Han Peters
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
h.peters@uva.nl

Geschiedenis

De stelling van Denjoy en Wolff

Elders in dit nummer vindt u een biografie van Julius Wolff (1882–1945) van de hand van Jan van Maanen. In 1926 bewees Wolff samen met Arnaud Denjoy een stelling over holomorfe afbeeldingen die nog steeds actueel is. Han Peters gaat in dit artikel verder in op deze stelling van Denjoy en Wolff.

In het begin van de twintigste eeuw ontstond er veel interesse in complexe dynamische systemen, met name in Frankrijk. In dit vakgebied bestudeert men het asymptotische gedrag van banen

$$z, f(z), f^2(z), \dots$$

van holomorfe afbeeldingen $f : X \to X$. Hier is X een (deelverzameling van) $\mathbb{C}$, een Riemannoppervlak, of nog algemener, een complexe variëteit. Door belangrijke bijdragen van onder anderen de Franse wiskundigen Montel, Julia en Fatou werd het vakgebied op de kaart gezet en werden vele eigenschappen van deze systemen blootgelegd. Onder andere bestudeerde men eigenschappen van lokaalholomorfe functies f rond een vast punt $z = f(z)$, en de iteratie van polynomen in het complexe vlak; zie Figuur 1 voor een illustratie van een zogenaamde Juliaverzameling. In beide richtingen werden veel belangrijke doorbraken geboekt, al bleven ook veel fundamentele vragen liggen tot het vakgebied ongeveer een halve eeuw later opnieuw opbloeide. In Nederland werd gewerkt aan dynamica op de schijf, het geval waarin de ruimte X gelijk is aan de eenheidsschijf $\mathbb{D}$. Een belangrijke rol is hier weggelegd voor het Lemma van Schwarz:

Lemma van Schwarz. *Zij $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ een holomorfe functie met $f(0) = 0$. Dan volgt voor alle $z \in \mathbb{D}$ dat*

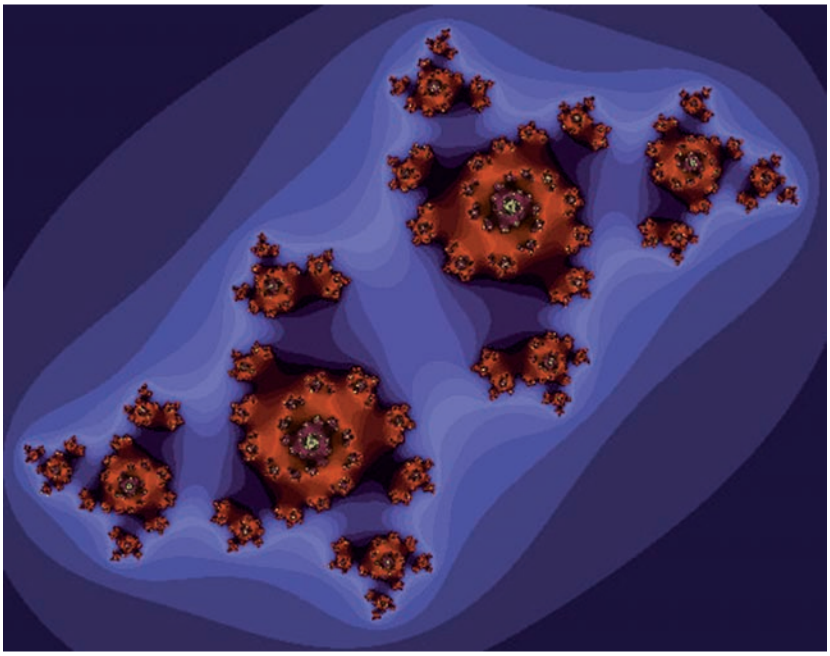
$$|f(z)| \leq |z|,$$

met gelijkheid dan en slechts dan als f een rotatie is: dus als $f : z \mapsto e^{i\theta} z$.

Stel nu dat we een automorfisme van de schijf hebben, dat wil zeggen een bijectieve holomorfe afbeelding $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Als $f(0) = 0$ dan volgt uit het Lemma van Schwarz dat f een rotatie is, want het lemma gaat op voor zowel f als f^{-1}. Als $f(0) = a \neq 0$ dan bekijken we de afbeelding $g = \psi_a \circ f$, waar

$$\psi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Men controleert eenvoudig dat ψ_a een automorfisme van de schijf is, en dus g ook,



Figuur 1 De Juliaverzameling van $z \mapsto z^2 - 0{,}3 + 0{,}7i$.

met $g(0)=0$. Zoals net gezien is g een rotatie, en er volgt dat alle automorfismen van de eenheidsschijf de vorm

$$\varphi : z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

hebben, waar θ reëel is en $a \in \mathbb{D}$. Merk op dat deze automorfismen, voorbeelden zijn *Möbiustransformaties*, gedefinieerd zijn op de hele Riemannsfeer $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Voor $a=0$ krijgen we precies de rotaties met vaste punten in 0 en oneindig. In alle andere gevallen voldoen de vaste punten van φ aan de tweedegraadsvergelijking

$$e^{i\theta}(p-a) = p\cdot(1-\bar{a}p),$$

en dus aan

$$p^2 + \frac{(e^{i\theta}-1)}{\bar{a}}p - \frac{ae^{i\theta}}{\bar{a}} = 0.$$

Er volgt dat het product van de twee vaste punten gelijk moet zijn aan $-ae^{i\theta}/\bar{a}$, wat norm 1 heeft. Er zijn dus drie mogelijkheden: (1) één van de vaste punten ligt binnen, en het andere ligt buiten de eenheidscirkel, (2) beide vaste punten liggen op de eenheidscirkel, of (3) er is een dubbel vast punt, noodzakelijk ook op de eenheidscirkel.

Het feit dat de cirkel op de cirkel wordt afgebeeld legt sterke restricties op de afgeleiden van φ in de vaste punten. In geval (1) kunnen we conjugeren met ψ_p, waardoor het vaste punt in de oorsprong komt te liggen. Uit het Lemma van Schwarz volgt dat $\psi_p \circ \varphi \circ \psi_p^{-1}$ een rotatie is. We zeggen dat φ *conjugent* is aan een rotatie.

In geval (2) is het ene punt aantrekkend ($|\varphi'(z)|<1$) en het andere afstotend ($|\varphi'(z)|>1$). In dit geval is de afbeelding conjugent aan de functie $z \mapsto c\cdot z$, voor $|c|<1$. Merk op dat 0 nu het aantrekkende vaste punt is, en oneindig het afstotende. Op het afstotende vaste punt na convergeren alle banen naar het aantrekkende punt.

In het laatste geval (3) is de afgeleide in het vaste punt noodzakelijk gelijk aan 1; het punt heet *parabolisch*. In dit geval is de afbeelding conjugent aan de functie $z \mapsto z+1$, waarvan alle banen naar het parabolische vaste punt oneindig convergeren.

Het gedrag van afbeeldingen $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ die niet bijectief zijn werd beschreven door Wolff en Denjoy, die onafhankelijk van elkaar de oplossing publiceerden in 1926 [4,7]. Het leverde de volgende stelling op:

Stelling van Denjoy en Wolff. *Zij $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ holomorf. Óf f is conjugent aan een rotatie, óf alle banen convergeren naar een uniek punt $\hat{z} \in \bar{\mathbb{D}}$.*

De stelling wordt in alle klassieke leerboeken over dit onderwerp behandeld, bijvoorbeeld in [1,3,6]. We volgen het boek van Milnor. Het voornaamste ingrediënt in het bewijs is de *Poincarémetriek* op de schijf. Een *conforme metriek* is een infinitesimale metriek $\varphi(z)\,|\,dz\,|$, voor een gladde functie $\varphi:\mathbb{D}\to[0,+\infty)$. Zo'n metriek induceert een afstandsbegrip door voor elke gladde kromme $\gamma:[a,b]\to\mathbb{D}$ een lengte

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\varphi(\gamma(t))\,dt$$

te definiëren. De afstand $d_\varphi(z,w)$ is de minimale lengte van een kromme van a naar b.

Gebruikmakend van de afgeleide van de functies ψ_a kan men bewijzen dat er, tot op een multiplicatieve constante, een unieke functie φ is waarvoor de afstand $d_\varphi(\cdot,\cdot)$ invariant is onder holomorfe automorfismen, dat wil zeggen $d_\varphi(f(z),f(w)) = d_\varphi(z,w)$. We schrijven $d_{\mathbb{D}}(\cdot,\cdot)$ voor deze afstand, de *Poincaréafstand*. De precieze vorm van de functie φ, die alleen van de norm $|z|$ afhangt, is voor ons niet van belang; het bewijs gebruikt alleen de volgende eigenschappen:

1. De ruimte $(\mathbb{D},d_{\mathbb{D}})$ is compleet, dat wil zeggen: iedere Cauchyrij is convergent. Bovendien: $\varphi(z)\to\infty$ als $|z|\to 1$.
2. Afstanden worden behouden onder automorfismen van de schijf. Voor alle andere holomorfe functies van $\mathbb{D}$ naar $\mathbb{D}$ geldt dat ze afstanden strikt verkleinen.
3. Schijven $B_r(z) = \{w : d_{\mathbb{D}}(z,w) < r\}$ zijn precies euclidische schijven (maar voor $z \neq 0$ is z niet het euclidische middelpunt).

Eigenschap 1 kan eenvoudig berekend worden uit de formules van automorfismen van $\mathbb{D}$. Eigenschap 2 volgt uit het Lemma van Schwarz, en eigenschap 3 uit het feit dat cirkels (plus lijnen) door Möbiustransformaties op cirkels (plus lijnen) worden afgebeeld.

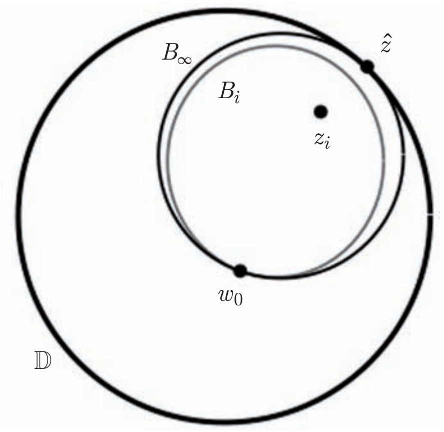
Bewijs van de stelling. Voor automorfismen van de schijf hebben we het gedrag reeds bepaald. We mogen daarom aannemen dat f geen automorfisme is, en Poincaré afstanden dus strikt verkleint. We bekijken de afbeeldingen $f_\epsilon = (1-\epsilon)\cdot f$. Vanwege de vastepuntstelling van Brouwer, toegepast op een iets kleinere gesloten schijf, volgt dat iedere f_ϵ een uniek vast punt heeft. Wegens compactheid van $\bar{\mathbb{D}}$ kunnen we een rij ϵ_i kiezen waarvoor deze vaste punten z_i convergeren, zeg naar $\hat{z} \in \bar{\mathbb{D}}$.

Als $\hat{z} \in \mathbb{D}$ dan volgt onmiddellijk dat dit een vast punt van f is. Omdat f afstanden strikt verkleint moeten alle banen naar dit vaste punt convergeren, en zijn we klaar. We mogen dus aannemen dat $\hat{z} \in \partial\mathbb{D}$, in welk geval f geen vast punt kan hebben. We beweren dat hieruit volgt dat alle banen van f naar de rand convergeren. Het bewijs van deze bewering is het lastigste deel van het bewijs, en indien gewenst kan de lezer de komende twee alinea's overgeslaan zonder later in de problemen te komen.

Stel dat niet alle banen naar de rand convergeren. Dan zijn er een punt $z \in \mathbb{D}$, en een stijgende rij natuurlijke getallen (n_j) waarvoor $f^{n_j}(z)$ bevat is in een compacte deelverzameling van $\mathbb{D}$. Door indien nodig een geschikte deelrij te kiezen mogen we aannemen dat $f^{n_j}(z) \to p \in \mathbb{D}$. Door eventueel opnieuw een deelrij te nemen mogen we aannemen dat $n_{j+1}-n_j \to \infty$. We definiëren $g_j = f^{n_{j+1}-n_j}$, en merken op dat $g_j(f^{n_j}(z)) = f^{n_{j+1}}(z)$. Aangezien de functies g_j Poincaréafstanden verkleinen en zowel $f^{n_j}(z)$ als $f^{n_{j+1}}(z)$ naar p convergeren volgt dat $g_j(p) \to p$.

Hieruit volgt dat de rij g_j bevat is in een compacte deelverzameling van $\mathcal{O}(\mathbb{D},\mathbb{D})$, de ruimte van holomorfe functies uitgerust met de topologie van uniforme convergentie op compacte deelverzamelingen van $\mathbb{D}$. Dit feit zullen we gebruiken zonder het te bewijzen. Er volgt dat we opnieuw een deelrij kunnen nemen zodat $g_j \to g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$. Omdat $g_j(p)\to p$ volgt dat $g(p)=p$. Maar omdat g een limiet is van de rij f^{m_j}, waar $m_j = n_{j+1}-n_j$, volgt dat g en f commuteren. Het volgt in het bijzonder dat $f(p)$ ook een vast punt is van g. Maar omdat f afstanden strikt kleiner maakt, geldt dat ook voor g, en dus kan g niet twee verschillende vaste punten hebben. Hieruit volgt dat $f(p)=p$, en we hebben een tegenspraak met de observatie dat f geen vast punt heeft. Dus inderdaad: alle banen van f convergeren naar de rand van $\mathbb{D}$.

Kies nu een willekeurig punt $w_0 \in \mathbb{D}$. We introduceren de stralen $r_i = d_{\mathbb{D}}(w_0,z_i)$ en de schijven $B_i = B_{r_i}(z_i)$. Volgens eigenschap 3 is B_i een euclidische schijf, relatief



Figuur 2 Een schijf B_i en de horoschijf B_∞, beide bevat in $\mathbb{D}$, met de gemarkeerde punten $\hat{z}$, z_i en w_0.

compact bevat in $\mathbb{D}$ wegens eigenschap 1, die het punt z_i bevat en waarvoor $w_0 \in \partial B_i$. Aangezien $z_i \to \hat{z}$ volgt dat de schijven B_i convergeren naar een schijf B_∞, noodzakelijk de unieke schijf bevat in $\mathbb{D}$ die raakt aan de rand van $\mathbb{D}$ in het punt $\hat{z}$ en waarvoor $w_0 \in \partial B_\infty$. Zo'n schijf rakend aan de rand van $\mathbb{D}$ wordt wel een *horoschijf* genoemd; zie Figuur 2.

Omdat z_i een vast punt van f_{ϵ_i} is, volgt dat f_{ϵ_i} de schijf B_i binnen zichzelf afbeeldt. Aangezien $f_{\epsilon_i} \to f$ en $B_i \to B_\infty$ volgt dat f de schijf B_∞ binnen zichzelf afbeeldt. Zoals eerder bewezen convergeren alle banen in $\mathbb{D}$ naar de rand $\partial\mathbb{D}$, dus het volgt dat banen in B_∞ naar het randpunt $\hat{z}$ convergeren, het enige punt in $\partial\mathbb{D}$ bevat in $\bar{B}_i$.

Omdat w_0 willekeurig gekozen was kan de schijf $B_\infty \subset \mathbb{D}$ willekeurig groot gemaakt worden, en volgt dat alle banen in $\mathbb{D}$ naar $\hat{z}$ convergeren. □

Opmerking. Volgens de beroemde afbeeldingsstelling van Riemann is elk enkelvoudig samenhangend gebied in $\mathbb{C}$ (ongelijk aan $\mathbb{C}$) biholomorf af te beelden op de schijf. Het is dus voor de hand liggend om te denken dat de Stelling van Denjoy en Wolff voor alle begrensde enkelvoudig samenhangende gebieden geldt. Dit is echter niet zo. Het is illustratief om na te gaan waar in het bewijs wordt gebruikt dat gewerkt wordt op een eerlijke ronde schijf.

Generalisaties in $\mathbb{R}^n$

De Poincaréafstand kan op verschillende alternatieve manieren gedefinieerd worden. Gegeven vier verschillende punten $a, x, y, b \in \mathbb{C}$ definiëren we het *kruisquotiënt* door

$$[a,x,y,b] := \frac{|a-y| \cdot |b-x|}{|a-x| \cdot |y-b|}.$$

Het is snel duidelijk dat $[a,x,y,b]$ gelijk blijft onder translaties $z \mapsto z+\alpha$, onder dilataties $z \mapsto r \cdot z$, en onder rotaties $z \mapsto e^{i\varphi}z$. Meetkundig minder intuïtief, maar eenvoudig te controleren met een berekening, is het feit dat het kruisquotiënt invariant is onder de inversie $z \mapsto \frac{1}{z}$. Het volgt dat het kruisquotiënt ook invariant is onder alle mogelijke composities van die vier afbeeldingen, en dus onder gebroken lineaire transformaties: afbeeldingen van de vorm

$$z \mapsto \frac{Az+B}{Cz+D},$$

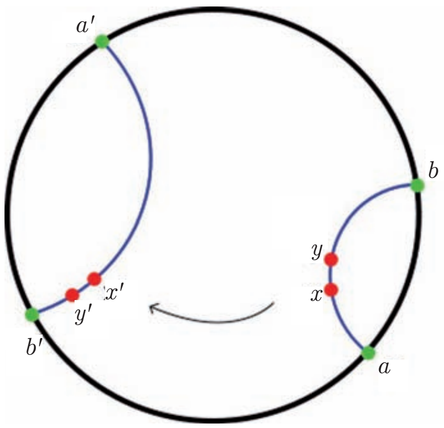
met $AD - BC \neq 0$.

Stel nu dat $x, y \in \mathbb{D}$, met $x \neq y$. De punten x, y liggen op een unieke cirkel die loodrecht op de eenheidscirkel staat, noem de snijpunten van deze cirkel a, b, zie Figuur 3. We definiëren

$$\rho(x,y) = \log[a,x,y,b].$$

Men controleert dat $\rho(\cdot,\cdot)$ voldoet aan de driehoeksongelijkheid, en dus een afstand definieert.

Zij f nu een automorfisme van $\mathbb{D}$. Zoals eerder besproken is f een gebroken lineaire transformatie, en beeldt de cirkel door de punten a, x, y, b dus af op een cirkel door de punten $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$ en $f(b)$. De punten $f(a)$ en $f(b)$ liggen nog steeds op de eenheidscirkel, omdat deze invariant is. Tot slot merken we op dat f een conforme afbeelding is, en dus tussen verschillende krommen behoudt. Het volgt dat de cirkel door $f(x)$ en $f(y)$ haaks de eenheidscirkel doorsnijdt in de punten $f(a)$ en $f(b)$. De afstand $\rho(\cdot,\cdot)$ is dus invariant onder automorfismen van $\mathbb{D}$, en daarom gelijk aan (een constante maal) de Poincaré-afstand.



Figuur 3 Het kruisquotiënt $[a,x,y,b]$ wordt behouden onder automorfismen.

Voor een begrensd convex domein $U \in \mathbb{R}^n$ kunnen we op vergelijkbare manier een metriek definiëren. Voor punten $x, y \in U$ nemen we nu de rechte lijn door x en y, en kiezen voor a, b de corresponderende snijpunten van deze lijn met de rand van U. Weer blijkt dat

$$\rho(x,y) = \log[a,x,y,b]$$

voldoet aan de driehoeksongelijkheid, en dus een metriek op U definieert: de *Hilbert-afstand*. In 1997 bewees Beardon [2] de volgende generalisatie van de Stelling van Denjoy en Wolff:

Stelling. *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ een begrensd en strikt convex domein, en zij $f: U \to U$ een contractie met betrekking tot de Hilbert-afstand. Dan convergeren alle banen van f naar een uniek punt $x \in \bar{U}$.*

In zekere zin is de Stelling van Denjoy en Wolff dus niet een stelling over holomorfe functies, maar een stelling over contracties. Zie [5] voor nog verdere veralgemeniseringen naar convexe maar niet noodzakelijk strikt convexe domeinen.

Referenties

1 A. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Graduate Texts in Mathematics, No. 132, Springer, 1991.

2 A.F. Beardon, The dynamics of contractions. *Ergodic Theory Dyn. Systems* 17 (1997), 1257–1266.

3 L. Carleson en T.W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer, 1993.

4 A. Denjoy, Sur l'itération des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci.* 182 (1926), 255–257.

5 B. Lemmens, B. Lins, R. Nussbaum en M. Wortel, Denjoy–Wolff theorems for Hilbert's and Thompson's metric spaces, *J. Anal. Math.* 134 (2018), 671–718.

6 J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Third edition, Annals of Mathematics Studies, No. 160, Princeton University Press, 2006.

7 J. Wolff, Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent a cette région, *C. R. Acad. Sci.* 182 (1926), 42–43.