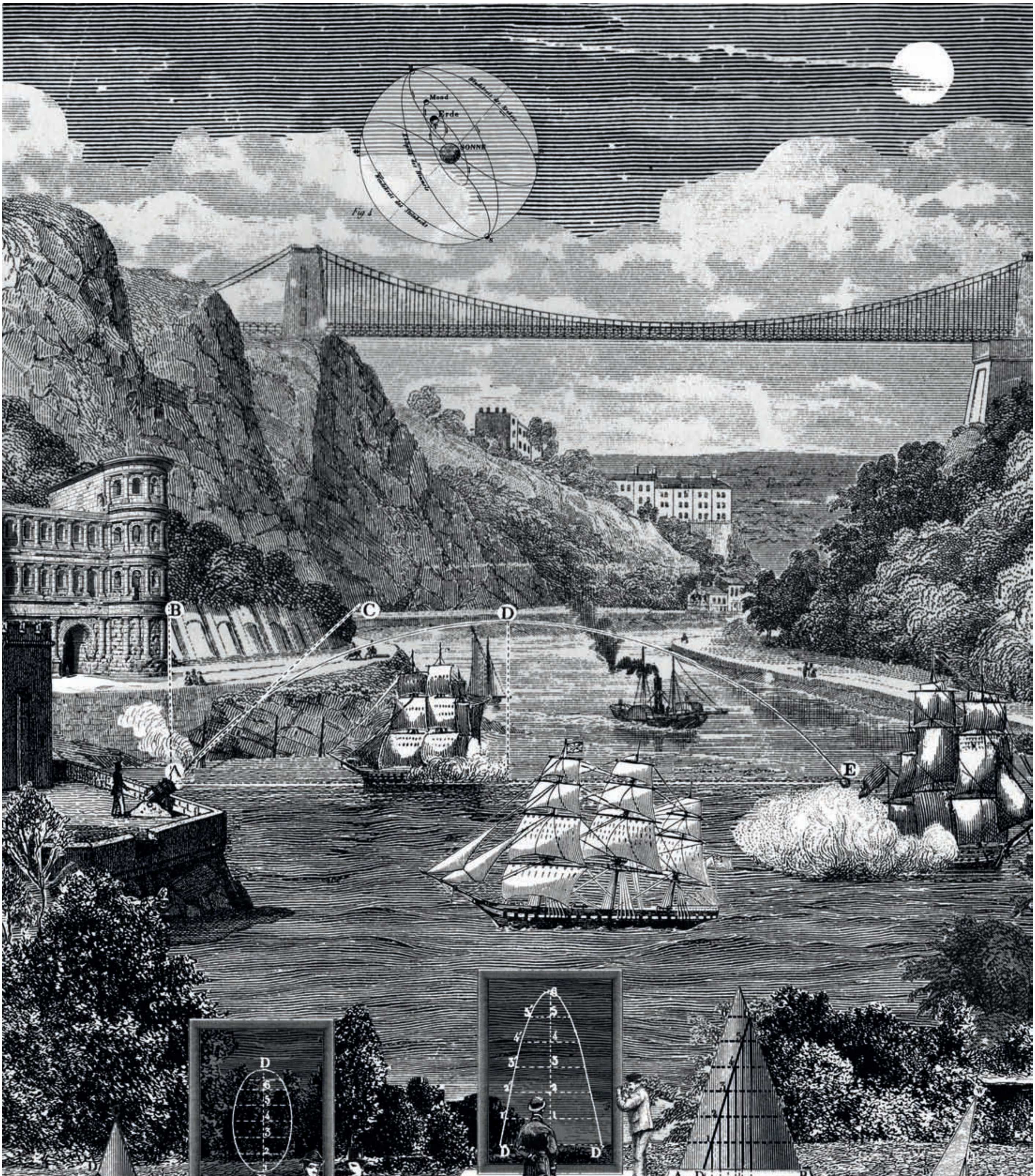


Illustratie: Ryu Tajiri

Fokko Jan Dijksterhuis
Science, Technology and Policy Studies (STePS)
Universiteit Twente
f.j.dijksterhuis@utwente.nl

Vakantiecursus

Krommen pletten: kegelsneden in de Gouden Eeuw

Op de vakantiecursus 2015 van het Platform Wiskunde Nederland sprak Fokko Jan Dijksterhuis over de geboorte van de analytische meetkunde in Nederland in de Gouden Eeuw. Dit artikel is een weergave van zijn voordracht. Hij vertelt hoe Frans van Schooten de nieuwe meetkunde aan de praktijk koppelde door het tekenen van kegelsneden.

In 1646 publiceerde Frans van Schooten de Jongere (1615–1660) zijn eerste boek: *Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione, tractatus* (Verhandeling over de mechanische beschrijving van kegelsneden in het platte vlak). Het kan beschouwd worden als een soort sollicitatiebrief waarin hij zijn wiskundige bekwaamheid tentoonspreidde. Van Schooten was kandidaat om zijn vader Frans van Schooten de Oudere (1581–1645) op te volgen als hoogleraar 'Duytsche Mathematique' in Leiden. Dit was een driejarige opleiding aan de Universiteit Leiden ten behoeve van vestingbouwers, landmeters en andere mensen uit de praktijk. Wiskunde werd onderwezen in de landstaal — Duytsch, dat wil zeggen Nederlands — en niet in het Latijn zoals gebruikelijk in de academie. Niet alleen de taal was aangepast, ook de inhoud van het programma was praktisch georiënteerd.[1] Frans jr. had zijn vader al regelmatig geassisteerd en vervangen en uiteindelijk werd hij inderdaad benoemd als de nieuwe hoogleraar. De *Organica* was niet in het Nederlands geschreven en ging over een onderwerp dat geen onderdeel van de 'Duytsche Mathematique' was. Desondanks was het een heel passende proeve van bekwaamheid voor deze positie. Van Schooten liet zien dat hij zeer kundig was in de wiskunde, maar bovendien wist hoe je die vertaalde naar de praktijk.

Mechanische beschrijving van kegelsneden in het vlak, aldus de titel. Aangevuld met: bruikbaar voor meetkundigen, optici, en in het bijzonder voor gnonomici en mechanici. (Dat laatste wil zeggen: bouwers van zonnewijzers en werktuigen.) Wat moeten we ons bij een mechanische beschrijving van kegelsneden in een vlak voorstellen? Kegelsneden waren een klassiek onderwerp uit de wiskunde, maar Van Schooten behandelde het op een nieuwe manier. Gelukkig vertaalde hij zijn boekje een jaar of tien later naar het Nederlands: *Tuych-werckelijcke beschrijving der kegelsneden op een vlack*. Het was onderdeel van: Francisci van Schooten, *Mathematische oeffeningen, begrepen in vijf boecken* (Leiden, 1660).[2] Zo kunnen we op ons gemak lezen wat er nieuw aan zijn aanpak was en waarom hij die verkoos. Nadat hij uitgelegd had hoe nuttig het tekenen van parabolen, ellipsen, en hyperbolen was voor zaken als lenzenslijpen, tuinaanleg, ornamenten, en zonnewijzers, vervolgde Van Schooten:

> Waerom, nadien het beſchrijven der Kegel-ſneden op een vlack tot ſo veelderhande dingen te pas komt, wat wonder iſſer, dat in't bevorderen van de leering der Kegel-ſneden de treffelijckſte *Mathematici* van oudts af haer ſo hebben bevlijticht, en datter doorgaens, en byſonder in deſe eeuw, een nieuwen aenwas by gekomen is? Doch het geen my wonder geeft, is, dat niemant tot noch toe (dat ick weet) deſe moeyten op hem genomen heeft, namentlijck, datter iemandt gevonden zy, die van de Tuych-werckelijcke beſchrijving der Kegel-ſneden heeft gehandelt, en deſelve in yder voorval betoont.

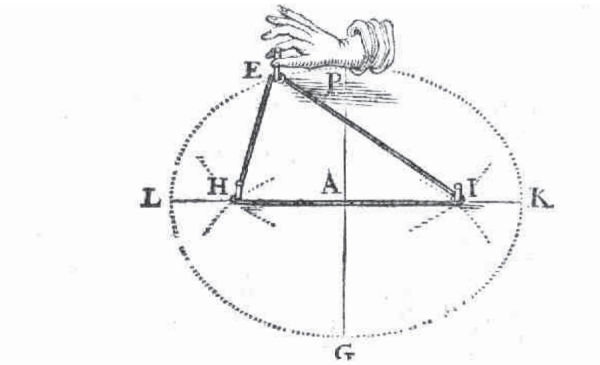
Met andere woorden: Van Schooten verbaasde zich erover dat het tekenen van kegelsneden in het vlak nog nooit wiskundig behandeld was. De 'mathematici' hielden zich aan de klassieke definitie waarbij een kegelsnede voortgebracht wordt door — zoals het woord al zegt — een kegel met een plat vlak te snijden. Deze definitie ging terug op het hoofdwerk van de kegelsneden, de *Konika* van Apollonius van Perga (circa 262–190 v. Chr.). Deze ruimtelijke constructie speelde geen rol bij het tekenen van ellipsen, hyperbolen, en parabolen in het platte vlak. Dat riep de vraag op in hoeverre die praktische aanpak wiskundig onderbouwd was. Van Schooten wilde in deze lacune voorzien.

Tuiniersellips

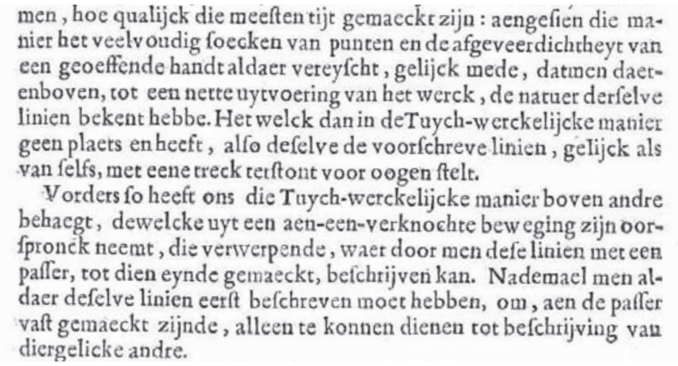
Een klassiek voorbeeld van zo'n vlakke voortbrenging is de tuiniersellips. Sla twee pinnen in de grond, leg er een dichtgeknoopt touw omheen, trek een kromme rondom de pinnen met de strakgetrokken lus. Van Schooten liet zien dat deze kromme daadwerkelijk een ellips was die voldeed aan de eigenschappen die Apollonius had afgeleid. Tamelijk triviaal: Stelling 52 van Boek 3 van de *Konika* zegt dat de som van de afstanden van een punt op de ellips tot de brandpunten constant is (zie Figuur 1).

Met deze tuiniersellips zijn we ook direct bij de kern van Van Schootens boek. Het is een voorbeeld van een 'tuych-werckelijcke' beschrijving. Er waren ook andere manieren om kegelsneden in het platte vlak voort te brengen, maar die veronderstelden veelal beheersing van de wiskunde. Een voorbeeld is de puntsgewijze constructie. De werktuigelijke voortbrenging daarentegen bestond uit één vloeiende beweging waarvoor alleen het juiste instrument nodig was.

In zijn boek introduceerde Van Schooten instrumenten waarmee mensen uit de praktijk zo'n aan-een-verknochte beweging (zie Figuur 2) tot stand konden brengen en toonde aan dat de resultaten wiskundig correct waren. Deze combinatie van praktisch vernuft en wiskundige grondigheid was precies wat men van een hoogleraar 'Duytsche Mathematique' mocht verwachten.



Figuur 1 Illustratie *Mathematische oeffeningen*, p. 302.


men, hoe qualijck die meeſten tijt gemaeckt zijn: aengeſien die manier het veelvoudig ſoecken van punten en de afgeveerdichtheyt van een geoeffende handt aldaer vereyſcht, gelijck mede, datmen daerenboven, tot een nette uytvoering van het werck, de natuer derſelve linien bekent hebbe. Het welck dan in de Tuych-werckelijcke manier geen plaets en heeft, alſo deſelve de voorſchreve linien, gelijck als van ſelfs, met eene treck terſtont voor oogen ſtelt.

Vorders ſo heeft ons die Tuych-werckelijcke manier boven andre behaegt, dewelcke uyt een aen-een-verknochte beweging zijn oorſpronck neemt, die verwerpende, waer door men deſe linien met een paſſer, tot dien eynde gemaeckt, beſchrijven kan. Nademael men aldaer deſelve linien eerſt beſchreven moet hebben, om, aen de paſſer vaſt gemaeckt zijnde, alleen te konnen dienen tot beſchrijving van diergelicke andre.

Figuur 2 Fragment uit *Mathematische oeffeningen*, p. 281.

Reconstructies van de Konika

De *Konika* van Apollonius kennen een bewogen geschiedenis waarin Leiden een bijzondere rol speelt. In de Renaissance herleefde de belangstelling voor de klassieke wiskunde en voor oorspronkelijke teksten in het bijzonder. Het bestaan van de *Konika* was bekend, maar er waren slechts vier van de acht boeken overgeleverd. Naast het vertalen en redigeren van de oorspronkelijke teksten, maakten wiskundigen zoals Willebrord Snellius (1580–1626) reconstructies van de verloren boeken. Jacob Golius (1596–1667) zorgde in 1627 voor een doorbraak. Hij vond een handschrift met een Arabische vertaling van de *Konika* die drie van de vier verloren boeken bevatte. Het was de zogenaamde Banû Mûsâ-editie uit Bagdad, gemaakt door Thâbit ibn Qurra (826–901) in de negende eeuw en beschouwd als de meest originele en complete versie.[3]

Golius was arabist en één van de grondleggers van de oosterse letterkunde in Leiden. Maar hij was ook wiskundige — in de breedste zin van het woord — en dat combineerde hij met zijn talenkennis. Zo kon hij een tekst als de *Konika* bestuderen. De combinatie van bekwaamheden bracht hem als student in de Arabische wereld, bij diplomatieke missies naar de Maghreb en de Levant. In Aleppo vond hij het Banû Mûsâ-manuscript en bracht dat in 1629 terug naar Leiden als onderdeel van een grote collectie waardevolle handschriften. De buit werd vergeleken met de Zilvervloot en het leverde Golius een benoeming op als hoogleraar wiskunde — de leerstoel Arabisch had hij een paar jaar eerder al verworven. Met het Apollonius-manuscript zou Golius verder niet zoveel doen: zijn vertaling en editie kwam nooit af en het belandde uiteindelijk in Oxford waar Halley in 1710 een editie publiceerde. Golius wijdde wel zijn leerlingen in in de geheimen van de kegelsneden, waaronder de jonge Frans van Schooten die inzage in het originele handschrift kreeg.

Instrument van twee linialen

Van Schooten gaf, zoals we zagen, een geheel eigen, tuigwerkelijke draai aan de kegelsneden. Nogmaals de ellips, maar nu met het instrument van Van Schooten (zie Figuur 3. Het instrument is simpel maar doeltreffend: twee linialen AB en BD scharnieren om elkaar in B; het geheel is vastgemaakt in draaipunt A, terwijl uiteinde D over een rechte lijn door A beweegt. Een punt E op BD (of het verlengde daarvan) beschrijft een ellips. Van Schooten toont dat netjes aan.[4]

Bij dit instrument wordt uitgegaan van de beide diameters. Van Schooten gaf ook een constructie voor het geval brandpunten en toppen gegeven waren. In de brandpunten werden kruisende linialen vastgemaakt met lengte van de diameter, aan de andere zijde verbonden door een liniaal met lengte van de brandpuntsafstand. Het kruispunt van eerste twee beschrijft een ellips. Voor de hyperbool en de parabool vergelijkbaar: in het eerste geval zijn de linialen zo lang als de brandpuntsafstand en ligt het kruispunt voorbij de brandpunten; in het tweede laat je een touwtje dat vastgemaakt is in het brandpunt van een winkelhaak lopen die evenwijdig aan de as beweegt. Van Schooten leidde allerlei eigenschappen af en stelde ook een instrument voor om schuine ellipsen te tekenen.

In het vierde hoofdstuk kwam hij terug bij het oorspronkelijke instrument maar vanuit een andere invalshoek (zie Figuur 4). Het verschil is subtiel maar evident. Het instrument wordt hier in zijn constructie en gebruik besproken. De gedetailleerde wiskundige achtergrond is verdwenen. In de plaats daarvan zijn tastbare latten en ijverige handjes gekomen.

Op deze manier maakte Van Schooten de overstap van meetkundig principe naar praktisch gebruik. En weer terug: analyse en handeling vallen in de Tuych-wercken van Van Schooten volledig samen. Hij geeft een theoretische onderbouwing van tekenpraktijken en een praktische invulling van de analyse van krommen.

Nieuwe definitie van 'exactheid'

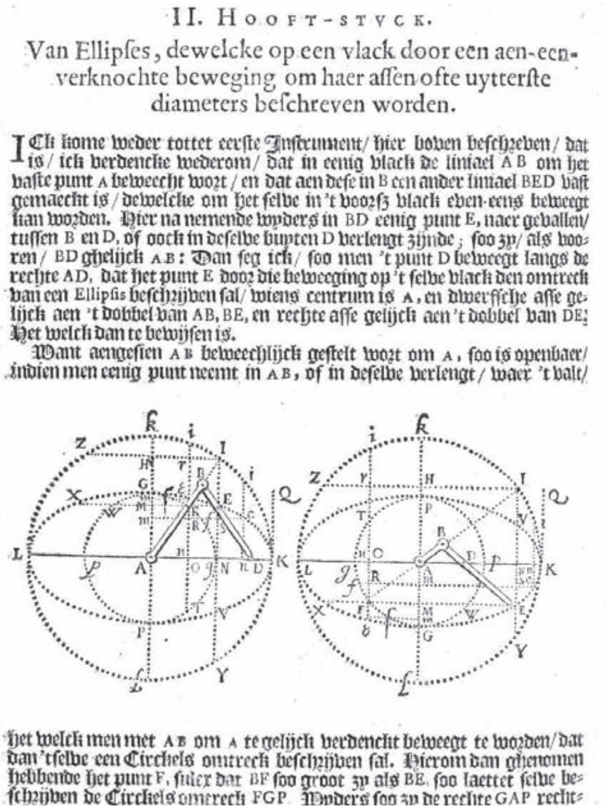
Op de achtergrond speelt hier de nieuwe meetkunde van René Descartes: *La Géométrie*, gepubliceerd in 1637 als één van de essays bij zijn *Discours de la Méthode*. Descartes koppelde hierin meetkunde en algebra, waarbij vergelijkingen de oplossing voor meetkundige vraagstukken gaven. Frans van Schooten was als student nauw betrokken bij de totstandkoming van het essay: hij was één van de lezers van de tekst in wording en maakte uiteindelijk de gravures bij het *Discours*.

Zoals Henk Bos heeft laten zien draaide het in *La Géométrie* om een nieuwe definitie van 'exactheid': welke objecten zijn wiskundig (en welke niet).[5] De klassieke, Euclidische definitie stelt dat mathematisch datgene is wat met passer en liniaal opgelost kan worden. Dat leverde onoplosbare problemen als de kwadratuur van de cirkel en de driedeling van de hoek op. Aan dergelijke problemen, alsmede zaken als kegelsneden, werd overigens uitgebreid onderzoek gedaan met waardevolle resultaten. Denk alleen al aan de *Konika* van Apollonius en de verzameling vraagstukken in Pappos' *Synagoge*. Descartes breidde het begrip exactheid uit: een kromme is mathematisch als hij voortgebracht kan worden door een continue beweging. Dat kan direct zoals met een cirkel, of zoals in de constructies van Van Schooten die aangestuurd worden door een eenparige beweging. Waar het bij Descartes abstract-conceptueel bleef, maakte Van Schooten het concreet en praktisch. De mechanische bewegingen van zijn ellipsografen waren precies de continue beweging die Descartes bedoelde. Een kinematica van de meetkunde.

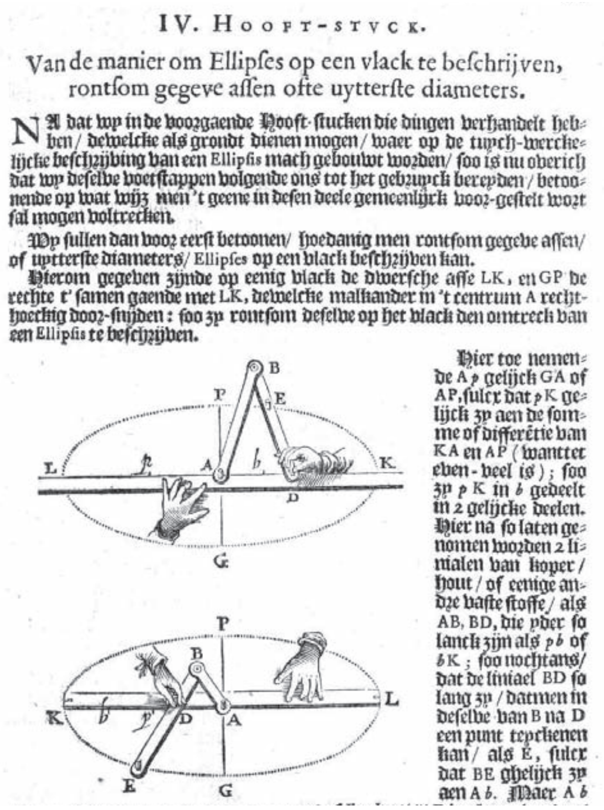
Geometria

Met de *Organica* sloeg Van Schooten de brug tussen de 'geometria' van Euclides en Descartes enerzijds en de 'meetkonst' van landmeters en vestingbouwers anderzijds. Het was echter vooral een proeve van zijn bekwaamheid om les te geven aan de Duytsche Mathematique, geen lesboek. Alleen al vanwege het Latijn was het boekje niet geschikt voor de studenten van de ingenieursschool. Van Schooten trok er een ander type studenten mee: zonen van de gegoede burgerij die belangstelling hadden voor de nieuwe wiskunde en wijsbegeerte van mensen als Descartes. Zoals Christiaan, de tweede zoon van Descartes' beschermheer Constantijn Huygens; Johannes Hudde, een Amsterdams patriciër; en Johan, zoon van het voorname Dordtse geslacht De Witt. In zijn 'privatissimae' bestudeerde Van Schooten met hen de *Géométrie* van Descartes, schreef toelichtingen en aanvullingen, hetgeen uiteindelijk uitmondde in zijn levenswerk: *Geometria, à Renato Des Cartes*. In 1649 gaf hij de eerste editie uit, in 1659–1660 verscheen de tweede, uitgebreid met tal van aanvullingen en annotaties.

Eén van de bijlagen van de *Geometria* was een beschouwing van één van zijn voorname studenten over kegelsneden. In *Elementa Curvarum Linearum* werkte Johan de Witt een analytische behandeling van kegelsneden uit.[6] Hij zette hiermee het werk van zijn leermeester voort, en zette tegelijkertijd een stap verder. De platte voortbrenging was voor De Witt de grondslag van de analyse van krommen. Hij had geen last van de bescheidenheid van Van Schooten: "... achtte ik het volslagen in te gaan tegen de natuurlijke orde, die men in de wiskunde zoveel mogelijk in acht moet nemen, dat men de oorsprong van deze krommen zoekt in een ruimtelijk lichaam en deze vervolgens overbrengt naar het platte vlak." Hiermee hadden de klassieken afgedaan en waren de kegelsneden definitief geplet.



Figuur 3 Begin van hoofdstuk II van de *Mathematische oeffeningen*, p. 288.



Figuur 4 Begin van hoofdstuk IV van de *Mathematische oeffeningen*, p. 299.

Noten en referenties

1 Zie ook F.J. Dijksterhuis, The Golden Age of Mathematics: Stevin, Huygens and the Dutch Republic, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/9(2) (2008), 100–107.

2 Hierin is ook Christiaan Huygens' *Van Rekeningh in Spelen van Geluck* te vinden, de eerste publicatie op het gebied van kansrekening. De *Mathematische oeffeningen* staan online bij http://bc.library.uu.nl.

3 F.J. Dijksterhuis. Moving Around the Ellipse. Conic Sections in Leiden, 1620–1660, in: Sven Dupré en Christoph Lüthy (eds.), *Silent Messengers: The Circulation of Material Objects of Knowledge in the Early Modern Low Countries*, Lit, 2011, pp. 89–124

4 Henk Hietbrink heeft de constructies verzameld op www.fransvanschooten.nl en een GeoGebra-app geschreven om ermee te spelen.

5 Henk Bos, *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer, 2001.

6 Beide delen zijn vertaald en toegelicht door A.W. Grootendorst; Jan de Witt, *Elementa Curvarum Linearum. Liber Primus* (CWI, 1997); *Liber Secundus* (CWI, 2003).