, geformuleerd door Mengoli in 1650; Huygens, Leibniz, de Bernouilli’s, Stirling, De Moivre waren niet in staat dit op te lossen. Euler maakte eerst berekeningen van een benadering door eindige sommen uit te rekenen (correct tot twintig decimalen). Euler voerde de *reële* functie in

$$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n>0} 1/n^s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

In 1735 deed Euler de sensationele ontdekking dat $\zeta(2) = \pi^2/6$. De auteur van dit boek claimt op pagina 119 dat door eerdere berekeningen “apparently Euler saw that the answer to the problem was near to $\pi^2/6$.” Op pagina 107: “Euler must have seen that the exact sum of the Basel problem is near $\pi^2/6$.” Wat bedoelt de auteur met deze uitspraak? Euler wist dat de ‘exact sum’ gelijk is aan $\pi^2/6$. Bovendien, als historicus kun je zoiets beter als precies geformuleerde vraag, dan als ongefundeerde conclusie formuleren. We zouden de vraag kunnen stellen of Euler achteraf de berekening $\pi^2/6 = 1.6449340668482264\ldots$ vergeleek met zijn eerdere afschattingen.

Euler vond op experimentele grond de functionaalvergelijking voor $\zeta(-)$. Deze en andere abstracte overwegingen brachten Euler waarschijnlijk op het spoor van de juiste waarde van $\zeta(2)$. Later berekende Euler $\zeta(2n)$ voor $2 \leq 2n \leq 26$, en verder gaf Euler een algemene formule voor alle $\zeta(2n)$ met $n \geq 1$. Een fascinerende geschiedenis, die veel verder gaat dan conclusies uit berekeningen.

Overigens, Riemann (1826–1866) beschouwde complexe getallen $z \in \mathbb{C}$ als exponenten in de definitie van $\zeta(z)$ en Riemann gaf een bewijs voor de functionaalvergelijking voor deze complexe functie, die we nu de Riemann-zètafunctie noemen.

Op pagina 103 zien we hoe Euler in 1730 een bewering van Christian Wolff (1679–1754), dat $M_{11} \coloneqq 2^{11}+1$ een priemgetal zou zijn, weerlegt door op te merken dat $M_{11} = 2047 = 23 \times 89$. Jammer dat hierbij niet uitgelegd wordt dat Euler in 1750 een criterium formuleerde, en dat Lagrange een stelling bewees in 1775: *voor een priemgetal p met $p \equiv 3 \pmod 4$ geldt dat $q \coloneqq 2p+1$ een priemgetal is dan en slechts dan als q een deler is van M_p*. We zien hoe Euler het bijzondere geval, een berekening, ziet als onderdeel van een algemene structuur. Dit boek laat dit niet zien.

Conclusie: Dit boek bevat weinig wiskundig materiaal, dat lijkt me een goede keuze van de auteur, maar wat er wel in staat is vaak fout of gebrekkig. Ontwikkelingen in de wiskunde waar Euler een rol in speelde, worden niet uitgediept. *Jammer genoeg worden goede historische vragen over ontwikkelingen en begrippen in de wiskunde niet gesteld.* In deze aspecten schiet dit boek tekort.

Zo maar wat mooie details. Zie de discussie tussen Clairaut en Euler (pagina 206), waar een methode om primaliteit van een getal te testen van Euler wel subtiel maar onnodig genoemd wordt en getaltheorie in het algemeen bedoeld zou zijn om “de geest te oefenen”.

Of zie de geschiedenis over de fonteinen van Sanssouci waar getwijfeld werd of Euler deze toepassing van de wiskunde wel goed begreep (pagina’s 312–314).

Op pagina 265 zien we hoe Euler vermeldt dat een resultaat (uit 1744) ten onrechte aan hem toegeschreven wordt, in plaats van aan Gerhard Andreas Müller (in een artikel uit 1743).

Op pagina’s 422/423 zien we hoe Euler een resultaat nog niet naar de drukker stuurt omdat hij de prioriteit aan Lagrange laat. Hier zien we een wetenschapper van groot formaat, ook op dit vlak.

Waarom de titel van dit boek? De ‘eeuw van de verlichting’ wordt meestal gesitueerd in 1715–1789, een periode waar intellectuele en filosofische gedachten in Europa een grote ontwikkeling doormaakten. De bewoording is afkomstig van Immanuel Kant (1724–1804), zoals verwoord in zijn essay ‘Beantwortung der Frage: Was ist Aufklärung?’ Het leven van Euler viel vrijwel geheel samen met deze periode. Maar dat is niet de motivatie voor de titel van dit boek.

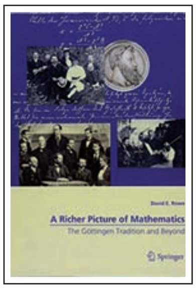
De Academie in Sint-Petersburg, opgericht in 1724 in opdracht van tsaar Peter de Grote (1672–1725), vanaf 1725 onder beleid van zijn weduwe Catharina I (Catharina de Grote, 1684–1727), had als doel wetenschappers de juiste omgeving voor hun onderzoek te geven. Met die gedachte werd Euler naar Sint-Petersburg gehaald.

Euler had grote interesse in het toepassen van zuivere wiskunde in praktische problemen maar vooral ook in onderwijs, in het verspreiden van wiskundige gedachten. In de periode 1760–1762 schreef Euler *Lettres à une princesse d’Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, uitgegeven in drie delen in Moskou 1768–1774, later herdrukt in Parijs 1787–1789. Dit was een reeks van 234 brieven geschreven aan Sophie Charlotte Friederike von Brandenburg-Schwedt en haar jongere zuster Louise. Zie E343 in het Euler-archief.

Dit werd een van de belangrijke documenten in de ‘eeuw van de verlichting’. Het gaf niet-wiskundigen inzicht hoe je zuivere wiskunde kunt ontwikkelen (diagrammen over doorsneden van verzamelingen werden precies uitgelegd, om maar iets te noemen), stap voor stap brengt Euler het materiaal op een hoger niveau, en hoe je wiskunde kunt toepassen (hoe construeer je een orgelpijp, hoe snel verplaatst licht zich, en nog veel meer). Deze onschatbare bron van informatie en uitleg over wiskundige en natuurkundige begrippen, en nog veel meer, werd een bron van informatie die ver buiten de kring van exacte wetenschappers een grote invloed had. Immanuel Kant, Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832) en Arthur Schopenhauer (1788–1860) hebben dit werk gelezen, ze waren vol lof erover. Zie ook brieven 49 en 50 als reactie op een brief van Voltaire (1694–1725), zie pagina 34. De metafysica maakte plaats voor informatie en methoden uit de exacte wetenschappen. Euler heeft hierin een grote invloed op filosofen uit zijn tijd gehad. Daarom lijkt mij de titel van dit boek gerechtvaardigd; we vinden op pagina’s 460–469 van dit boek een mooie beschrijving van dit werk van Euler en de invloed daarvan.

Dit boek geeft waardevolle informatie over het leven van Euler in al zijn facetten, en over de rol van Euler in de wetenschap van de achttiende eeuw.

Informatie over zijn publicaties, correspondenties en nog veel meer vinden we op The Euler Archive-website van de MAA: http://eulerarchive.maa.org. *Frans Oort*



David Rowe

A Richer Picture of Mathematics

The Göttingen Tradition and Beyond

Springer International Publishing, 2018

xix + 461 p., prijs €169,00

ISBN 9783319678184

David Rowe is hoogleraar in de geschiedenis van de wiskunde, met als specialiteit de Duitse wiskunde van de negentiende eeuw. Deze gouden eeuw voor de Duitse wiskunde met als grootste namen Gauss, Riemann en Hilbert had als centrum het kleine provinciestadje Göttingen. Over de enorme betekenis van elk van deze drie voor de hedendaagse wiskunde kun je met gemak een lijvig boek vullen.

Het boek van Rowe bestaat uit een bundeling van ruim dertig artikelen geschreven in de periode 1984 tot 2013 voor de *Mathematical Intelligencer*, opgesplitst in zes delen, die elk nog weer zijn voorzien van een inleiding. De aanleiding voor deze uitgave was het vijfentwintigjarig jubileum van Rowe als hoogleraar aan de Johannes Gutenberg Universiteit van Mainz.

Het boek bevat een veelheid aan feiten en verhalen. Wist U wie over Gauss sprak als een vos die met zijn dikke staart zijn sporen goed wist uit te wissen? Was het Abel en bij welke gelegenheid zei hij dat? U leest erover in het tweede hoofdstuk.

De hoofdrolspelers van het boek zijn Felix Klein en David Hilbert, die beiden hoogleraar waren te Göttingen in de perioden 1886–1913 en 1895–1930 respectievelijk. Klein zag zichzelf als de hoeder van de rijke wiskundetraditie in het Göttingen van Gauss en Riemann. In hoofdstuk 11 beschrijft Rowe op levendige wijze de felle competitiestrijd tussen Klein en Henri Poincaré over de uniformiseringsstelling voor Riemannoppervlakken. Ook hoe deze ontspoorde in een scherpe briefwisseling naar aanleiding van het gebruik door Poincaré van het woord ‘Fuchse’ functies. Aanvankelijk dacht de iets jongere Poincaré de zaak te kunnen sussen door ook het begrip ‘Kleinse’ functies in te voeren, maar dat bleek een vergissing en de rapen waren gaar. Klein wees Poincaré erop dat indien hij de relevante literatuur vanaf het begin van dit onderwerp had gekend (in het bijzonder die van Riemann uit 1857, Schwarz uit 1873 en Klein uit 1879) hij nooit de naam Fuchs zou hebben gebruikt. In zijn antwoord aan Klein ontkende Poincaré de naam Kleinse functie te hebben ingevoerd als Widergutmachung. En ach, het ging tenslotte maar over namen. “Name ist Schall und Rauch” citeerde hij uit Goethes Faust. Hierbij is het wellicht aardig de stelling van Vladimir Arnold, die overigens zelf een groot fan van Poincaré was, in herinnering te roepen: Iedere naamgeving van een stelling of begrip in de wiskunde naar een zeker persoon is incorrect. Voorts is de stelling van Arnold ook van toepassing op zichzelf.

Uiteindelijk heeft Klein wel een beetje zijn gelijk gekregen en zijn eigen favoriete benaming ‘automorf’ is thans gebruikelijk: automorfe vormen en automorfe representaties staan centraal in het Langlands-programma. De felle competitiestrijd met Poincaré en het negatieve gekibbel over namen waren overigens de trigger voor de mentale instorting van Klein in 1882.

Het tweede deel van het boek gaat voornamelijk over Felix Klein. In het derde deel wordt de bloeiperiode onder Hilbert besproken, met als natuurlijk vervolg de relativiteitsrevolutie in deel vier. De voordrachten van Einstein in 1915 in Göttingen komen aan bod en Hilberts bijdrage aan de variationele formulering van de Einstein-veldvergelijking. Het was wederom een periode van ongekende bloei in Göttingen, waarin de beste wiskundigen zoals Minkowski, Hilbert, Weyl en Emmy Noether zich naast hun zuivere wiskunde ook diepgaand inlieten met de theoretische natuurkunde.

Het laatste deel van het boek bestaat uit nog wat losse eindjes. Is wiskunde kunst of is het een wetenschap? En een stukje over Coxeter, en als laatste een stukje over Dirk Struik. Het is een prachtig boek geworden waar ik met heel veel plezier in heb gelezen. Van harte aanbevolen. *Gert Heckman*

Alex van den Brandhof

Priemwoestijnen

Prometheus, 2018

256 p., prijs €21,99

ISBN 9789044636833

Het boek gaat over de grote wiskundige ontdekkingen van de eenentwintigste eeuw. Een van de aardige kenmerken van dit boek is de nummering van de hoofdstukken. Niet hoofdstuk 1 tot en met 17, maar hoofdstuk 2001 tot en met 2017. Het deed me denken aan de Nederlandse familiegeschiedenis *Het zwijgen van Maria Zachea*, geschreven door Judith Koelemeijer. De hoofdstukken worden in dat boek geduid met de namen van familieleden. Familieleden met verschillende ervaringen. Ook dit boek *Priemwoestijnen* is een geschiedenis van uiteenlopende vermoedens en bewijzen van soms zeer kleurrijke wiskundigen.

In elk hoofdstuk wordt een hoogtepunt uit de wiskunde belicht. Het lijkt me niet eenvoudig om een keuze te bepalen. De zeventien hoogtepunten verschillen enorm van elkaar. Kun je ze wel met elkaar vergelijken? Moeten we het zien als een profieltekening van een pittige Alpenetappe van een Tour de France? Een berg van de eerste categorie is dan toch ‘Het Poincaré-vermoeden’ uit 2003. Een hoogtepunt uit de topologie, een deelgebied van de wiskunde met als koosnaampjes rubbermeetkunde of kleimeetkunde. In deze meetkunde maken we geen onderscheid tussen de omcirkelde driepuntige ster van Mercedes-Benz en zo’n heerlijke bretzel (zoute krakeling met drie gaten — in Amerika heet het pretzel) uit de Beierse keuken. Voor de geïnteresseerde leek, ook al doet auteur Van den Brandhof zijn uiterste best om het goed uit te leggen — meer afbeeldingen had ook gemogen — is dit geen gemakkelijk hoofdstuk. Zeer leesbaar is wel de anekdote van de

Rus Grigori Perelman die drie jaar later na de publicatie van de lijst van de zeven millenniumproblemen de wiskundewereld verbaasde met het oplossen van één van die problemen. We komen dan bij de voor de hand liggende vraag: voor wie is dit boek geschreven?

Van den Brandhof beantwoordt zelf deze vraag op pagina 11: "Ik heb dit boek echter geschreven voor mensen zonder veel wiskundige voorkennis." Menig wiskundedocent van de middelbare school zal er hier en daar toch een flinke kluif aan hebben om alles goed te doorgronden. Bijvoorbeeld de vergelijking van Turán op pagina 190:

$$\sum_{p<x}(\ln(p))^2 + \sum_{pq<x}\ln(p)\ln(q) = 2x\ln(x) + O(x).$$

Ook de auteur zelf vindt dat deze fundamentele formule niet op deze plek uitgelegd moet worden. Voor een groot publiek is dit interessante boek niet geschreven. Je hebt wel degelijk wat wiskundekennis en vaardigheden nodig.

Waar gaan die hoogtepunten over? Sowieso vier mooie hoofdstukken over priemgetallen, te weten rekenkundige priemrijen van 2004, het abc-vermoeden in 2012, priemtweelingen van 2013 en priemwoestijnen van 2014. Over meetkunde: het Poincaré-vermoeden van 2003, de Erdős–Mordell-ongelijkheid van 2007 en vlakvullende vijfhoeken van 2017. Over spellen: de engel en de duivel van 2006, boter, kaas en eieren uit 2009 en het kaartspel Set van 2016.

Wat de titel van het boek betreft: die dekt niet de inhoud van het boek, maar een substantieel deel van het boek gaat over priemgetallen. Priemwoestijnen vinden we, al eerder vermeld, terug in hoofdstuk 2014. Het is boeiend om te lezen hoe Paul Erdős op jonge leeftijd van zijn vader te horen kreeg, niet alleen wat een priemgetal is en dat er oneindig veel van zijn, maar dat stukken van de getallenlijn waar geen priemgetallen in voorkomen priemwoestijnen heten. Hij leerde ook hoe je priemwoestijnen kunt construeren van willekeurige lengte maar dat dit niet wil zeggen dat je dan ook weet wat de lengte is van de langste priemwoestijn. In hoofdstuk 2014 wordt ook vermeld dat eind negentiende eeuw het bewijs van de priemgetalstelling wordt geleverd, bijna gelijktijdig maar onafhankelijk van elkaar, door Jacques Hadamard en Charles de la Vallée Poussin. De stelling houdt in dat de afstand $P_{n+1}-P_n$ tussen twee opeenvolgende priemgetallen ongeveer gelijk is aan de natuurlijke logaritme van P_n. En dan lezen we een spannend verhaal over de ontwikkeling en vooruitgang van het vinden van de lengte van de langste priemwoestijn en over Terence Tao die het priemwoestijnvermoeden van Erdős oploste.

Kun je er als docent iets mee in de klas of in de collegezaal? Zeker. Bij wiskunde B (en zeker bij wiskunde D) in bovenbouw vwo kun je mooi 'De Erdős–Mordell-ongelijkheid uit 2007' presenteren. In 1935 stond in een rubriek 'Advanced Problems' (no. 3750) van *The American Mathematical Monthly* onder andere het volgende meetkundeprobleem: Vanuit een willekeurig punt O binnen een gegeven driehoek ABC worden de loodlijnen OP, OQ en OR op de zijden getekend. Bewijs dat $OA+OB+OC \geq 2(OP+OQ+OR)$. Het lijkt zinvol om de studenten het bewijs eerst zelf te laten proberen. Het is echt geen schande als ze er niet uitkomen. Pogingen mogen ook mislukken. Maar het is wel boeiend om later te vertellen over de vele (geslaagde) pogingen en om tot slot een elegant bewijs te presenteren met als doel de schoonheid van meetkunde te laten zien. Het bewijs van het tweetal Claudi Alsina en Roger Nelsen is echt heel fraai.

Hoofdstuk 2012 'Het *abc*-vermoeden' is een heel geschikt hoofdstuk om het met studenten over te hebben. Je moet je wel inleven in nieuwe woorden, bijna Martin Toonder-achtig. We maken kennis met getallen die kras zijn, superkras zelfs, getallen die pips zijn en via de operatie radicaal kun je een kras getal pips maken. Dit heb je allemaal nodig om het abc-vermoeden te kunnen begrijpen. Voor de leerling in de bovenbouw van het vwo is het voldoende om de exponentiële vergelijking $g^k = c$, waarbij g en c bekend zijn, op te kunnen lossen. Desnoods zonder logaritme maar wel met behulp van de grafische rekenmachine. En we lezen dat als het abc-vermoeden echt bewezen kan worden, er dan weer andere zaken gelden.

Vlakvullende vijfhoeken is een (laatste) hoofdstuk dat prachtig omgezet kan worden in leerlingmateriaal. We lezen wanneer een tegel vlakvullend is. Er wordt helder uitgelegd dat convexe vlakvullende tegels niet meer dan zes zijden kunnen hebben. De vlakvullende eigenschap van tegels met drie, vier of zes zijden is zo uitgelegd maar die van die vijfhoeken is een stuk ingewikkelder. Martin Kindt schreef al eens over de Caïro-tegels. Dat gebeurt hier ook. En dan krijgen we de ontwikkeling te lezen van de classificatie van vlakvullende convexe vijfhoeken. Met als hoogtepunt het bewijs van de Franse wiskundige Michaël Rao dat er niet meer dan vijftien soorten zijn. En dan nog wel een bewijs met behulp van de computer. Computerbewijs? Dat was de auteur al eerder tegengekomen bij het bewijs van de vierkleurenstelling. In zijn geboortejaar 1976 hadden wiskundigen de computer voor het eerst ingezet om een stelling te bewijzen. Met het bewijs (van Andrew Wiles), van de laatste stelling van Fermat, één van de drijfveren, zo bekent de auteur, om dit boek te schrijven.

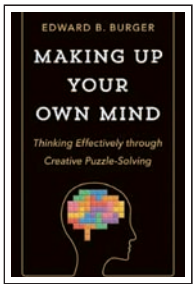
Er is nog een achttiende hoogtepunt, het boek zelf. Een must, ik ben er enthousiast over. Aanschaffen dus als u het nog niet gedaan heeft. Het boek hoort niet alleen thuis in de mediatheek van de middelbare school maar ook in de boekenkast van elke wiskundedocent en elke wiskundestudent. Natuurlijk had ik graag gekleurde plaatjes gezien, bijvoorbeeld bij de hoofdstukken over het kaartspel Set en Vlakvullende vijfhoeken. Zeker zijn ook sommige bronnen niet zo toegankelijk voor veel lezers, pittige wiskunde dus. Maar er is toch veel heldere uitleg, leuke smeuïge anekdotes en overzichtelijke geschiedenis van nieuwe inzichten en ontwikkelingen. Ik merk bijvoorbeeld bij de 'De Erdős–Mordell-ongelijkheid uit 2007' dat ik zelf nieuwsgierig word hoe Erdős op dit probleem is gekomen. De auteur zet je ertoe aan om op zoek te gaan naar de driehoeksformule van Euler (1765) en het bewijs ervan. Wat die formule inhoudt? Laten we met d de afstand aangeven tussen de middelpunten O en I van respectievelijk de omgeschreven en de ingeschreven cirkel van driehoek ABC. De formule van Euler geeft dan een verband tussen deze afstand d en de beide stralen R (van de omgeschreven cirkel) en r (van de ingeschreven cirkel): $d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R$.

Al eerder heb ik opgemerkt dat sommige hoofdstukken omgezet kunnen worden, volgens een activerende werkvorm, in uitdagend student/leerling materiaal. Aan de slag dus. *Jacques Jansen*

Erratum

In de bespreking van Bryan Hayes' *Foolproof* in het decembernummer staat abusievelijk vermeld dat Bryan Hayes Senior editor is bij Scientific American. Dit moet zijn Senior writer voor American Scientist.

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.

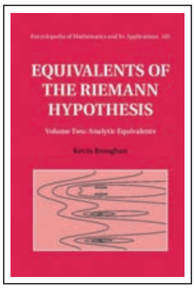


Edward B. Burger

Making Up Your Own Mind

Thinking Effectively through Creative Puzzle-Solving

Princeton University Press, 2018
ISBN 9780691182780
press.princeton.edu/titles/14166.html

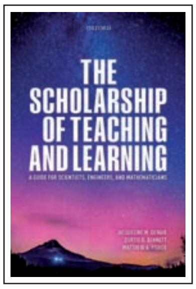


Kevin Broughan

Equivalents of the Riemann Hypothesis

Volume 1: Arithmetic Equivalents
Volume 2: Analytic Equivalents

Cambridge University Press, 2017
ISBN 9781108178228
ISBN 9781108178266
doi.org/10.1017/9781108178228
doi.org/10.1017/9781108178266

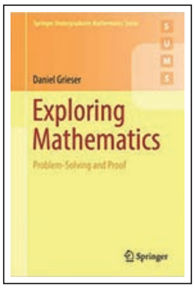


Jacqueline Dewar, Curtis Bennett, Matthew A. Fisher

The Scholarship of Teaching and Learning

A Guide for Scientists, Engineers, and Mathematicians

Oxford University Press, 2018
ISBN 9780198821212
oup.com/academic/product/9780198821212

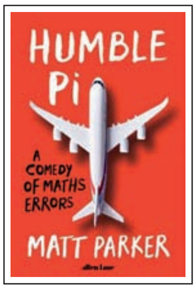


Daniel Grieser

Exploring Mathematics

Problem-Solving and Proof

Springer, 2018
ISBN 9783319903217
springer.com/9783319903194

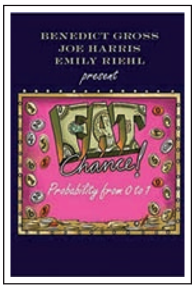


Matt Parker

Humble Pi

A Comedy of Math Errors

Penguin Books, 2019
ISBN 9780241360231
penguin.co.uk/books/300640/humble-pi/9780241360231

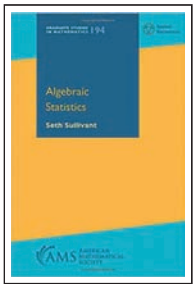


Benedict Gross, Joe Harris, Emily Riehl

Fat Chance

Probability from 0 to 1

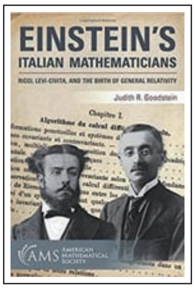
Cambridge University Press, 2019
ISBN 9781108728188
cambridge.org/9781108728188



Seth Sullivant

Algebraic Statistics

American Mathematical Society, 2018
ISBN 9781470435172
bookstore.ams.org/gsm-194

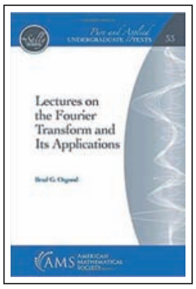


Judith R. Goodstein

Einstein's Italian Mathematicians:

Ricci, Levi-Civita, and the Birth of General Relativity

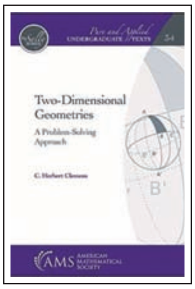
American Mathematical Society, 2018
ISBN 9781470428464
bookstore.ams.org/mbk-113



Brad G. Osgood

Lectures on the Fourier Transform and Its Applications

American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470441913
bookstore.ams.org/amstext-33



C. Herbert Clemens

Two-Dimensional Geometries

A Problem-Solving Approach

American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470447601
bookstore.ams.org/amstext-34