Roelof Bruggeman
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
r.w.bruggeman@uu.nl

In Memoriam Frederik van der Blij (1923–2018)

Wetenschappelijk werk

Op 27 januari 2018 is Frederik van der Blij overleden, emeritus hoogleraar wiskunde van de Universiteit Utrecht en erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Hij werd 94 jaar. Vier vrienden en oud-collega's blikken terug op zijn leven en werk. In dit vierde deel belicht Roelof Bruggeman, in 1972 gepromoveerd bij Van der Blij, zijn wetenschappelijke werk.

Het belangrijkste thema in het werk van Van der Blij zijn kwadratische vormen. Zijn proefschrift bij Kloosterman [1] gaat over thetafuncties. Dat zijn varianten van voortbrengende functies van aantallen van manieren om een getal door een gegeven kwadratische vorm voor te stellen. Het laatste artikel op MathSciNet, met Bram van Asch, gaat over productvoorstellingen van een ander type voortbrengende functies bij dezelfde grootheid.

Kwadratische vormen

Een eenvoudig voorbeeld van kwadratische vormen is $S_n(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, waarbij de vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gehele coördinaten heeft. De waarden van S_n zijn geheel, en voor deze kwadratische vormen 0 of positief.

De *voorstellingsaantallen* $A_n(k)$ zijn het aantal manieren om gehele $k \geq 0$ als $k = S_n(x)$ te schrijven. Het gedrag van $A_n(k)$ voor $k \to \infty$ kan op verschillende manieren onderzocht worden. Eén manier is de voortbrengende functie

$$F_n(q) = \sum_{k \geq 0} A_n(k)\, q^k = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} q^{S_n(x)}.$$

In principe kun je deze voortbrengende functie bestuderen met q als een formele variabele. In dit geval is het interessant q als complex getal te zien met $|q| < 1$. Dan convergeert de reeks absoluut, en levert een functie op de eenheidsschijf in $\mathbb{C}$. Schrijf $q = e^{\pi i z}$, dan is $f_n(z) = F_n(e^{\pi i z})$ een complex differentieerbare functie op het *bovenhalfvlak* $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Zulke functies komend van kwadratische vormen noemt men *thetafuncties*.

De functie f_n voldoet aan de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} f_n(z+2) &= f_n(z), \\ f_n(-1/z) &= (-iz)^{n/2} f_n(z). \end{aligned}$$

Functies met dit (of een soortgelijk) transformatiegedrag noemt men *modulaire vormen*. Ruimten van modulaire vormen met een voorgeschreven transformatiegedrag hebben eindige dimensie, vaak met een bekende basis. Dat levert informatie op over f_n, en over de voorstellingsaantallen $A_n(k)$.

Toen ik in 1968 als promovendus begon bij Van der Blij en Mars, kreeg ik een stapeltje overdrukken, en ook een exemplaar van het proefschrift [1]. Dit proefschrift sluit aan op werk [8] van promotor H.D. Kloosterman. Het bestudeert thetafuncties bij kwadratische vormen waarbij de gehele vector $x \in \mathbb{Z}^n$ vervangen is door een rechthoekige gehele matrix. Dan wordt z vervangen door een symmetrische complexe matrix, met positief definiet imaginair deel. Op deze manier krijgt men modulaire vormen op het Siegel-bovenhalfvlak, een generalisatie van het hierboven genoemde complexe bovenhalfvlak.

De kwadratische vorm E_8

Een heel bijzondere kwadratische vorm is E_8, een kwadratische vorm in 8 variabelen, die in verschillende gebieden van de wiskunde opduikt, één daarvan vormt de studie van de octaven.

Gedeeltelijk samen met Springer heeft Van der Blij verschillende artikelen geschreven over ringen in octaven [2,3,4,5]. De octaven $\mathbb{O}$ (tegenwoordig in het Engels vaak *octonions* genoemd) passen in het rijtje

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$$

van reële getallen, complexe getallen, quaternionen en octaven. Het zijn lineaire ruimten over $\mathbb{R}$ met dimensies 1, 2, 4 en 8, waarin je kunt optellen en vermenigvuldigen, en waarin elementen ongelijk aan 0 een inverse hebben voor de vermenigvuldiging. In elke uitbreidingsstap raakt men iets van de gewone rekenregels kwijt. In de uitbreiding $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ de ordening; in $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ de commutativiteit, $ab = ba$; in $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}$ de associativiteit, $a(bc) = (ab)c$. Net zoals $\mathbb{Z}$ een deelring van $\mathbb{R}$ is, zijn er deelringen van gehelen in de grotere delingsalgebra's. In $\mathbb{O}$ is deze deelring in essentie uniek. Van der Blij en Springer bestuderen deze deelring in [3]. De natuurlijke kwadratische vorm op deze deelring is één van de verschijningsvormen van E_8.

Eulerproducten

In zijn laatste wetenschappelijk publicatie [7] bekijken Van Asch en Van der Blij andere voortbrengende functies met voorstellingsaantallen van kwadratische vormen, namelijk de Dirichletreeks

$$\sum_{m\geq 1}\frac{A_m(tm^2)}{m^s}$$

voor een vast geheel getal t zonder kwadraten in zijn priemontwikkeling.

Dirichletreeksen zijn bekend van de zeta-functie van Riemann,

$$\zeta(s)=\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^s},$$

absoluut convergent voor $\operatorname{Re}s>1$. Deze Dirichletreeks heeft een Eulerproduct:

$$\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}},$$

waarin p de priemgetallen doorloopt. Van Asch en Van der Blij geven in [7] expliciet de factoren in het soortgelijke product van $\sum_{m\geq 1}\frac{A_m(tm^2)}{m^s}$.

Reguliere veelhoeken

In [6] beschouwt Van der Blij de dimensie van reguliere veelhoeken. Dat was eerder bekeken, maar [6] is in mijn ogen karakteristiek voor zijn brede belangstelling.

Als je met drie rietjes van gelijke lengte en wat draad een regelmatige driehoek maakt krijg je een star voorwerp, gelegen in een vlak. De vierhoek gevormd door vier rietjes van gelijke lengte is niet star, en kun je tot een driedimensionaal object vervormen. De vierhoek wordt star en tweedimensionaal als je voor de diagonalen van de vierhoek ook rietjes gebruikt, met een lengte die $\sqrt{2}$ zo groot is als de lengte van de zijden. (Laten we ervan af zien dat die diagonale rietjes elkaar in de weg zitten.) Maar je zou ook zes rietjes van gelijke lengte kunnen gebruiken; dan krijg je een regelmatig viervlak, dat driedimensionaal is.

Fred van der Blij tijdens het geven van college

Foto: uit het archief van de familie Van der Blij

Dit kun je generaliseren tot n punten $P_1,\ldots,P_n$ in een ruimte met dimensie minstens n, waarbij de afstanden tussen P_i en P_{i+1} alle gelijk zijn, zeg $\sqrt{D_1}$ (indices modulo n bekeken), de afstanden tussen P_i en P_{i+2} alle gelijk zijn aan $\sqrt{D_2}$, evenzo voor P_i en P_{i+3}, enzovoorts, tot de afstanden tussen P_i and P_{i+k} met $k\leq n/2$. Denkbare vragen: Welke keuzen van de D_j zijn mogelijk? Zo ja, in welke dimensie past de zo ontstane reguliere veelhoek? Zie [6] voor antwoorden.

Referenties

1 F. van der Blij, *Theta Functions of Degree m*, Proefschift, Leiden, 1947.

2 F. van der Blij en T.A. Springer, The arithmetic of octaves and of the group G_2, *Indag. Math.* XXI (1959), 406–418.

3 F. van der Blij en T.A. Springer, Octaves and triality, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/8 (1960), 158–169.

4 F. van der Blij, History of the octaves, *Simon Stevin* 34(III) (1961), 106–125.

5 F. van der Blij, Units of octaves, *Indag. Math.* XXVIII (1966), 126–130.

6 F. van der Blij, Regular polygons in Euclidean space, *Lin. Algebra and its Applications* 226–228 (1995), 345–352.

7 B. van Asch en F. van der Blij, Integral quadratic forms and Dirichlet series, *Ramanujan J.* 22(1) (2010), 1–10.

8 H.D. Kloosterman, The behaviour of general theta functions under the modular group and the characters of binary modular congruence groups, *Ann. of Math.* 47 (1946), I: 317–375; II: 376–447.