

Swier Garst

RG0, Middelharnis
garst@planet.nl

Onderwijs

Van A naar B

Op 19 oktober 2018 promoveerde Swier Garst. Hij was de eerste wiskundeleraar die promoveerde in het project Leraar in Onderzoek (LIO) van het NWO. Hij legt hier uit wat zijn onderzoek inhield.

Aan het begin van deze eeuw was het aantal wiskundestudenten tot een dramatisch dieptepunt gedaald. Hier en daar werd zelfs het opheffen van de studie wiskunde overwogen. De opleidingen knokten terug en namen hun verantwoordelijkheid met de organisatie van activiteiten zoals wiskundewedstrijden en masterclasses voor vwo-leerlingen. Gemeenschappelijke component in die activiteiten was leerlingen enthousiast maken voor een studie wiskunde. Dat gebeurde door leerlingen in contact te brengen met een uitgebreider scala aan wiskundige onderwerpen dan alleen de onderwerpen zoals die op scholen onderwezen werden. Behalve de opleidingen zelf wilde ook NWO een actieve rol spelen om het aantal wiskundestudenten te verhogen en startte het project Leraar in Onderzoek (LIO). Een leraar aan een middelbare school kon gedurende een periode van twee jaar een dag per week onderzoek doen aan een universiteit. De achterliggende gedachte was: enthousiaste wiskundeleraars zijn de beste motivatie voor de keuze van de studie wiskunde door zijn leerlingen.

De aankondiging van het LIO-project was een goede gelegenheid om contact te zoeken met de wiskundeafdeling van de TU Delft. Binnen een week zat ik achter een trommel koekjes aan Jan Aarts uit te leggen wat ik zoal bij elkaar gefantaseerd had op het gebied van dynamische systemen. De aanvraag van het project bij NWO was succesvol en ik kon beginnen aan een analyse van een prooi-roofdiermodel dat ik ooit eens op een KWG-congres in Delft had opgepikt. Behalve de gebruikelijke analyse was er nog een opmerkelijke eigenschap aan het model. Omdat hier sprake was van een 2-1-afbeelding in een beperkt gebied was het niet zo'n grote stap naar de definitie van een afbeelding gedefinieerd door een vouw en een draai.

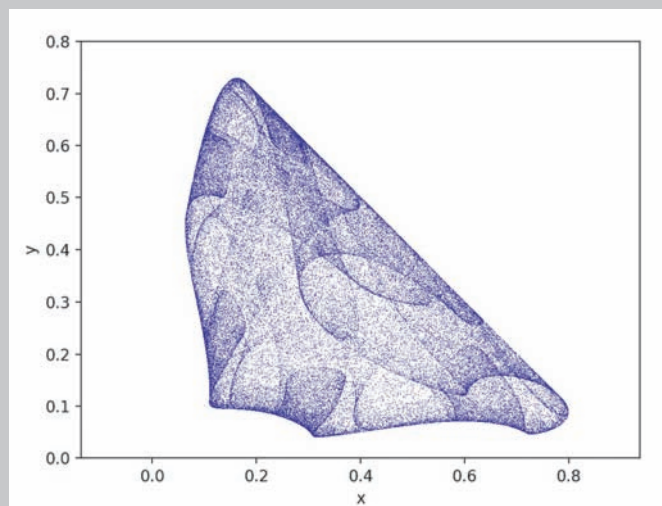
Na afloop van het LIO-project stelde Jan Aarts voor om aan een 'boekje' te gaan werken. De regeling voor oudere docenten en mijn leeftijd pasten naadloos en vele dinsdagen van gesprekken en gepuzzel volgden. De beide afbeeldingen bleken op dynamisch gebied veel overeenkomsten te vertonen. Intussen waren er de halfjaarlijk-

se reizen naar Groningen. Daar spraken we met Henk Broer over de twee afbeeldingen die Jan en mij bezighielden en in stukjes en beetjes kregen we een beter beeld van de (gemeenschappelijke) dynamica van beide afbeeldingen. Dat beeld werd echt glashelder dankzij het werk van Alef Sterk. De test of vergelijkbare overeenkomsten tussen de vouw-en-draaiafbeelding en het discrete Lorenz-63-model bestonden werd glansrijk doorstaan.

Niets leek een mooie promotie in de weg te staan: er waren artikelen en het bedoelde 'boekje' met de titel *Dynamics amidst Folding and Twisting in 2-Dimensional Systems* was gereed. Dan komt het gitzwarte bericht dat Jan overleden is. Hij heeft de promotie die hij zelf ooit had gesuggereerd niet mee kunnen maken. Het maakte de promotie van 19 oktober 2018 nog meer bijzonder dan die van een oude wiskundeleraar die alleen maar sterker gemotiveerd raakte voor onderwijs door onderzoek en de bijzondere meester met zijn eindeloze geduld. Dat eindeloze geduld was heel goed toepasbaar in het onderwijs op school. Maar al te vaak vergissen we ons in het tempo en dus in de omvang van de leerstof die leerlingen aankunnen.

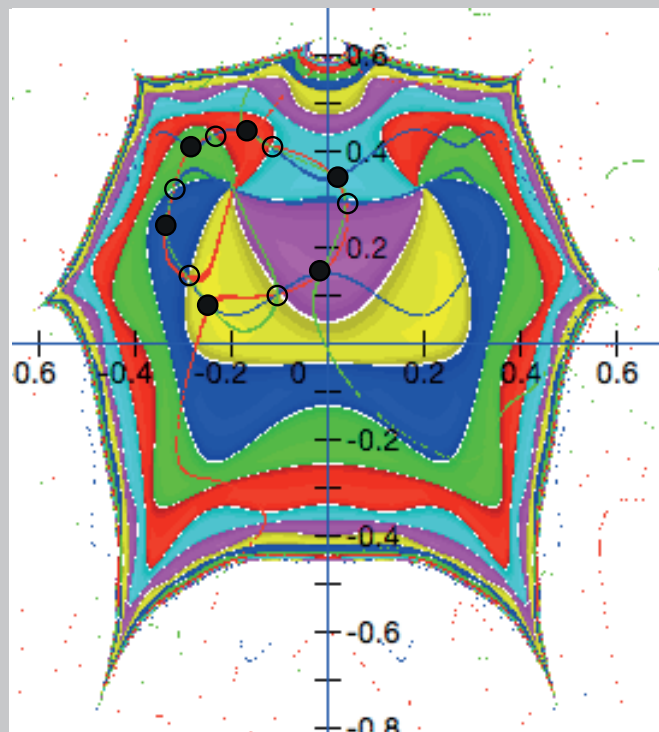
Vouwen en draaien

Afbeeldingen met een 2-1-eigenschap uit het domein van discrete dynamische systemen zijn de inspiratiebron voor de definitie van een toy-model. Dat toy-model bestaat uit twee bouwstenen: een vouw en een draai. Zijn eigenschappen zoals verschillende types bifurcaties en chaotisch gedrag van het toy-model terug te vinden in twee bekende afbeeldingen? Zie Figuur 1. Deze grafiek van de iteraties van $P(x,y) = (ax(1-x-y), bxy)$ voor $a = b = 3,6$ was de inspiratiebron voor de vouw-en-draaiafbeelding $F(x,y) = (f(x)\cos(\phi) - y\sin(\phi), f(x)\sin(\phi) + y\cos(\phi))$ met $f(x) = \frac{1}{4}(\mu - 2) - \mu x^2$.



Figuur 1

Hoewel de grafiek er spannend uit ziet—we spreken al snel van chaos—zijn de parameterwaarden van P en F waarvoor periodieke banen optreden zeker zo interessant. Zie Figuur 2. In deze figuur zien we voor F de basins: de gebieden van punten die door een bepaald periodiek punt worden aangetrokken. Hier voor periode-6. We introduceren twee krommen waarvan de ene uit punten bestaat die na zes iteraties in verticale richting worden afgebeeld en de andere waarbij de punten in horizontale richting worden afgebeeld. De snijpunten van beide krommen zijn punten van periode-6. Op de separatrices, de grenzen tussen de gekleurde gebieden, vinden we ook een baan van peri-

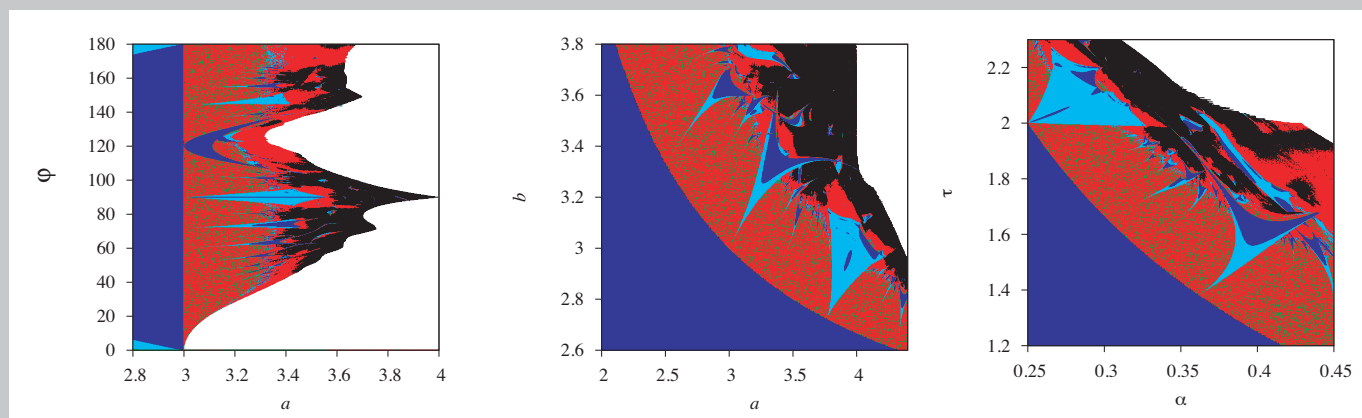


Figuur 2

ode-6. Dit fenomeen van een tweede baan op separatrices doet zich ook voor bij P en de discrete Lorenz-63-afbeelding. Overigens een techniek die ook voor iteraties in 3D toe te passen is.

Behalve de eigenschap van periodieke banen op de separatrices hebben de drie genoemde afbeeldingen meer eigenschappen gemeenschappelijk. Een ander voorbeeld van een gemeenschappelijke eigenschap van de drie afbeeldingen zien we in de drie grafieken in Figuur 3. Ze geven de Lyapunov-exponent weer voor de drie afbeeldingen. De verschillende voorbeelden van gemeenschappelijke eigenschappen leiden tot de claim dat de vouw-en-draaiafbeelding een goed toy-model is voor 2-1-afbeeldingen met een vouw en een draai.

Wat betreft de chaos (een mooie PR-naam): die kan voor de drie afbeeldingen worden aangetoond met de stelling van Marotto, de generalisatie van de stelling van Lie en Yorke: *Period three implies chaos*.



Figuur 3 De Lyapunov-exponenten voor v.l.n.r. F , P , en Lorenz-63. De kleuren refereren aan de aard van de dynamica voor de verschillende parameterwaarden.