Frans Schurer
Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
f.schurer@tue.nl

Klaas van Harn
Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit Amsterdam
k.van.harn@vu.nl

In Memoriam Fred Steutel (1931–2017)

Wiskundige, columnist, ingezonden brievenschrijver en sportman

Op 1 juni 2017 overleed Fred Steutel, emeritus hoogleraar van de Technische Universiteit Eindhoven, in de leeftijd van 85 jaar. Frans Schurer en Klaas van Harn beschrijven zijn wetenschappelijke carrière, zijn schrijverschap, zijn vriendschap en zijn sportactiviteiten. Dit levensbericht is eerder in een wat andere vorm verschenen in *STAtOR* 18(3) (2017), 23–31.

Proloog

Op 1 juni 2017 is Frederik Willem (Fred) Steutel, volstrekt onverwacht, vredig in zijn slaap overleden — *media vita in morte sumus*, zoals de eerste regel van een middeleeuwse antifoon luidt. Freds wiskundige interesse — hij was emeritus hoogleraar van de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) — betrof vooral de kansrekening, maar ook binnen de analyse was hij actief; met name de *approximatietheorie* mocht zich in zijn belangstelling verheugen. Binnen de kansrekening raakte Fred gaandeweg steeds meer geïnteresseerd in de zogenoemde *oneindige deelbaarheid* van kansverdelingen, een in feite heel eenvoudig concept, dat echter tot vele uitdagende vragen aanleiding geeft en vaak onverwacht in andere delen van die discipline opduikt. In het navolgende levensbericht beschrijven we zijn wetenschappelijke carrière en, heel globaal, het soort problemen in de kansrekening en de approximatietheorie waarmee hij zich bezighield; in een aantal stukjes aan het eind van dit artikel wordt daarop meer in detail ingegaan. Daarnaast geven we ook een schets van zijn schrijverschap als columnist, en zeggen we iets over de aard van zijn vriendschap en zijn sportactiviteiten. Als achtergrond moge dienen dat we beiden jarenlang met Fred hebben samengewerkt en het voorrecht hadden tot zijn intieme vriendenkring te behoren: Schurer was vanaf 1964 — eerst op de Technische Hogeschool Twente (THT) en daarna op de Technische Hogeschool Eindhoven (THE), later de TU/e — een directe collega van Fred, en Van Harn verrichtte onderzoek op het gebied van de oneindige deelbaarheid, van 1973 tot 1978 als Freds eerste promovendus op de THE, daarna als collega ‘op afstand’ op de Vrije Universiteit Amsterdam.

Fred Steutel

Fred tijdens zijn promotie op 20 januari 1971, met links zijn promotor Theo Runnenburg

Wetenschappelijke carrière

Fred werd geboren in Tubbergen op 17 november 1931. Hij bezocht de lagere school in Haaksbergen en 'genoot' vervolgens — dat was gedurende het laatste oorlogsjaar; van het onderwijs kwam weinig terecht — één jaar Uitgebreid Lager Onderwijs aldaar. Daarna bezocht hij het gymnasium in Hengelo. Vervolgens, na het behalen van het einddiploma, ging hij twee jaar in militaire dienst. Zijn initiële studiekeuze aan de Universiteit van Amsterdam (UvA), scheikunde en natuurkunde met bijvak wiskunde, was geen succes: van de scheikundepractica bracht Fred weinig terecht en ook de natuurkundecolleges interesseerden hem maar matig. Na vier maanden zei hij de scheikundestudie vaarwel en kwam het accent op wiskunde en natuurkunde te liggen, met als bijvak sterrenkunde. Na het behalen van het kandidaatsexamen in 1956 moest gekozen worden tussen wiskunde en natuurkunde. Het advies van J. de Groot, hoogleraar topologie, gaf de doorslag; hij beoordeelde Freds aanleg voor wiskunde als 'zeer goed, maar niet briljant', een kwalificatie waarin Fred zich, ook later, goed kon vinden. Het doctoraal werd behaald in 1961, maar reeds van 1956 af was hij werkzaam bij de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, het huidige Centrum Wiskunde & Informatica.

In 1964 deed zich de gelegenheid voor terug te keren naar zijn geboortestreek. Fred werd, met een zevental anderen — onder wie D.W. Bresters, de latere rector magnificus van de UvA gedurende 1981–1987, en Schurer —, op voorstel van I.W. van Spiegel, benoemd tot wetenschappelijk medewerker aan de in november 1961 opgerichte THT; de eerste colleges, oefeningen en practica werden gegeven in september 1964. Na Van Spiegel werden, in de beginjaren, achtereenvolgens benoemd de hoogleraren A.J.W. Duijvestijn (numerieke wiskunde), T.J. Terpstra (stochastiek), E.M. de Jager (mathematische fysica) en P.J. Zandbergen (toegepaste wiskunde). Allengs werden de medewerkers over de leerstoelen verdeeld en Fred — dat lag voor de hand — werd toegevoegd aan die van Terpstra. Het is wellicht interessant te vermelden dat de wiskundigen destijds bestuurlijk waren ondergebracht bij één der afdelingen Elektrotechniek, Chemische Technologie en Werktuigbouwkunde, en niet, zoals in de beginjaren in Delft en Eindhoven, een onderafdeling waren van de afdeling Algemene Wetenschappen.

Gedurende het studiejaar 1969–1970 doceerde en studeerde Fred aan de University of Texas at Austin. In 1973 werd hij, mede op voorspraak van de hoogleraren R. Doornbos en J. Wessels, benoemd aan de THE tot lector in de wiskunde, in het bijzonder kansrekening en statistiek; in 1980 werd Fred hoogleraar. Intussen (1971) was hij gepromoveerd aan de UvA op een proefschrift [17] over oneindige deelbaarheid van kansverdelingen; J.Th. (Theo) Runnenburg was zijn promotor. Gaandeweg ontwikkelde Fred zich tot een vooraanstaand wetenschapper; zo was hij gedurende de zomers van 1970 (aansluitend op het verblijf in Austin) en 1974 'research associate' in Rochester en in 1979 gasthoogleraar aan de Johns Hopkins University in Baltimore.

In 1996 ging Fred met emeritaat. In zijn afscheidscollege *Laatste kansen* [18], een terugblik op de afgelegde weg, geeft hij zich onder andere rekenschap van zijn bijdragen aan onderwijs, onderzoek en bestuur. Hoewel Fred in veel commissies binnen en buiten de faculteit heeft gezeten, stelt hij, kennelijk zonder spijt, vast dat hij zich niet tot een bestuurder heeft ontwikkeld. Over zijn functioneren als docent is hij niet bijzonder tevreden (cf. [18, p. 17] en dat geldt dan met name het geven van grootschalig onderwijs; inderdaad, door zijn niet vérdragende en soms wat haperende stem, door zijn bescheidenheid en zich wars te betonen van toneel en theater, was hij minder geschikt voor colleges voor grote aantallen studenten. Toch gaf hij graag onderwijs. Maar zonder twijfel lag Freds grootste kracht in het onderzoek en hij heeft, ook in samenwerking met anderen (voor wie hij vaak een stimulans was), daaraan veel vreugde en voldoening ontleend. Zijn wetenschappelijk werk omvat, behalve het 'oneindig deelbaar boek' [20], ongeveer zeventig artikelen, congresverslagen en rapporten; verder heeft hij een groot aantal voordrachten gehouden, in Oberwolfach natuurlijk, maar ook in exotische plaatsen als Hanoi in Vietnam, Isfahan in Iran en Tashkent in Oezbekistan. Na Van Harn heeft Fred nog drie andere promovendi gehad en hij was vier keer tweede promotor.

Fred hield van 'sommetjes maken'; hij was lid van de roemrijke Eindhovense groep O.P. Lossers, twaalf jaar redacteur van de Opgavenrubriek in *Statistica Neerlandica*, het tijdschrift van de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research — in 2008 werd hij benoemd tot erelid —, en nadien redacteur van de soortgelijke rubriek in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.

Bijdragen aan de approximatietheorie

Zoals eerder is aangegeven, hebben Fred en de eerste auteur van dit levensbericht elkaar medio 1964 voor het eerst ontmoet. Fred, kansrekenaar van professie, met een grondige kennis van de analyse, ging zich, in het voetspoor van Schurers lopende promotieonderzoek, ook interesseren voor problemen in de *approximatietheorie*, hetgeen voor beiden leidde tot een jarenlange vruchtbare samenwerking: samen hebben ze, naast een aantal rapporten, dertien artikelen geschreven. Centraal daarin staat de bepaling van de *graad van approximatie* van continue functies met welomschreven gladheidseigenschappen door algebraïsche polynomen, waaronder die van de Russische wiskundige Bernstein (1880–1968); cf. [15]. Voor continue 2π-periodieke functies met analoge eigenschappen werd soortgelijk onderzoek verricht en dan met name voor singuliere integralen, genoemd naar de Amerikaanse wiskundige Jackson (1888–1946); cf. [14]. In een tweetal stukjes aan het eind van dit artikel worden de belangrijkste resultaten gegeven uit de genoemde artikelen.

De operatoren die in de genoemde approximatiemethoden als intermediair fungeren, dat wil zeggen die aan de beschouwde functie de bijbehorende benadering toevoegen, zijn, behalve lineair, *positief*: het beeld van een niet-negatieve functie is ook weer niet-negatief op het beschouwde interval. Dergelijke operatoren zijn, dankzij het baanbrekende werk van de Russische wiskundige Korovkin [8], vanwege hun elegante eigenschappen sinds de jaren vijftig van de vorige eeuw onderwerp geweest van talrijke publicaties; Schurers dissertatie [13] is daar een voorbeeld van.

Expert in oneindige deelbaarheid

Fred kon zijn kennis van de analyse goed gebruiken in zijn eigenlijke vakgebied, de (analytische) kansrekening. Daarbinnen richtte hij zich met name op *oneindige deelbaarheid* van kansverdelingen, een begrip dat in de jaren dertig van de vorige eeuw door bekende kansrekenaars als De Finetti, Kolmogorov, Lévy en Khintchine ontwikkeld was in de context van (continue-tijd) *processen met stationaire en onafhankelijke aangroeiingen* en het *Centrale Limietprobleem*. Overigens is er, naast dit theoretisch aspect, ook een meer praktisch belang van oneindige deelbaarheid in (stochastische) modellering binnen de verzekeringswiskunde (jaarlijkse schadeclaim) en de biologie (regenval, landopbrengst), zoals duidelijk zal zijn uit de volgende definitie. Een stochastische variabele X wordt *oneindig deelbaar* (eigenlijk beter: *onbeperkt* deelbaar) genoemd indien X voor ieder natuurlijk getal n dezelfde verdeling heeft als een som van n onafhankelijke, gelijkverdeelde grootheden; de kansverdeling van X wordt dan ook *oneindig deelbaar* genoemd. Van vele bekende verdelingen, zoals de normale, Cauchy-, Laplace-, gamma-, negatief-binomiale en Poisson-verdeling, is de oneindige deelbaarheid gemakkelijk aan te tonen; maar dat ligt geheel anders voor bijvoorbeeld de in de financiële wiskunde populaire log-normale verdeling.

In de jaren dertig waren ook canonieke voorstellingen voor de karakteristieke functies van de oneindig deelbare verdelingen afgeleid. Maar bij het vaststellen of een gegeven verdeling oneindig deelbaar is, helpen deze voorstellingen doorgaans niet. Fred was, samen met Charles Goldie, één van de eersten die, in de jaren zestig en zeventig, nuttige criteria voor oneindige deelbaarheid ontwikkelde in termen van de kansverdelingen zelf. Daarmee toonde hij bijvoorbeeld aan dat alle *mengsels van exponentiële dichtheden* en, algemener, alle *log-convexe* dichtheden op de positieve halfrechte oneindig deelbaar zijn. Freds aanpak gaf aanleiding tot vele aanvullende resultaten en generalisaties, zoals die te vinden zijn in [17] en [20].

Fred ontwikkelde zich tot een deskundige op het gebied van oneindige deelbaarheid. Zijn brede kennis stelde hem bovendien in staat ongedachte verbanden te leggen. We willen daar twee voorbeelden van geven, die we hier kort aanstippen en in twee stukjes aan het eind van dit artikel nader uitwerken. In het promotieonderzoek van de tweede auteur van deze bijdrage kwamen functionaalvergelijkingen voor die Fred op het lumineuze — en, naar later bleek, zeer vruchtbare — idee brachten om op zoek te gaan naar *geheelwaardige fracties* van niet-negatieve, geheelwaardige stochastische variabelen X. Er bleken uiteindelijk vele mogelijkheden te zijn, maar de eenvoudigste variant is die waarbij bijvoorbeeld de helft van 1 niet gelijk is aan $\frac{1}{2}$ (en ook niet langer constant), maar een stochastische variabele is met een alternatieve $(\frac{1}{2})$ verdeling op $\{0,1\}$: met kans $\frac{1}{2}$ gelijk aan 0 en met kans $\frac{1}{2}$ gelijk aan 1. Met behulp van deze vermenigvuldiging konden vervolgens discrete analogons gedefinieerd en bestudeerd worden van de bekende (oneindig deelbare, absoluut-continue) *stabiele en zelf-ontbindbare* verdelingen. Een en ander is, behalve in [3] en [20], te vinden in het basisartikel [19], dat zeer veel vervolgonderzoek heeft gegenereerd. Fred hield graag de citatiescore van het artikel bij; volgens Google Scholar is deze score nu bijna vijfhonderd. In deze fase werkte Fred, behalve met Van Harn, soms samen met Wim Vervaat en met Jim Wolfe, die overigens beiden een tragisch levenseinde hebben gekend, en later met Lennart Bondesson en Ken-iti Sato; ook waren er stimulerende contacten met Theo Runnenburg, Piet Holewijn, Guus Balkema en Laurens de Haan.

Een tweede ongedacht verband dat we willen noemen, is een mooi voorbeeld van wederzijdse bevruchting van onderwijs en onderzoek, waar Fred naar eigen zeggen veel plezier aan heeft beleefd. Het betreft hier de bekende *inspectieparadox*, ook wel *wachttijdparadox* genoemd, in een zogenoemde vernieuwingscontext. Door de daarin vigerende *generieke levensduur* X geschikt *oneindig deelbaar* te kiezen kan men laten zien (cf. [4]) dat de paradox een 'onbeperkt', en daarmee *extreem*, aspect heeft.

In de proefschriften van Fred zelf en zijn promovendi Klaas van Harn, Björn Hansen en Roel Wilms komen slechts bepaalde aspecten van oneindige deelbaarheid aan bod — Aegle Hoekstra promoveerde bij Fred op een ander onderwerp. Maar in het begin van de jaren negentig, ongeveer vijf jaar vóór hij met emeritaat ging, werd Fred door de redactie van uitgever Marcel Dekker (New York) benaderd om in de bekende serie *Pure and Applied Mathematics* een monografie te schrijven over zijn onderzoek. Fred stemde met enige aarzeling toe en haalde Van Harn over aan dit project mee te doen met de woorden: "We schrijven wat leuke dingen op waar we iets van af weten." Maar al snel stelden zij hun doelen bij en streefden ze naar een zo volledig mogelijke behandeling van de oneindig deelbare kansverdelingen op de reële rechte. Het was echter een gigantisch werk om de ontwikkelingen van vooral de laatste 25 jaar te ordenen en te verwerken in een toegankelijke tekst. Uiteindelijk heeft dit project zo'n twaalf jaar geduurd, eigenlijk veel te lang. Maar in 2004 verscheen dan toch de monografie [20] van 550 pagina's, met ruim honderd concrete voorbeelden, verspreid over zes van de zeven hoofdstukken. Het boek wordt veelvuldig aangehaald — volgens Google Scholar nadert de citatiescore de vierhonderd — en lijkt intussen te zijn uitgegroeid tot een standaardwerk over dit onderdeel van de kansrekening. Fred heeft zo zijn wetenschappelijke carrière op een indrukwekkende wijze kunnen afsluiten.

Affiniteit met taal

Bij het samenstellen van dit herdenkingsartikel, tevens bedoeld als eerbetoon aan Fred, hebben we zijn afscheidscollege nog weer eens geraadpleegd. Het verging ons daarbij als bij het herlezen van sommige boeken van Willem Elsschot, *Lijmen* en *Het been* bijvoorbeeld. De rede heeft nog niets aan frisheid ingeboet, is, door de fijnzinnige humor en de puntige formuleringen, een genot om te lezen, bovendien een feest der herkenning omdat we in Eindhoven gedurende lange tijd tot dezelfde faculteit behoorden. Hier openbaarde zich een gave van Fred: de kunst om lenig proza te schrijven, ontdaan van opsmuk, beknopt, boeiend, met verrassende wendingen. Dat hij goed kon schrijven, dat hij daar plezier in had, was eerder al gebleken: regelmatig kwam men bijdragen van hem tegen in *de Volkskrant* en in *NRC Handelsblad*. Maar de drempel om een ingezonden brief in die kranten geplaatst te krijgen is hoog; hij had behoefte aan een vast podium. Zo nu en dan schreef hij ook stukjes in *Cursor*, de TU/e-periodiek, en rond de eeuwwende kreeg hij een eigen rubriek.

Fred behandelde — zijn belezenheid hielp hem daarbij — een breed scala aan onderwerpen: politiek, taal en literatuur, onderwijs en onderzoek, de opmars van het Engels in het wetenschappelijk onderwijs, waarvan hij een fervent tegenstander was, en 'Effe zeuren' was jarenlang een sieraad voor het blad. Van één zijner columns willen we hier iets zeggen, ook al omdat het Freds bedrevenheid in het maken van limericks illustreert; het rijmpje heeft betrekking op een vermaard wiskundige. Ter inleiding het volgende. In het begin van de jaren tachtig werd door W.J. Deetman, minister van Onderwijs en Wetenschappen, de pensioengerechtigde leeftijd van hoogleraren verlaagd van 70 naar 65 jaar. Ongeveer twintig jaar later, in 2005, komt Fred daarop terug. In de bewuste column (cf. [7]) hekelt hij het benoemen tot hoogleraar aan onze universiteiten van Bekende Nederlanders die niet of nauwelijks op wetenschappelijke prestaties kunnen bogen — 'de pronkprofessor verkleutert het hoogleraarsambt' — en plaatst daartegenover het gedwongen terugtreden van prominente wetenschappers die nog lang niet uitgedoofd zijn en graag hun onderwijs en onderzoek aan de universiteit willen voortzetten. Fred had hier met name — hoewel, niet letterlijk: in het stukje is sprake van ene professor De Wit — N.G. (Dick) de Bruijn (1918–2012) op het oog, die als gevolg van Deetmans oekaze met tegenzin in 1984 met emeritaat ging. Nu de limerick:

Geen vis in de wiskundevijver
betwistte zijn inzicht en ijver.
Nu, door Deetman genept,
op het droge geschept,
moet 'ie weg, maar het is toch een blijver.

Een blijver, inderdaad: De Bruijn was nog jarenlang na zijn terugtreden, samen met Fred en anderen, een trouw bezoeker van 'Huize Avondrood', de ruimte die de faculteit genereus ter beschikking stelde aan haar oud-medewerkers. Enkele jaren nadat hij zijn rubriek bij *Cursor* kreeg, werd Fred medewerker van *STAtOR*, een uitgave van de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research; zijn eerste column verscheen in december 2002.

Talent voor vriendschap

Naast een grote aanleg voor wiskunde en affiniteit met taal, had Fred 'le talent de l'amitié' en volgens Adriaan Roland Holst (1888–1976), in een stukje [12, p. 84] over de dichter en essayist Jan Greshoff, is dat een gave die zeldzamer is dan meestal wordt verondersteld; spottenderwijs noemt hij vriendschap de centrale verwarming van de ziel. Wat ons bij Fred opviel was dat zijn vriendschap zo volstrekt *onbaatzuchtig* was, zo gespeend van mogelijk eigenbelang. Jan Hendrik Leopold (1865–1925), wel eens Neerlands 'meest verstilde dichter' genoemd, heeft een vriend — het vers is treffend van toepassing op Fred — als volgt gekarakteriseerd [9, p. 206]:

Een vriend is niet, die u aan 't hart wil sluiten
in uw geluksuur en zich niet genoeg doen kan,
maar die den balling bij zich binnen roept en dan
de deur toeslaat tegen de wolven buiten.

Wij memoreren in dit verband hier ook de bezoeken die hij bracht aan Runnenburg tijdens diens laatste moeilijke en eenzame levensjaren; hart- en zielverwarmend en een illustratie van de 'milk of human kindness' waarvan Fred zo veel in zich had.

Passie voor sport

We hebben samen aan wiskunde gedaan, maar ook veel aan sport; medewerkers van universiteiten staan daartoe uitstekende faciliteiten ter beschikking. Fred hield van schaatsen op de kunstijsbaan in Eindhoven en, als er natuurijs was, van tochten maken met Van Harn op de Ankeveense Plassen en de Gouwzee; ook van tennissen (dat heeft hij tot op hoge leeftijd gedaan), maar joggen deed hij toch het liefst. Met een vast groepje van de TU/e heeft hij duizenden kilometers gelopen, in de middagpauze vanuit het Studentensportcentrum Eindhoven rondjes om de Karpendonkse Plas, halve marathons, trainen voor de eerste marathon in Eindhoven in oktober 1982 (Fred was toen bijna 51 jaar). Die liep hij in de uitstekende tijd van 3.16.01 uur; nadien heeft hij er nog vier gelopen. Aan dat joggen met vrienden, ruim twee decennia lang — hij was erelid van de Karpendonk Road Runners —, heeft hij ongelooflijk veel plezier beleefd.

Epiloog

Uit het bovenstaande moge duidelijk zijn dat Frederik Willem Steutel — wiskundige, columnist, ingezonden brievenschrijver en sportman — begiftigd was met grote gaven, iemand die zich verheugde in de samenwerking met anderen en zijn kennis en inzichten — al dan niet gevraagd — ruimhartig met hen deelde. Zijn heengaan is een onherstelbaar verlies voor Vita, naar eigen zeggen dé vrouw in zijn leven, en hun twee kinderen, maar ook vele anderen zullen hem node missen. Wij verloren een dierbare vriend.

Approximatie met singuliere Jackson-integralen

Zij $C_{2\pi}$ de verzameling van continue functies op $\mathbb{R}$ met periode 2π. In [14] wordt de graad van approximatie onderzocht van functies f in $C_{2\pi}$ met behulp van de singuliere integralen

$$(L_{n,p}f)(x) := A^{-1}(n,p) \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^{2p} dt, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

waarbij $p \geq 3$ een vast natuurlijk getal is en

$$A(n,p) := \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^{2p} dt. \tag{2}$$

Uit de gedaante van (1) volgt dat $L_{n,p}$ een *positieve* lineaire operator is. De keuzes $p = 1$ en $p = 2$ zijn in (1) uiteraard ook geoorloofd; de naam van Fejér (1880–1959) is verbonden met $L_{n,1}$, terwijl $L_{n,2}$ de klassieke Jackson-operator is [6].

Voor de bepaling van $A(n,p)$ en voor het onderzoek van de approximatie-eigenschappen van $L_{n,p}$ is het navolgende resultaat uit [14], dat ook geldt voor $p = 1$ en $p = 2$, van cruciaal belang.

Stelling 1. *De coëfficiënten $\mu_k^{(n,p)}$ in de ontwikkeling*

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^{2p} = \mu_0^{(n,p)} + 2\sum_{k=1}^{np-p} \mu_k^{(n,p)} \cos kt$$

worden gegeven door

$$\mu_k^{(n,p)} = \sum_{j=0}^{2p} (-1)^j \binom{2p}{j} \binom{np+p-k-nj-1}{2p-1}, \tag{3}$$

met de gebruikelijke conventie dat $\binom{a}{b} = 0$ als $a < b$.

Uit (2) en (3) volgt na enig rekenwerk dat

$$\begin{aligned} A(n,p) &= 2\pi\mu_0^{(n,p)} \\ &= \frac{2\pi n}{(2p-1)!} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{2p}{j} (p-j) \prod_{k=1}^{p-1} \left((p-j)^2 n^2 - k^2\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Daarmee is de expliciete vorm van (1) bepaald. Uit (4) volgt bijvoorbeeld dat $A(n,1) = 2\pi n$ en dat $A(n,2) = 2\pi n(2n^2+1)/3$. Opgemerkt zij nog dat $A(n,p)$ een veelterm is in n van oneven graad. Door toepassing van een aantal resultaten van Korovkin (cf. [14, p. 156–157]) over positieve lineaire operatoren van een bepaald type waartoe ook de $L_{n,p}$ behoren, kunnen uitspraken worden gedaan over de graad van approximatie van functies in $C_{2\pi}$ met behulp van (1). De volgende ongelijkheid, waarin de continuïteitsmodulus $\omega(f;n^{-1}) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x,y \in [-\pi,\pi] \text{ met } |x-y| \leq n^{-1}\}$ optreedt, is daarvan een voorbeeld; deze is van *globale* aard en vertoont gelijkenis met de resultaten van Sikkema [16] en van Schurer en Steutel [15], zoals gegeven voor Bernstein-polynomen. Echter, hier is geen sprake van een *beste* approximatieconstante, maar slechts van een bovengrens daarvoor.

Stelling 2. *Voor alle $f \in C_{2\pi}$ en alle $p \geq 3$ geldt:*

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |(L_{n,p}f)(x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}\right)\omega(f;n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Opmerking. Voor $p = 2$ dient in het rechterlid van (5) de constante $\sqrt{2}$ te worden vervangen door $\sqrt{3}$ (cf. [11, p. 76]). De graad van approximatie in het geval $p = 1$ is essentieel slechter: in het rechterlid van (5) komt dan te staan $\omega(f;n^{-1/2})$ in plaats van $\omega(f;n^{-1})$.

De volgende stelling bevat een resultaat van *lokale* aard.

Stelling 3. *Zij gegeven dat $f \in C_{2\pi}$ in een vast punt $x \in (-\pi,\pi)$ een tweede afgeleide heeft, dan geldt voor $p \geq 2$:*

$$(L_{n,p}f)(x) - f(x) = a_p f''(x)/n^2 + o(1/n^2), \quad n \to \infty, \tag{6}$$

waarbij

$$a_p = (2p-1)(p-1)\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{j+1}\binom{2p}{j}(p-j)^{2p-3}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{2p}{j}(p-j)^{2p-1}}. \tag{7}$$

Dit zijn zogenaamde asymptotische approximatieformules, vergelijkbaar met het door Voronovskaya [21] gegeven resultaat voor Bernstein-polynomen. Bij de bewijzen van (5), (6) en (7) spelen de coëfficiënten $\mu_k^{(n,p)}$ uit (3) voor $k = 0,1,2$ een essentiële rol. Uit Stelling 3 volgt in het bijzonder dat geldt (cf. [11, p. 34]):

$$(L_{n,2}f)(x) - f(x) = \frac{3}{2}f''(x)/n^2 + o(1/n^2), \quad n \to \infty.$$

Frans Schurer

Bernstein-polynomen en beste approximatieconstanten

Zij $C_1[0,1]$ de verzameling van functies die gedefinieerd en continu-differentieerbaar zijn op het interval $[0,1]$. In [15] wordt de graad van approximatie onderzocht van functies in $C_1[0,1]$ met behulp van Bernstein-polynomen, gedefinieerd door

$$(B_nf)(x) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Uit het rechterlid van (1) blijkt dat B_n een *positieve* lineaire operator is. De polynomen (1) zijn door Bernstein [1] in 1912 gebruikt om een elegant en constructief bewijs te geven van de beroemde approximatiestelling (1885) van Weierstrass (1815–1897). De resultaten in [15] — de bepaling van beste approximatieconstanten en het asymptotisch gedrag daarvan — zijn vergelijkbaar met die van Sikkema [16] en Esseen [2], die rond 1960 soortgelijk onderzoek hebben verricht voor continue functies. Bij de introductie van de approximatieconstanten hebben we de continuïteitsmodulus ω_1 van de afgeleide van f nodig, gedefinieerd als volgt:

$$\omega_1(f;\delta) := \sup_{|x-y| \leq \delta} |f'(x) - f'(y)|, \quad x,y \in [0,1],\ \delta > 0.$$

Zij nu

$$\begin{cases} c_n := \sup_{f \in C_1[0,1]} \max_{0 \le x \le 1} \dfrac{n^{1/2} |(B_n f)(x) - f(x)|}{\omega_1(f; n^{-1/2})}, \\ c^{(j)} := \sup_{n \ge j} c_n, \quad j = 1, 2, \\ c := \lim_{n \to \infty} c_n. \end{cases}$$

Stelling. *De constanten* $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ en c *hebben de volgende waarden:*

$$c^{(1)} = \frac{1}{4}, \tag{2}$$

$$c^{(2)} = c_5 = \frac{2 \cdot 5^{1/2} - 1}{16} \doteq 0{,}217008, \tag{3}$$

$$c = (2\pi)^{-1/2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2j^2} \right) - 2 \sum_{j=1}^{\infty} j(1 - \Phi(2j)) \doteq 0{,}207969, \tag{4}$$

waarbij $\Phi(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ *voor* $x \in \mathbb{R}$.

Opmerkingen bij de stelling. Eerder is door Lorentz [10, p. 21] bewezen dat $c^{(1)} \le 3/4$. Het is wellicht instructief (2) te herformuleren in de volgende vorm: voor alle $f \in C_1[0,1]$ geldt

$$\max_{0 \le x \le 1} |(B_n f)(x) - f(x)| \le \frac{1}{4} \omega_1(f; n^{-1/2}) n^{-1/2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

waarbij de constante $\frac{1}{4}$ in het rechterlid van (5) best mogelijk is, dat wil zeggen niet verder verscherpt kan worden. Bij het bewijs van (2) speelt de positiviteit van de operator B_n een essentiële rol. De afleiding van (3) is uiterst complex, vergelijkbaar met die in [16]. Bij het bewijs van (4) wordt gebruik gemaakt van de Berry–Esseen-versie van de Centrale Limietstelling.

Frans Schurer

Discreet zelf-ontbindbare en stabiele kansverdelingen

In het *Centrale Limietprobleem* wordt men op een natuurlijke wijze geleid naar een belangrijke klasse van *oneindig deelbare* kansverdelingen, namelijk die van de zogenoemde *zelf-ontbindbare* verdelingen; voor een stochastische variabele X met een dergelijke verdeling geldt per definitie dat

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} \alpha X + X_\alpha \quad (0 < \alpha < 1; \overset{\mathrm{d}}{=} \text{betekent gelijkheid in verdeling}), \tag{1}$$

met in het rechterlid X_α onafhankelijk van X. De zelf-ontbindbare verdelingen zijn in allerlei modelleringssituaties heel aantrekkelijk, onder andere vanwege het feit dat ze alle *unimodaal* zijn; deze eigenschap, jarenlang slechts een vermoeden, werd uiteindelijk in 1978 door Yamazato bewezen.

Zij X een $\mathbb{Z}_+$-waardige (niet-ontaarde) stochastische variabele. Dan kan X natuurlijk niet aan (1) voldoen; het is zelfs zó dat alle zelf-ontbindbare verdelingen noodzakelijk absoluut-continu zijn. We proberen daarom de fractie αX in (1) te vervangen door een *geheelwaardige fractie* $\alpha \odot X$: beschouw daartoe αX als $\alpha + \cdots + \alpha$ (X maal) en vervang hierin de α's door onafhankelijke, alternatief (α) op $\{0,1\}$ verdeelde variabelen $Z_1, Z_2, \ldots$, ook onafhankelijk van X; dan krijgen we

$$\alpha \odot X := Z_1 + \cdots + Z_X. \tag{2}$$

Merk op dat voor $n \in \mathbb{Z}_+$ de fractie $\alpha \odot n$ geen constante is, maar een binomiaal (n, α) verdeelde stochast. De operatie $\odot$, die daarom wel *binomial thinning* genoemd wordt, heeft allerlei eigenschappen van een vermenigvuldiging, en $\alpha \odot X$ heeft een verwachting zoals gewenst, namelijk gelijk aan $\alpha \mathbb{E} X$.

Een $\mathbb{Z}_+$-waardige stochast X wordt nu *discreet zelf-ontbindbaar* genoemd indien, analoog aan (1):

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} \alpha \odot X + X_\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

met in het rechterlid X_α onafhankelijk van $\alpha \odot X$. De resulterende discreet zelf-ontbindbare verdelingen blijken alle *oneindig deelbaar* te zijn en *unimodaal*. De *negatief-binomiale* en de *Poisson*-verdeling zijn speciale gevallen. De laatste verdeling is ook *discreet stabiel* in de (analoge) zin dat een bijbehorende variabele X voor zekere $\gamma \in (0,1]$ voldoet aan

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{n^{1/\gamma}} \odot (X_1 + \cdots + X_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

met $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijk en $\overset{\mathrm{d}}{=} X$; neem maar $\gamma = 1$.

Meer informatie over discrete zelf-ontbindbaarheid en stabiliteit is, behalve in [3] en [20], te vinden in het basisartikel [19]. In [5] wordt aangetoond dat álle redelijke geheelwaardige fracties in verdeling gekarakteriseerd worden door compositie-halfgroepen $\mathcal{F} = (F_t)_{t \ge 0}$ van kansgenererende functies (kgf's) zoals die voorkomen bij sub-kritische *vertakkingsprocessen*; voor de kgf van de bij $\mathcal{F}$ horende fractie $\alpha \odot_{\mathcal{F}} X$ geldt dan:

$$P_{\alpha \odot_{\mathcal{F}} X}(z) = P_X(F_t(z)) \quad (0 < \alpha < 1; t := -\log \alpha). \tag{5}$$

Merk op dat het eerst beschouwde (standaard) geval verkregen wordt door gebruik van de halfgroep $\mathcal{F}$ met $F_t(z) = 1 - e^{-t} + e^{-t} z$ voor $t \ge 0$. Door in (3) en (4) $\odot$ te vervangen door $\odot_{\mathcal{F}}$ krijgen we *$\mathcal{F}$-zelf-ontbindbare* en *$\mathcal{F}$-stabiele* verdelingen op $\mathbb{Z}_+$ die alle weer *oneindig deelbaar* blijken te zijn; de unimodaliteit gaat echter wel verloren.

Klaas van Harn

Een extreem geval van de inspectieparadox

Een bekend deelgebied van de kansrekening is *vernieuwingstheorie*. Men gaat daarbij uit van onafhankelijke, niet-negatieve stochastische variabelen $X_1, X_2, \ldots$, de *levensduren* (van achtereenvolgens ingeschakelde onderdelen), die alle dezelfde verdeling hebben, zeg $\overset{\mathrm{d}}{=} X$; we beperken ons hier tot het geval waarin X absoluut-continu verdeeld is met dichtheid f en een eindige verwachting μ heeft. Zij $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, het *$n$-de vernieuwingstijdstip*, en beschouw voor $t > 0$ het *aantal vernieuwingen* voor of op tijdstip t (eindig met kans 1 wegens de sterke wet van grote aantallen):

$$N(t) := \#(\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}).$$

Inspecteer nu, voor $t > 0$, het onderdeel dat ten tijde t in bedrijf is; voor de levensduur hiervan, de *momentane levensduur* $L_X(t)$ *ten tijde* t, geldt: $L_X(t) = X_{N(t)+1}$. Men zou kunnen vermoeden dat deze (weliswaar speciale) levensduur dezelfde verdeling heeft als alle andere (gewone) levensduren: $L_X(t) \overset{\mathrm{d}}{=} X$, maar dat is *niet* het geval; dit fenomeen staat bekend als de *inspectieparadox*. Een en ander wordt nog concreter wanneer $t \to \infty$; men kan bewijzen dat dan $L_X(t) \overset{\mathrm{d}}{\to} L_X$, waarbij L_X absoluut-continu verdeeld is met dichtheid g gegeven door

$$g(x) = \frac{1}{\mu} x f(x), \quad x > 0. \tag{1}$$

Hiermee volgt dat L_X stochastisch groter dan (of gelijk aan) X is in de zin dat $\mathbb{P}(L_X > a) \geq \mathbb{P}(X > a)$ voor alle a, en men zou zich kunnen afvragen voor welke levensduren X geldt dat

$$L_X \overset{\mathrm{d}}{=} X + Y \quad \text{met } X \text{ en } Y \geq 0 \textit{ onafhankelijk.} \tag{2}$$

Door de gelijkheid hierin in termen van dichtheden weer te geven krijgen we een functionaalvergelijking waarvan bekend is dat deze oneindige deelbaarheid karakteriseert; voor details verwijzen we naar [4]. We concluderen dat (2) geldt als en alleen als X *oneindig deelbaar* is.

Maar dit is nog niet alles. Neem voor de generieke levensduur X in het voorgaande de variabele $X(t)$ met $t > 0$, waarbij $(X(t))_{t \geq 0}$ een proces is met stationaire en onafhankelijke aangroeiingen; behalve de generator $X(1)$ is ook $X(t)$ dan oneindig deelbaar. Dat betekent dat voor de momentane levensduur $L_{X(t)}$ de volgende decompositie geldt:

$$L_{X(t)} \overset{\mathrm{d}}{=} X(t) + Y(t) \quad \text{met } X(t) \text{ en } Y(t) \geq 0 \text{ onafhankelijk.} \tag{3}$$

Nu blijkt echter dat de ‘additionele component’ $Y(t)$ *niet afhangt van* t: $Y(t) = Y$ voor alle t. Laat nu $t \downarrow 0$, dan gaat de (gewone) levensduur $X(t)$ naar 0: $X(t) \overset{\mathrm{d}}{\to} 0$, en men zou verwachten dat de momentane levensduur, hoewel stochastisch groter, dan ook naar 0 gaat. Dat is echter *niet* het geval:

$$L_{X(t)} \overset{\mathrm{d}}{\to} Y, \quad t \downarrow 0. \tag{4}$$

Ingeval $X(1)$ exponentieel verdeeld is, blijkt Y dat ook te zijn; door dan $t = 1/(n-1)$ te nemen wordt duidelijk dat de inspectieparadox in dit geval een ‘onbeperkt’, en daarmee extreem, aspect krijgt:

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is er een levensduur X zó dat de corresponderende momentane levensduur L_X als onafhankelijke componenten n gewone levensduren heeft.

Klaas van Harn

Referenties

1 S.N. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, *Comm. Soc. Math. Kharkov* 2 Series XIII (1912), 1–2.

2 C.G. Esseen, Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen, *Numer. Math.* 2 (1960), 206–213.

3 K. van Harn, *Classifying Infinitely Divisible Distributions by Functional Equations*, Mathematical Centre Tracts 103, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.

4 K. van Harn en F.W. Steutel, Infinite divisibility and the waiting-time paradox, *Stoch. Models* 11 (1995), 527–540.

5 K. van Harn, F.W. Steutel en W. Vervaat, Self-decomposable discrete distributions and branching processes, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* 61 (1982), 97–118.

6 Dunham Jackson, *The Theory of Approximation*, Amer. Math. Soc., Providence, 1930.

7 J.L. Konings en B.E.M. Span (red.), *Alle 80 goed! 17 november 2011 – Fred Steutel 80 jaar,* Technische Universiteit Eindhoven, 2011.

8 P.P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory,* Hindustan Publishing Corporation, 1960.

9 J.H. Leopold, *Verzen,* G.A. van Oorschot, 1977.

10 G.G. Lorentz, *Bernstein Polynomials,* University of Toronto Press, 1953.

11 I.P. Natanson, *Konstruktive Funktionentheorie,* Akademie-Verlag, 1955.

12 A. Roland Holst, *In den verleden tijd,* Boelen, 1975.

13 F. Schurer, *On Linear Positive Operators in Approximation Theory,* Waltman, 1965.

14 F. Schurer en F.W. Steutel, On linear positive operators of the Jackson type, *Mathematica (Cluj)* 9(32) (1967), 155–184.

15 F. Schurer en F.W. Steutel, The degree of local approximation of functions in $C_1[0,1]$ by Bernstein polynomials, *J. Approx. Theory* 19 (1977), 69–82.

16 P.C. Sikkema, Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen, *Numer. Math.* 3 (1961), 107–116.

17 F.W. Steutel, *Preservation of Infinite Divisibility under Mixing, and Related Topics,* Mathematical Centre Tracts 33, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1970.

18 F.W. Steutel, *Laatste kansen,* Technische Universiteit Eindhoven, 1996.

19 F.W. Steutel en K. van Harn, Discrete analogues of self-decomposability and stability, *Ann. Probab.* 7 (1979), 893–899.

20 Fred W. Steutel en Klaas van Harn, *Infinite Divisibility of Probability Distributions on the Real Line,* Pure and Applied Mathematics 259, Marcel Dekker, 2004.

21 E. Voronovskaya, Détermination de la forme asymptotique de l‘approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein (Russisch), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* A 4 (1932), 79–85.