Raf Bocklandt
Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
raf.bocklandt@gmail.com

Evenement Wolfprijs 2018

Een kleine suggestie met grote gevolgen

Sinds 1978 reikt de Wolf Foundation, een non-profitorganisatie opgericht door de Duits-Joods-Cubaanse uitvinder Ricardo Wolf, jaarlijks een aantal prijzen uit voor wetenschappelijke en artistieke verdiensten. Een ervan is de Wolf Prize for Mathematics en die bekroont meestal twee belangrijke wiskundigen. In 2018 werd de prijs uitgereikt aan Vladimir Drinfeld en Alexander Beilinson van de Universiteit van Chicago. In dit artikel beschrijft Raf Bocklandt de ideeën die achter hun werk liggen.

Qua prestige in de wiskundewereld moet de Wolfprijs enkel de Fieldsmedailles en de Abelprijs laten voorgaan. In het algemeen staat het werk van de twee prijswinnaars los van elkaar en het is niet ongewoon om twee wiskundigen uit totaal verschillende vakgebieden te huldigen, maar bij de afgelopen editie was dit anders. In 2018 bekroonde de organisatie Vladimir Drinfeld en Alexander Beilinson [1], een paar onderzoekers die niet alleen allebei werken aan soortgelijke problemen, maar ook reeds lang vrienden zijn en sinds 1999 zelfs collega's aan de Universiteit van Chicago, een topuniversiteit met een heel sterk wiskundedepartement dat maar liefst zes Fieldsmedaillewinnaars in zijn rangen telt.

Twee wiskundige broers

Drinfeld en Beilinson startten hun wiskundige carrière in de jaren zeventig onder Yuri Manin in Moskou. Drinfeld maakte op reeds jonge leeftijd (amper 20 jaar) furore met zijn bewijs van het klassieke Langlands-vermoeden voor GL_2 over $\mathbb{F}_q(X)$, maar kon wegens zijn Joods-Oekraïense achtergrond geen vaste baan krijgen in Moskou en werd uiteindelijk professor aan de Universiteit van Charkov. In de jaren tachtig revolutionalizeerde hij de theorie van Kwantumgroepen, een tour-de-force waarvoor hij samen met zijn werk aan het Langlands-vermoeden in 1990 de Fieldsmedaille kreeg.

Beilinson is Drinfelds drie jaar jongere wiskundige broer en bestudeerde in zijn beginjaren afgeleide categorieën van algebraïsche variëteiten. Hij toonde aan hoe deze soms beschreven konden worden aan de hand van lineaire algebra. In de jaren tachtig werd hij bekend voor zijn bewijs van de Kazhdan–Lusztig-vermoedens en de methoden die hij samen met Joseph Bernstein daarvoor ontwikkelde, bleken heel belangrijk in de representatietheorie. Daarnaast werkte hij ook aan algebraïsche K-theorie, L-functies, en nog veel meer.

Omdat ze allebei een breed spectrum van de wiskunde beheersen met heel wat onderlinge overlappingen, is het niet verwonderlijk dat hun gemeenschappelijke interesses resulteerden in een vruchtbare samenwerking van meer dan dertig jaar. De rode draad die door deze samenwerking loopt, staat bekend als de geometrische Langlands-correspondentie en is een versie van het Langlands-programma die de getaltheorie omruilt voor algebraïsche meetkunde. In de jaren negentig ontwikkelden Beilinson en Drinfeld samen een nieuwe formulering voor deze spin-off, die een grote invloed heeft op het hedendaagse wis- en natuurkundelandschap.

Niettegenstaande de onmiskenbare wiskundige genialiteit van dit duo, verliep de aanvangsfase van dit project moeizamer dan gedacht en uiteindelijk was er een kleine inbreng van buitenaf nodig om alles tot een goed einde te brengen. Hieronder schetsen we kort de ideeën die achter het werk van Beilinson en Drinfeld liggen en hoe een kleine opmerking van een natuurkundige uiteindelijk leidde tot de grote doorbraak.

Een vertalingsoefening

Het basisidee van het klassieke Langlands-programma is dat er een correspondentie bestaat tussen twee verschillende soorten objecten: aan de ene kant representaties van Galoisgroepen van getallenlichamen [1] en aan de andere kant automorfe functies. Deze laatste zijn te zien als functies op ringen van adèles [2] met mooie transformatie-eigenschappen.

De connectie tussen de aanpak van Drinfeld en Beilinson en het klassieke Langlands-programma [4] start met een opmerkelijke analogie tussen getallenlichamen en functielichamen van krommen, die ons in staat stelt de belangrijkste begrippen uit de het Langlands-programma te vertalen naar de meetkunde [5]. Deze pittige vertalingsoefening is samen te vatten in twee slogans en één vermoeden.

Galoisrepresentaties zijn lokale systemen

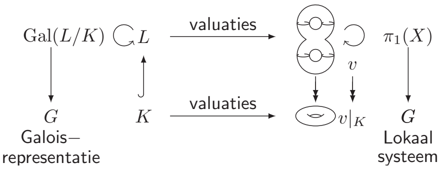
Net zoals je de priemgetallen uit $\mathbb{Q}$ kan extraheren door te gaan kijken naar valuaties, zijn de valuaties [3] over een functie-

Foto: Jean Lachat/University of Chicago

Alexander Beilinson en Vladimir Drinfeld

lichaam van een complexe projectieve gladde krommen te identificeren met de punten van die kromme.

Elke valuatie over een lichaamsuitbreiding kan je beperken tot het grondlichaam en op die manier geeft een lichaamsuitbreiding een overdekkingsafbeelding tussen twee krommen. De Galoisgroep van de lichaamsuitbreiding wordt dan de groep van automorfismen van deze overdekking.[4] Vanuit meetkundig opzicht doet de fundamentaalgroep net hetzelfde: het is de automorfismegroep van de universele overdekking en levert dus overdekkingsautomorfismes voor alle overdekkingen. Dit geeft een morfisme $\pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(L/K)$ en door samenstelling kan je dus een G-representatie $\rho : \mathrm{Gal}(L/K) \to G$ van een Galoisgroep meetkundig interpreteren als een G-representatie van de fundamentaalgroep van de kromme. Dit laatste concept wordt ook wel per definitie een lokaal G-systeem genoemd. Zie Figuur 1.



Figuur 1

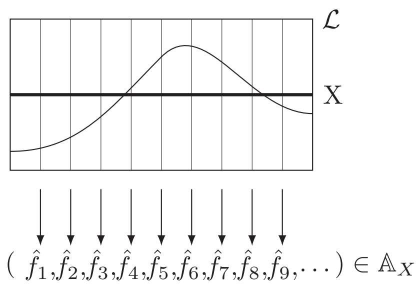
Automorfe functies zijn schoven op moduliruimten van bundels

Het tweede ingrediënt in het Langlands-programma is de adèle-ring. Hier kunnen we ook wat meetkundige intuïtie inbrengen. Als p een punt is op een gladde projectieve kromme X en $f : X \to \mathbb{C}$ een meromorfe functie, dan kunnen we f ontwikkelen als een Laurentreeks in p. Dit geeft een inbedding van $\mathbb{C}(X)$ in de ring van Laurentreeksen $\mathbb{C}((t))$, analoog aan de inbedding van $\mathbb{Q}$ in de ring van p-adische getallen. Net zoals de adèle-ring over $\mathbb{Q}$ de p-adische getallen voor alle p verzamelt[5], kunnen we de ring $\mathbb{A}_X$ definiëren als een productring van machtreeksen voor elk punt in X. Elke meromorfe functie op X kan gezien worden als een adèle door in alle punten zijn Laurentreeks te bepalen. Die adèle is inverteerbaar omdat elke meromorfe functie een meromorf invers heeft, maar niet elk inverteerbaar element uit de adèle-ring komt van een functie op X. Om die andere adèles te construeren moeten we kijken naar complexelijnenbundels.

Een reële functie op een cirkel kan je zien als een grafiek op een cylinder, maar je kan ook een grafiek tekenen op een Möbiusband. Wiskundig noemt men zo een grafiek een sectie van een lijnenbundel. In de algebraïsche meetkunde kan je iets soortgelijks doen: net zoals je op een cirkel kopieën van $\mathbb{R}$ kan bundelen tot een cylinder of een Möbiusband, kan je op een complexe kromme kopieën van $\mathbb{C}$ bundelen tot verschillende lijnbundels en daarop grafieken beschouwen: meromorfe secties.

Voor elke meromorfe sectie kan je in elk punt een Laurentreeks construeren en dus een element in $\mathbb{A}_X^\times$. Natuurlijk hangt de adèle af van de lijnenbundel en de specifieke sectie, maar het is mogelijk om een equivalentierelatie te definiëren op $\mathbb{A}_X^\times$ zodanig dat adèles equivalent zijn als ze komen van dezelfde lijnenbundel. Zie Figuur 2.

Op die manier is $\mathbb{A}_K^\times/\sim$ te bezien als de verzameling van alle lijnenbundels op de kromme. Bovendien zorgen de mooie transformatie-eigenschappen van automor-



Figuur 2

fe functies er precies voor dat ze equivalente adèles op hetzelfde afbeelden. Een automorfe functie moet dus gezien worden als een functie op de ruimte van lijnenbundels op een kromme. Dit is echter het eendimensionale geval; meer algemeen kan je ook kijken naar vectorbundels of G-bundels op een kromme, waarbij G een Liegroep is. In elk van deze gevallen wil je een ruimte $\mathrm{Bun}_G(X)$ maken die al deze bundels beschrijft.

Helaas is dit nog net iets te eenvoudig. Niet alle dingen die functies lijken, zijn ook echt functies. Neem bijvoorbeeld de argumentsfunctie. Die wijst aan elk punt op de eenheidscirkel een hoek toe, maar die hoek is niet eenduidig bepaald want je kan er 2π bij optellen. De argumentsfunctie is dus een 'meerwaardige functie' en wiskundigen beschrijven deze objecten door middel van een nieuw abstract begrip: schoven.[6] Automorfe functies moeten daarom gezien worden als een bepaald soort schoven op een ruimte van bundels.

Het meetkundig Langlands-vermoeden

Naast deze twee slogans is er ook nog een derde ingrediënt en dat is het concept Langlands-dualiteit. Dit is een dualiteit op de verzameling van reductieve algebraïsche groepen die de rol van karakters en cokarakters omwisselt. Dit wil zeggen dat als G en $G^\vee$ duale groepen zijn dan is er een bijectie tussen de groepsmorfismen $\rho: G \to \mathbb{C}^*$ (de karakters van G) en de groepsmorfismen $\rho^\vee: \mathbb{C}^* \to G^\vee$ (de cokarakters van $G^\vee$).

Nu hebben we alle elementen voor handen om het meetkundige Langlands-vermoeden te schetsen. Dit stelt dat je met elk $G^\vee$-lokaal systeem op X een schoof kan associëren op $\mathrm{Bun}_G(X)$ met mooie eigenschappen. Deze schoof wordt ook wel een Hecke-eigenschoof genoemd, maar het vermoeden specificeert helaas niet hoe je deze schoof moet construeren.

Een beetje hulp van buitenaf

In het begin van de jaren negentig waren Beilinson en Drinfeld naarstig op zoek naar een goede manier om Hecke-eigenschoven te maken door gebruik te maken van technieken uit de theoretische natuurkunde. Ze hadden al heel wat voortgang geboekt maar niet alles paste in elkaar zoals het zou moeten.

Toen ze hun ideeën uitlegden aan Edward Witten, de goeroe van de supersnaartheorie en de enige natuurkundige die ooit de Fieldsmedaille won, was die danig in de war. Beilinson en Drinfeld leken de methoden uit zijn vakgebied te gebruiken op een rare manier. Dat voelde zeer onnatuurlijk aan, maar het deed hem wel denken aan iets waar hij al eerder van had gehoord. In de jaren tachtig had de Engelse wiskundige Nigel Hitchin ontdekt dat je de ruimte $\mathrm{Bun}_G(X)$ kon bestuderen met technieken uit de mechanica, alsof het een dynamisch systeem betreft. Witten opperde dat dit wel eens het ontbrekende puzzelstukje kon zijn.

Omdat ze er zelf niet vertrouwd mee waren besloten Beilinson en Drinfeld Hitchins werk eens onder de loep te nemen en wonder boven wonder bleek Wittens suggestie te werken. Via Hitchins integreerbare systeem konden ze een compleet nieuwe formulering geven van de Langlands-correspondentie. Hun basisidee was om Hitchins integreerbare systeem te kwantiseren. Op die manier kregen ze een ring van functies op een ruimte van $G^\vee$-lokale systemen op X. Met elk zulk lokaal systeem komt dus een maximaal ideaal in die ring overeen en dat kan je gebruiken om een schoof te definiëren op $\mathrm{Bun}_G(X)$. Die schoof is precies de Hecke-eigenschoof uit het Langlands-programma. Beilinson en Drinfeld schreven de details neer in een preprint [2] die ze echter nooit publiceerden maar steeds verder bijwerkten. Momenteel telt het zo'n 385 pagina's en de geniale ideeën erin legden de basis voor vele vruchtbare samenwerkingsverbanden tussen getaltheoretici, meetkundigen en theoretische fysici.

Merkwaardig genoeg staat er aan het begin van deze preprint ook een kleine paragraaf waarin wordt opgemerkt dat Witten de basisideeën uit hun artikel ook al onafhankelijk van hen gevonden had, maar er niks over heeft gepubliceerd. In een recent interview [3] vertelde de immer bescheiden Witten dat dit veel te veel eer was. In feite begreep hij er zelf niet veel van en had hij enkel Hitchins werk aan hen gesuggereerd omdat hij een vaag vermoeden had dat dit wel eens relevant zou kunnen zijn. Maar zelfs in de vaagste vermoedens zitten vaak heel diepe verbanden verborgen.

Noten

1. Als L/K een lichaamsuitbreiding is, dan is de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(L/K)$ de groep van alle automorfismen van L die K elementsgewijs vasthouden. Een Galoisrepresentatie is een groepsmorfisme $\rho: \mathrm{Gal}(L/K) \to G$ van de Galoisgroep naar een andere groep, bijvoorbeeld $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Als K een lichaam is dan is de adèle-ring een soort product van alle mogelijke completies van *K*.
3. Een valuatie over een lichaam K is een groepsmorfisme $v: K^\times \to \mathbb{Z}$ waarvoor $v(a+b) \geq \min(v(a), v(b))$. voor elk priemgetal $p \in \mathbb{Z}$ is er een valuatie $v_p: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ die de macht van p in een breuk weergeeft, bijvoorbeeld $v_2(100) = 2$. Als K een functielichaam is van een kromme dan heb je voor elk punt een valuatie die aan elke functie de laagste orde van de Laurent-expansie in dat punt toewijst.
4. Een automorfisme van een overdekking $\pi: Y \to X$ is een afbeelding $\phi: Y \to Y$ zodanig dat $\pi\phi = \pi$.
5. $\mathbb{Q}$ heeft nog een extra completie die niet van een valuatie komt, namelijk $\mathbb{R}$. Die zit ook in de adèles, voor een functielichaam bestaat deze extra completie niet.
6. Een schoof $\mathcal{S}$ op een topologische ruimte X wijst aan iedere open verzameling U een verzameling lokale secties $\mathcal{S}(U)$ toe. De argumentsfunctie op een cirkel bestaat lokaal uit meerdere 'takken' die elk 2π verschillen. De corresponderende schoof wijst aan elk open deel U de verzameling van al die takken toe.

Referenties

1. Elaine Kehoe, Beilinson en Drinfeld Awarded 2018 Wolf Prize in Mathematics, *Notices AMS* 65(6) (2018), 697–698
2. Alexander Beilinson en Vladimir Drinfeld, Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves (ca. 1995), zie http://math.uchicago.edu/~mitya/langlands.html.
3. Hirosi Ooguri, Interview with Edward Witten, *Notices of the AMS* 62(5) (2015).
4. Stephen Gelbart, An elementary introduction to the Langlands program, *Bulletin of the American Mathematical Society* 10(2) (1984), 177–219.
5. Edward Frenkel, Lectures on the Langlands program and conformal field theory, *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II*, Springer, 2007. 387–533.