

Jenneke Krüger

Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
j.h.j.kruger@uu.nl

Jan Guichelaar

Amsterdam
j.guichelaar4@gmail.com

Harm Jan Smid

Leiden
harmjansmid45@gmail.com

Evenement Fifth International Conference on the History of Mathematics Education (ICHME-5)

Verspreiding van wiskundige kennis

Geschiedenis van wiskundeonderwijs en geschiedenis van wiskunde zijn nauw verwante onderzoeksgebieden. In Nederland zijn gedurende de laatste twintig jaar een zestal proefschriften over aspecten van de geschiedenis van wiskundeonderwijs verschenen. Internationaal zijn verscheidene onderzoekers, ook docent-onderzoekers, met dit vakgebied bezig. De tweejaarlijkse 'International Conference on the History of Mathematics Education' (ICHME) biedt onderzoekers en geïnteresseerde amateurs een platform voor ontmoeting en uitwisseling. De vijfde ICHME was in september 2017 in Nederland. Jenneke Krüger, Jan Guichelaar en Harm Jan Smid doen verslag van de conferentie en lichten toe waarom en voor wie in het bijzonder geschiedenis van wiskundeonderwijs een belangrijk onderwerp is.

De eerste ICHME was in 2009 in Reykjavik, geïnitieerd en georganiseerd door Kristín Bjarnadóttir (University of Iceland), Fulvia Furinghetti (University of Genoa) en Gert Schubring (Universidade Federal do Rio de Janeiro). Sindsdien is elke twee jaar een conferentie geweest, in achtereenvolgens Lissabon, Uppsala, Turijn en Utrecht. Van elke conferentie is een aantal bijdragen uitgegeven in *Proceedings* (peer-reviewed), met de titel 'Dig where you stand'. Het initiatief om de vijfde conferentie in Nederland te houden kwam van Harm Jan Smid, bestuurslid van de (voormalige) Werkgroep Geschiedenis van Reken- en Wiskundeonderwijs van de NVvW.

ICHME-5 vond dus plaats in Utrecht, van 19–22 september 2017. In een passende

omgeving, het fraaie historische Academiegebouw in het centrum van Utrecht, presenteerden sprekers uit achttien verschillende landen resultaten van hun onderzoek aan een even internationaal publiek. De stemming was geanimeerd en in de pauzes en aan het eind van elke dag gingen de discussies onder de circa vijftig aanwezigen volop door. Danny Beckers (VU) gaf een stimulerende openingslezing met als titel 'A millennium of math education in the Netherlands, 1215–2000'. Het programma telde daarnaast veertig presentaties, verdeeld over vier dagen.

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) nam de organisatie op zich, in samenwerking met het Freudenthal Instituut en het Descartes Centre, beide

onderdeel van de Universiteit Utrecht. De NVvW stelde zich bovendien garant voor eventuele tekorten. Een internationaal programmacomité, samengesteld uit drie Nederlandse onderzoekers en drie onderzoekers uit andere landen, beoordeelde de 47 binnengekomen abstracts. De namen van de leden van het organiserend comité en van de leden van het programmacomité zijn te vinden op de conferentie website, www.ichme-5.nl (Information/Conference).

Op woensdagmiddag 20 september was er specifiek aandacht voor de geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs. Studenten, docenten van lerarenopleidingen en overige belangstellenden konden tegen gereduceerd tarief aan de middag deelnemen.

Het programma

Hier volgen wat voorbeelden van onderwerpen, zoals behandeld door de sprekers.

Danny Beckers doorliep in zijn openingslezing de periode 1215–2000 twee maal: één keer vanuit het gezichtspunt van wetgeving en voorschriften op het gebied van (wiskunde-) onderwijs en één keer vanuit het gezichtspunt van de idealen

voor wiskundeonderwijs. Beide keren was het beginjaar 1215, toen tijdens het vierde Lateraans concilie het besluit viel dat iedere kerk en parochie een school moest hebben. Het (lager) onderwijs was gedurende enkele eeuwen behoorlijk vrij: er was geen vastgelegd curriculum en de ouders betaalden per vak, voor rekenonderwijs ook wel per onderwerp. Pas vanaf het begin van de negentiende eeuw kwamen er landelijke wetten, voorschriften en opleidingen voor onderwijzers, met daarin een belangrijke plaats voor wiskunde. Hoger technisch onderwijs kwam ook in Nederland tot stand. Als we uitgaan van idealen voor wiskundeonderwijs is de indeling veel fijnmaziger. Er waren in de periode waarin de wetgeving niet veranderde wel belangrijke ontwikkelingen in de idealen, de doelstellingen en de inhoud van het wiskundeonderwijs. In toenemende mate zag men wiskunde als nuttige of zelfs noodzakelijke kennis, toegesnedden op wat het individu dacht nodig te hebben. In de achttiende eeuw werd wiskunde bovendien een manier om de wereld beter te begrijpen, een oefening voor de geest, de manier om de natuur onder controle te brengen. Zoveel mogelijk mensen moesten wiskundeonderwijs krijgen om de maatschappij, de natie, tot bloei te brengen. In de negentiende eeuw kreeg, met de komst van klassikaal onderwijs, de didactiek van wiskundeonderwijs geleidelijk meer aandacht. Danny Beckers behandelde in vogelvlucht veranderingen in idealen voor wiskundeonderwijs en de invloed daarvan op het onderwijs.

Confucius

Ongeveer een kwart van de sprekers presenteerde onderzoek over een periode vóór de negentiende eeuw, dus voorafgaand aan de ontwikkeling van nationale onderwijssystemen en de structuur in vakken die nu vanzelfsprekend lijkt. Jan Hogendijk ('Mathematical astronomy for a brilliant student in the 13th century') vertelde over een lopend onderzoek met betrekking tot een manuscript uit de Islamitische wereld. Man Keung Siu ('Let them speak; hear them speak, old Chinese wisdom on mathematics education') toonde met behulp van historisch onderwijsmateriaal en citaten van Chinese geleerden en wiskundigen, vanaf de tweede eeuw v. Chr. tot eind negentiende eeuw, wat de achterliggende filosofie met betrekking tot leren en onderwijzen in de confuciaanse cultuur

inhield en nog steeds inhoudt. Belangrijk is een structurering van lesmateriaal in verschillende niveaus, van eenvoudig naar complex, met binnen elk niveau een aantal variaties van een probleem. Zo mogelijk worden verschillende oplossingsmethoden besproken en geoefend. Dit is al zichtbaar in de verzameling wiskundige problemen *Nine Chapters on the Mathematical Art* (Jiuzhang Suanshu, ca 100 v.Chr.) en latere commentaren op deze verzameling. Als voorbeeld probleem 15 uit hoofdstuk 9:

Gegeven een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde $a = 5 bu$ en rechthoekszijde $b = 12 bu$. Hoe groot is de zijde van het ingeschreven vierkant?

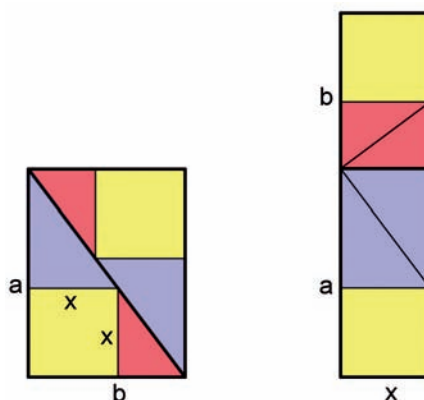
Antwoord: 3 en $9/17 bu$.

De eerste oplossingsmethode is een voorschrift: de zijde van het vierkant is gelijk aan het product van de rechthoekszijden gedeeld door de som van de rechthoekszijden. Een tweede methode gebruikt ontleden en hergroeperen (Figuur 1). Een derde methode maakt gebruik van verhoudingen en evenredigheid.

Studenten moesten veel parate kennis hebben, maar in de begeleidende teksten benadrukken de auteurs door de eeuwen heen dat uit het hoofd leren gepaard moet gaan met actief verwerven van inzicht. Dit volgt uit de leer van Confucius, geïllustreerd door enkele citaten.

"Learning without thought is labour lost; thought without learning is perilous." (Confucian Analects)

"He who attains sincerity chooses the good and holds fast to it. This involves the extensive study of it, close inquiry into it, careful deliberation of it, clear distinction of it, and earnest practice of it." (Doctrine of the Mean)



Figuur 1 Tweede oplossingsmethode voor *Nine chapters*, hfdst. 9 probleem 15, midden 3e eeuw.

"Still, once our intimate reading of it [a text] and careful reflection on it have led to a clear understanding of it, we must continue to question. Then there might be additional progress. If we cease questioning, in the end there'll be no additional progress." (Zu Xhi, twaalfde eeuw)

In de 21e eeuw onderschrijven Chinese onderwijskundigen nog steeds deze ideeën. De toenemende invloed van ICT is ook in deze onderwijsfilosofie een grote uitdaging.

Didier Henrion

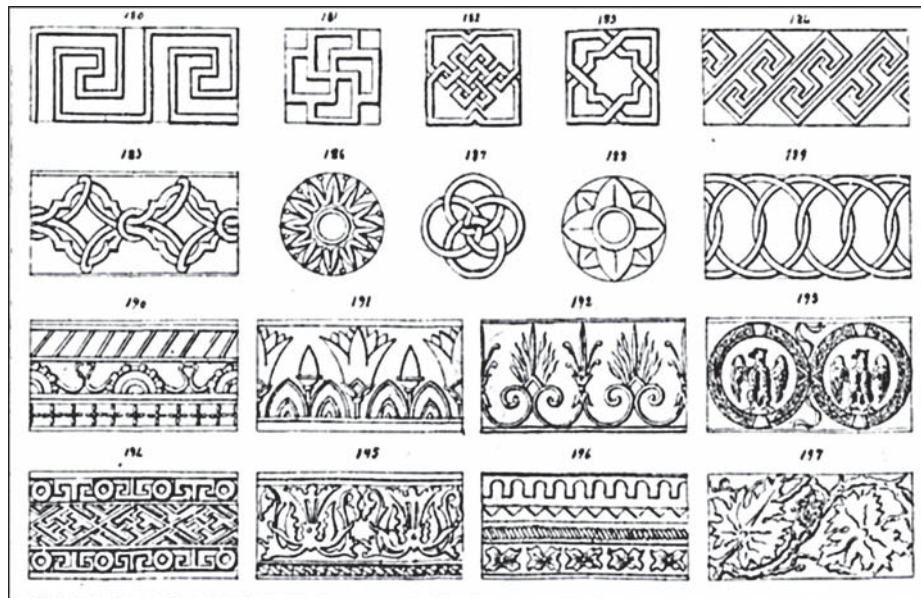
Frédéric Metin ('Didier Henrion and the transmission of Dutch mathematics in Paris') liet een en ander zien uit zijn lopende onderzoek naar een wiskundedocent in Parijs, begin zeventiende eeuw, die waarschijnlijk sterk beïnvloed was door de Nederlandse ingenieurwiskunde uit die periode.

Didier Henrion publiceerde tussen 1613 en 1632 boeken in de volkstaal over onder meer rekenen, algebra, trigonometrie, logaritmen, vestingbouw en de proportionaalpasser, waarschijnlijk als eerste auteur in Frankrijk. Hij noemde als bronnen vrij veel wiskundigen uit de Nederlandse Republiek, onder andere Simon Stevin, Jacques Alleaume (leerling van Stevin), Samuel Marolois en Ludolf van Ceulen. Alleaume, Stevin en Marolois werkten als ingenieur voor prins Maurits.

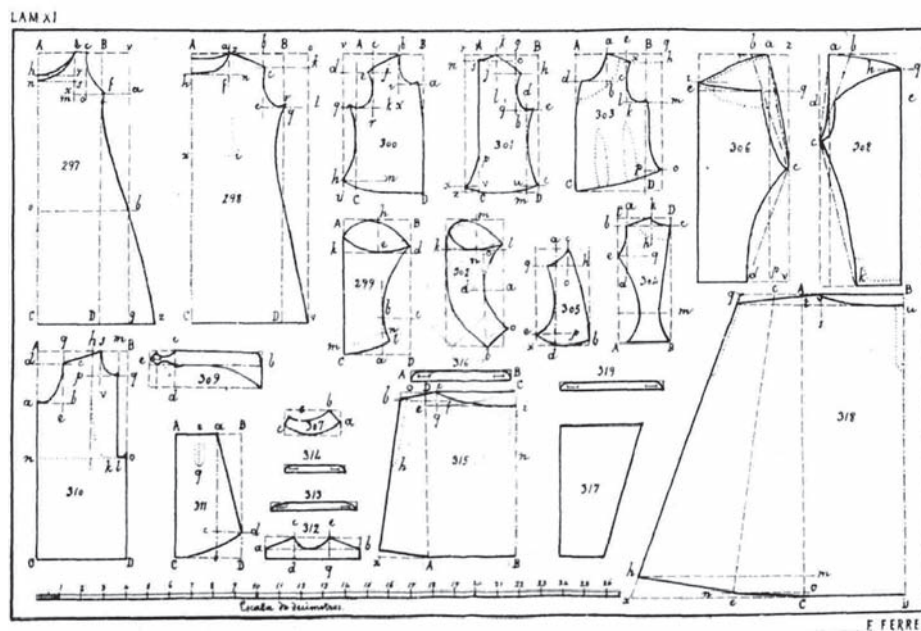
Er zijn volgens Metin opvallende overeenkomsten tussen de vermoedelijk eerste publicatie van Henrion, *Mémoires Mathématiques* (Figuur 2), en het lesprogramma van de Duytsche Mathématique, de opleiding voor militaire ingenieurs in Leiden, waarvoor Stevin het leerplan schreef en waar Ludolf van Ceulen de eerste professor was. In het voorwoord van de *Mémoires Mathématiques* schreef Henrion onder andere

"...ce que plusieurs tresdoctes auteurs, comme Montroyal, Clavius, Stevin, Pithicus & autres, ont aussi fait très amplement, mais en Latin: bien est vray, qu'il y a la traduction de Stevin, mais en fort grand volume."

[hetgeen verscheidene zeer geleerde auteurs, zoals Montroyal, Clavius, Pithicus en anderen, ook uitvoerig hebben gedaan, maar in het Latijn: weliswaar is er de ver-



Figuur 5 Toepassingen in Ferrer (1897).



Figuur 6 Patronen voor kleding als toepassing van meetkunde, Ferrer (1897).

Nederlandse middag

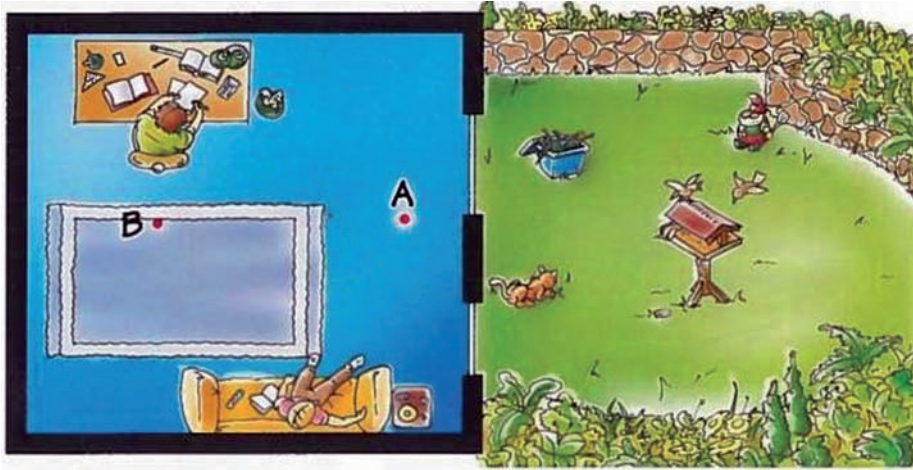
Tijdens de ‘Nederlandse’ middag liet Michiel Doorman (‘The emergence of meaningful geometry in the Netherlands during the 20th century’) iets zien en ervaren van de veranderingen in het Nederlandse elementaire meetkundeonderwijs in de tweede helft van de twintigste eeuw, met als pioniers Dieke van Hiele-Geldof en Tatyana Ehrenfest. Als introductie tot meetkunde krijgen leerlingen nu opdrachten in 3D die intuïtieve meetkundige redeneringen uitlokken (Figuur 7, Figuur 8), gevolgd door contextrijke opdrachten voor leerlingen van 12 tot 16 jaar. Dit is een aanpak waar ook Freudenthal zeer achter stond.

Die woensdagmiddag spraken Dirk de Bock en Bert Zwaneveld over wiskundeonderwijs in de jaren zestig van de twintigste eeuw, de periode waarin New Math het wiskundeonderwijs beïnvloedde. Martin Kindt behandelde de ontwikkeling van differentiaal- en integraalrekening in het voortgezet onderwijs (vanaf 1958) en Jenneke Krüger vertelde over een vroege voorloper van differentiaalrekening: het gebruik van fluxierekening voor de oplossing van maximum-minimumproblemen door onderwijzers in het midden van de achttiende eeuw. Harm Jan Smid behandelde het ontstaan en de ontwikkeling van verenigingen van leraren wiskunde in de twintigste eeuw en Martinus van Hoorn sloot daarop aan met een presentatie over *Euclides*, het tijdschrift van de NVvW, in de periode 1945–1976, de periode van New Math en andere ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Wat verder terug in de tijd ging Henk Hietbrink met een verhaal over het onderwijs door Jacob de Gelder, begin negentiende eeuw.

Verscheidene sprekers behandelden aspecten van rekenonderwijs, onder meer aan de hand van leerlingenwerk uit eind negentiende eeuw (Luciane de Fatimai Bertini) en rond 1950 (Elisabete Zardo Burigo), hoofdrekenen (Kristin Bjarnadóttir) en de abacus (Viktor Freiman, Alexei Volkov). Boeken en manuscripten ten behoeve van onderwijs vormen een bron van informatie. Verschillende aspecten van tekstboeken kwamen ter sprake: het concept ‘intuïtie’ in boeken voor calculus (Viktor Blasjo), vocabulaire en structuur van tekst in oude manuscripten (Alexei Volkov), de invloed van een enkel individu op de keuze van tekstboeken in een centralistisch systeem (Kristin Bjarnadóttir, Alexander Karp), en

Onderwerp	Toepassing
Rechte lijnen, algemeen	Figuren vouwen
Bewerkingen met rechte lijnen	Tekenen van eenvoudige kantpatronen
Hoeken	Tekenen van hoeken voor een fries
Schaal	Knippen van patronen voor kleding
Omtrek	Tekenen van eenvoudige guirlandes
Omtreksboog	Verschillende guirlandes tekenen
Hoekmeting	Ingewikkelde haakpatronen
Driehoeken	Van een stuk stof een vierkant vouwen
Veelhoeken	Meetkundige figuren in patronen voor kleding

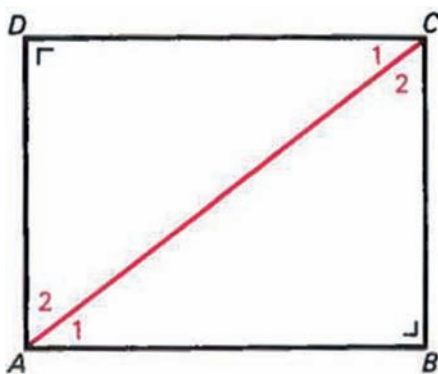
Tabel 1 Meetkundige onderwerpen en toepassingen, Ferrer (1897).



Figuur 7 Het meisje op de bank zegt dat de vogels in gevaar zijn; de jongen aan tafel snapt haar niet. Leg uit. (2002)

de wijze van redeneren in boeken voor trigonometrie in Scandinavië (Andreas Christensen). Een overzicht van het wiskundeonderwijs gedurende een langere periode in een land of regio kan dienen als raamwerk voor bestaande onderzoeken en als uitgangspunt voor nieuw onderzoek. Een aanzet hiervoor gaven Eva Lakoma voor Polen, Luigi Pepe voor Italië en Ezzaim Laabid voor Marokko.

Zie www.ichme-5.nl/program voor een volledig overzicht van de sprekers en onderwerpen. De *Proceedings* zullen, als alles volgens plan verloopt, eind 2018 verschijnen, zowel digitaal als in een beperkte papieren oplage.



Figuur 8 Toon aan dat de driehoeken ABC en ADC congruent zijn (1976).

Tot slot

Wiskundeonderwijs is een belangrijke vector in de verspreiding van wiskundige kennis, op verschillende niveaus; het is een voorwaarde voor verdere ontwikkeling van wiskunde en voor het kunnen gebruiken van wiskunde, bijvoorbeeld in beroepen. Alleen al om deze reden is geschiedenis van wiskundeonderwijs van belang.

Wiskundedocenten en aanstaande wiskundedocenten kunnen door inzicht in de geschiedenis van hun vakgebied meer oog krijgen voor de continuïteit en de veranderingen in dat vakgebied. Het huidige wiskundeonderwijs is geworteld in het verleden en die wortels gaan ver terug. In Nederland levert geschiedenis van het wiskundeonderwijs soms een onderwerp voor een scriptie en er zijn, naast een beperkt aantal proefschriften, enkele boeken gepubliceerd over aspecten van de geschiedenis van het wiskundeonderwijs, onder andere door Martin Kindt en door Adri Treffers. *Euclides*, het blad van de NVvW, publiceert regelmatig onderwerpen uit de geschiedenis van wiskundeonderwijs. Aan enkele universiteiten en hogescholen besteedt men aandacht aan geschiedenis van wiskunde; impliciet komt daarin soms geschiedenis van onderwijs aan de orde. Met name voor studenten van opleidingen

tot leraar wiskunde kan geschiedenis van wiskundeonderwijs een rijke en aantrekkelijke bron vormen voor onderzoek. Boeken over wiskunde uit vorige eeuwen en oude manuscripten zijn een goed uitgangspunt en een groeiend aantal is digitaal beschikbaar.

Er is ook bij docenten belangstelling voor geschiedenis van wiskundeonderwijs. In 1995 ontstond de Historische Kring Rekenen en Wiskunde Onderwijs (HKRWO), op initiatief van Ed de Moor (1933–2016). Een van de activiteiten van de HKRWO was een jaarlijks symposium van één dag, bestemd voor leraren, met voordrachten over onderwerpen uit de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. In 2012 werd de HKRWO een werkgroep van de NVvW onder de naam Werkgroep Geschiedenis Reken- en Wiskunde Onderwijs (WGRWO); de activiteiten van de werkgroep bleven dezelfde. Eind 2016 is de WGRWO gefuseerd met het netwerk Geschiedenis van de Wiskunde, een netwerk van wiskundigen en lerarenopleiders wiskunde, waarvan de leden streven naar meer aandacht voor geschiedenis van wiskunde in hun onderwijs. Het resultaat van de fusie is de Werkgroep Geschiedenis, zie nvvw.nl/werkgroepen/werkgroep-geschiedenis.

De laatste activiteit van de WGRWO was de organisatie van ICHME-5. De Werkgroep Geschiedenis zet de organisatie van het jaarlijkse symposium voort. Op 7 oktober trok symposium nr. 23, “Het meten van de wereld”, een flink aantal bezoekers. Zie (nvvw.nl/werkgroepen/werkgroep-geschiedenis/symposia/symposium-xxiii/) voor de onderwerpen en sprekers. ☛

Dankwoord

Verscheidene mensen waren betrokken bij de organisatie van de conferentie, echter één persoon in het bijzonder moet genoemd worden. De enthousiaste, inventieve en deskundige inbreng van Heleen van der Ree (NVvW), zowel voor als tijdens ICHME-5, heeft in hoge mate bijgedragen aan het succes van deze conferentie.