Jaap Korevaar
*Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde*
*Universiteit van Amsterdam*
*j.korevaar@uva.nl*

**Evenement** Voordracht op NMC 2017 ter ere van 75-jarig lidmaatschap KWG

# Wie en wat mij geholpen heeft om wiskundige te worden

**Tijdens het Nederlands Mathematisch Congres van 11 en 12 april is op speciale manier gevierd dat Jaap Korevaar en Fred van der Blij dit jaar precies 75 jaar lid zijn van het Wiskundig Genootschap. Jaap Korevaar is uitgenodigd terug te blikken op zijn lange carrière. Fred van der Blij, wiens gezondheid het niet toeliet aanwezig te zijn op het NMC, is thuis in het zonnetje gezet door het KWG.**

### Cornelis Visser (1910–2001)

Ik begin met Visser, die in de tweede tot en met de vierde klas (1936–39) mijn wiskundeleraar was op de hbs in Dordrecht. Hij was gepromoveerd bij Julius Wolff (1882–1945) in Utrecht en kwam in 1936 terug van een vruchtbaar postdocjaar aan Harvard en Princeton (vergelijk Kortram [34]). Ik was een lastige leerling, vroeg bij alles: “Waarom?” Maar dat vond hij niet erg en na een stroef begin ging het heel goed. Het is door Visser dat ik wiskunde ben gaan studeren. Maar waarom wil je naar Leiden en niet naar Utrecht, vroeg hij. Wel, zei ik, Leiden is toch de oudste en beste universiteit van Nederland? Nou ja, zei Visser, ze hebben daar in elk geval Kloosterman, en die is wel goed! (Kloosterman zou vooral bekend worden door zijn artikelen [17] in de *Annals of Mathematics* van 1946. Zie ook de Bruijn [3].) Visser zou na de oorlog hoogleraar worden in Delft, en daarna in Leiden.

### H.D. Kloosterman (1900–1968)

Ik ging dus in september 1940 naar Leiden, waar ik meteen bevriend werd met Fred van der Blij en met natuurkundestudent Hans Tolhoek. We genoten van het college differentiaal- en integraalrekening van lector Kloosterman, dat na Kerstmis over moest gaan in exacte analyse. Eigenwijs als Fred en ik waren gingen we ook naar zijn caputcollege getaltheorie voor ouderejaars, dat we redelijk goed konden volgen. Kloosterman was een buitengewoon heldere docent. Geen woord te weinig, naar ook niks te veel. Hij begon zijn college altijd links boven op het bord te schrijven en eindigde na een uur keurig rechts beneden. Hij had ook een heel speciaal gevoel voor humor. Je kon de collegezaal voor of achter binnenkomen. Op de eerste dag deed Kloosterman, die altijd aan de voorkant binnenkwam, demonstratief de achterste deur dicht, met de woorden: “Ik doe deze deur één keer per jaar dicht; in het vervolg doet de *laatste* student die binnenkomt hem dicht.”


Cornelis Visser


Fred van der Blij


H.D. Kloosterman

Maar de universiteit werd op last van de Duitse bezetter *gesloten*, na het protest tegen het ontslag van de Joodse hoogleraren en de rede van Cleveringa op 26 november 1940. Leiden zou in de oorlog niet meer open gaan. (De oude meetkundige Prof. W. van der Woude (1876–1974) speelde daarbij een belangrijke rol. Hij werd Rector en gaf eind 1941 niet toe aan de eisen van de bezetter voor heropening.)

Studenten konden thuis studeren uit dictaten van ouderejaars, en (althans tot eind 1941) tentamen doen bij docenten aan huis. Ik begon ijverig te studeren uit het dictaat van Kloostermans tweejarige college analyse dat ik netjes overschreef. Fred van der Blij en ik kochten daarnaast enkele boeken: Pólya en Szegő's *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, en de mooie kleine boekjes van Knopp over functietheorie uit de *Sammlung Göschen*. Ik bestudeerde verder het boek van Knopp, *Unendliche Reihen*, dat ik tweedehands had kunnen kopen. In 1941 en ook daarna kwam ik geregeld bij Visser thuis. Hij informeerde dan hoe het met de studie ging, en hij leende mij het boek van Schuh over 'Het getalbegrip'.

### Tauberstellingen

In Kloostermans dictaat werd al gauw de continuïteitsstelling van Abel bewezen: Als een reeks $\sum a_n$ convergeert, met som $A$, dan zal de somfunctie van de machtreeks

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad 0 \le x < 1,$$

limiet $A$ hebben voor $x \nearrow 1$. Maar kun je dat ook omkeren? Niet zonder meer, denk aan de reeks $1-1+1-1+\cdots$ en

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}.$$

Je hebt een extra voorwaarde nodig voor een omkering van Abels stelling. In 1897 bewees de Oostenrijkse wiskundige Arnold Tauber (1866–1942) dat de nevenvoorwaarde $na_n \to 0$ voldoende is voor convergentie $\sum a_n = A$, zie [46]. (Na zijn habilitatie werkte Tauber als verzekeringswiskundige. In 1900 werd hij hoogleraar, eerst aan de Technische Hogeschool in Wenen, later aan de Universiteit. Helaas zou hij (net als Wolff) omkomen in een concentratiekamp.) In Kloostermans dictaat stond vervolgens dat de zwakkere nevenvoorwaarde '$na_n$ begrensd' voldoende is voor omkering van Abels stelling. Dat was in 1911 bewezen door J.E. Littlewood (1885–1977), zie


J.E. Littlewood

[35]. Het was een vermoeden geweest van G.H. Hardy (1877–1947) en werd het begin van een lange en ongewoon vruchtbare samenwerking. Hardy en Littlewood introduceerden de naam Tauberstellingen en zouden er samen heel veel bewijzen, zie bijvoorbeeld [11,12] en hun stelling over Lambertreeksen verderop in dit artikel. Hun bewijzen met herhaalde differentiatie waren wel erg ingewikkeld. Voor het geval van machtreeksen zou J. Karamata (1902–1967) in 1930 een veel eenvoudiger bewijs geven [15], dat gebruik maakte van uniforme approximatie met veeltermen.

In 1941 vroeg ik aan Visser hoe je Tauberstellingen kon bewijzen. Hij wist blijkbaar veel over zulke stellingen en stelde voor dat ik kon proberen om een makkelijkere omkeerstelling te bewijzen. Wanneer $\sum a_n$ convergeert met som $A$, dan hebben de gemiddelden van de partiële sommen $s_k$, namelijk

$$\frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}}{n},$$

ook limiet $A$ als $n \to \infty$. Probeer te bewijzen dat *hier* de nevenvoorwaarde '$na_n$ begrensd' voldoende is voor omkering. Dat kon ik; het bleek later een stelling te zijn van Hardy [10] uit 1910. (Nog later zou ik er achter komen dat Kloosterman in 1940 [16] een heel mooi bewijs had gegeven voor Hardy's stelling, met behulp van een discrete Taylor-formule.)

Bij een later bezoek vertelde Visser dat hij bezig was met een nieuwe aanpak van Wieners algemene Taubertheorie [49] uit 1932.

### WG, collectie Blumenthal

In Januari 1942 mochten de Leidse studenten elders verder studeren. Fred van der Blij en ik (en Hans Tolhoek) gingen naar Utrecht, waar ik eind 1942 kandidaatsexamen deed. (Fred had dat eind 1941 nog net in Leiden kunnen doen.) We werden lid van het Wiskundig Genootschap en genoten van de *Wiskundige Opgaven* die het Genootschap publiceerde. We wedijverden met elkaar wie de meeste kon oplossen. In die tijd werd ik ook bevriend met een andere trouwe oplosser, de iets oudere N.G. (Dick) de Bruijn (1918–2012). Goede oplossingen konden gepubliceerd worden in het tijdschrift *Wiskundige Opgaven met de Oplossingen*. De verdienstelijke redacteur was prof. H. Bremekamp (1880–1963) in Delft; vergelijk ook Timman [47]. In 1943 volgde ik Dick de Bruijn als assistent aan de TH Delft; na zijn promotie ging Dick naar het Philips NatLab. In Delft kwam ik er achter dat prof. Bremekamp 'verre familie' was: zijn vrouw was een nicht van mijn opa Wepster, die over Bremekamp sprak als 'mijn neef Henkie'.

In Delft maakte ik kennis met de belangrijke collectie overdrukken van Otto Blumenthal (1876–1944), die lang Hilberts medewerker was geweest bij de *Mathematische Annalen*. Blumenthal was kort voor de oorlog naar Nederland uitgeweken, met zijn uitgebreide bibliotheek; hij had onder andere contact met prof. Jan Burgers in Delft. (Maar hij zou helaas toch omkomen in een concentratiekamp.)

In de 'collectie Blumenthal' heb ik Bochners vereenvoudigde behandeling van Wienertheorie gevonden [2]. Daar heb ik ook kennis gemaakt met de representatiestellingen van F. Riesz (1880–1956) voor continue lineaire functionalen, vergelijk [42]. Ik begon toen naarstig te zoeken naar een elementair bewijs voor de priemgetalstelling. Zoals bekend zegt die dat het aantal priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \cdots \le x$$

vergelijkbaar is met $x/\log x$.(Voor een afleiding zie verderop.) Ik gebruikte het werk van Riesz om elementair Tauberstellingen te bewijzen voor Lambertreeksen. Zoals ik al eerder schreef hadden Hardy en Littlewood een belangrijke Tauberstelling bewezen voor Lambertreeksen. Om zulke reeksen te vergelijken met machtreeksen vervangt men $x$ (met $0 < x < 1$) en $x \nearrow 1$ door $e^{-t}$ (met $\infty > t > 0$) en $t \searrow 0$. Dan schrijft men de Lambertreeks als

$$F(t) = \sum a_n \frac{nt}{e^{nt}-1}.$$

Hardy en Littlewood [13] hadden in 1921 bewezen dat uit $F(t) \searrow A$ en '$na_n$ begrensd' volgt dat $\sum a_n = A$. Voor hun bewijs hadden zij echter de priemgetalstelling nodig (of zelfs een klein beetje meer). Deze onbevredigende situatie zou mede aanleiding zijn voor Norbert Wiener (1894–1964) om zijn algemene Taubertheorie [49] te ontwikkelen voor Fourierintegralen. Mijn eenvoudigere Tauberstellingen waren jammer genoeg niet sterk genoeg voor een bewijs van de priemgetalstelling! (Veel later zou ik verschillende bewijzen geven, zie bijvoorbeeld [29] (gebaseerd op Newman [40]) en mijn boek [30].) De TH Delft sloot in de lente van 1944 en nu liepen studenten en assistenten het risico opgepakt te worden voor 'Arbeitseinsatz' in Duitsland. Toen ik uit Delft thuis kwam stond er al gauw politie voor de deur. Gelukkig had mijn vader een tip gekregen en was ik ondergedoken. Na de zomer kon ik terug naar huis, maar ook daar moest ik mij verborgen houden.

### Mijn eerste artikel

Mijn eerste artikel [18] was gebaseerd op een voetnoot in het boek van G. Doetsch over de Laplace-transformatie [6]. Ik heb dat eind 1943 geschreven aan de keukentafel, toen nog de enige warme plek in huis. Het verscheen in het Nederlands, want je mocht niet in een vreemde taal publiceren (behalve Duits).

In functietheorie, of complexe analyse, zijn de belangrijke functies de analytische. Zo'n functie $f(z)$ van de complexe veranderlijke $z = x + iy$ wordt lokaal gegeven door een convergente machtreeks

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Bijvoorbeeld

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Er ligt *altijd* een singulier punt op de convergentiecirkel, de grootste cirkel om $z_0$ waarbinnen de machtreeks convergeert. Dat is een punt $z_1$ zo dat $f(z)$ op geen enkele omgeving analytisch is. Als $f(z)$ analytisch is in het hele vlak spreekt men van een *gehele functie*.

Sommige belangrijke analytische functies kunnen gegeven worden door een Dirichlet reeks,

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}, \quad s = \sigma + i\tau, \ \sigma > \alpha.$$

De eenvoudigste en belangrijkste Dirichletreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots, \quad \sigma > 1,$$

definieert de Riemann-zetafunctie $\zeta(s)$ in het halfvlak $\sigma > 1$. De som van de reeks kan analytisch voortgezet worden tot het hele complexe vlak, met uitzondering van het singuliere punt $s = 1$, waar de functie zich gedraagt als $1/(s-1)$. Er kan dus een singulier punt liggen op de rand van het convergentiegebied, maar dat *hoeft niet*, zie

$$\begin{aligned} \eta(s) &= 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - \cdots, \quad \sigma > 0 \\ &= (1 - 2^{1-s})(1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots) \\ &= (1 - 2^{1-s})\zeta(s). \end{aligned}$$

(De singulariteit van $\zeta(s)$ wordt opgeheven door de factor $1 - 2^{1-s}$.) Hierin verschilt een Dirichletreeks van een machtreeks. Doetsch had geschreven dat er over het analoge verschijnsel voor de nauw verwante Laplace-integralen nog niet gepubliceerd was.

De functie $\eta(s)$ is een gehele functie. Mijn eerste artikel [18] ging over gehele functies die voorgesteld kunnen worden door een niet overal convergente Laplace-integraal. Of in Mellin-vorm:

$$g(s) = \int_1^{\infty} f(x) x^{-s-1} dx.$$

De reeks voor $\zeta(s)$ kan uitgedrukt worden door een Mellin-integraal met de 'entier-functie' $[x]$:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \int_{1-}^{\infty} x^{-s} d[x] = -\int_1^{\infty} [x]\, dx^{-s} \\ &= s \int_1^{\infty} [x] x^{-s-1} dx. \end{aligned}$$

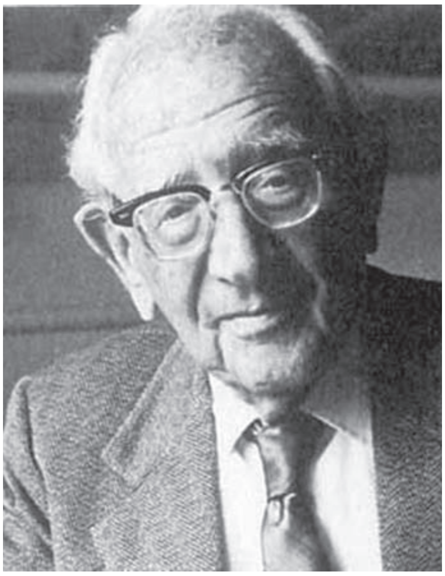
Voor Mellin-integralen $g(s)$ bewees ik:

**Stelling 1.** *Zij $f(x)$ begrensd voor $x \geq 1$, periodiek met periode $1$ en met gemiddelde $0$ over een periode. Dan kan $g(s)$ voortgezet worden tot een gehele functie.*

Het bewijs gaat stap voor stap met herhaalde partiële integratie, waarbij men elke keer een primitieve gebruikt met gemiddelde $0$. Toegepast op $f(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$ construeert men zo de analytische voortzetting van de zetafunctie. Vergelijk ook het leuke boekje van Roland van der Veen en mijn Amsterdamse collega Jan van de Craats [48].

### Mathematisch Centrum, dissertatie

In 1947 werden Fred van der Blij en ik wetenschappelijk medewerkers aan het pas opgerichte Mathematisch Centrum, in de praktijk manusjes-van-alles. Behalve onderzoek doen en avondcursussen geven moesten we onder andere helpen om de bibliotheek op te zetten. Onder de binnenkomende literatuur vond ik in 1948 een interessant boekje van Obrechkoff [41] in de Actualités Scientifiques et Industrielles. Dat behandelde oude resultaten van Laguerre en nieuwere van Pólya (1887–1985) over benadering van gehele functies door polynomen, waarvan de nulpunten reëel zijn of in een hoek liggen met opening $< \pi$. Obrechkoff zelf bewees een vermoeden van Pólya voor het geval de nulpunten in een halfvlak liggen. Ik vroeg algemener wat men kan zeggen als de nulpunten van de benaderende polynomen in een willekeurige onbegrensde verzameling $R$ liggen. Noem zulke polynomen $R$-polynomen en de limieten $R$-functies. Mijn algemene stellingen zouden in 1949 het beste deel van mijn dissertatie [20] vormen, vergelijk [21]. Van essentieel belang bleken de richtingen waarin $R$ en zijn machten $R^k = \{z^k, z \in R\}$ naar oneindig gaan. Noem $R$ regulier als die asymptotische richtingen voor geen enkele $k = 1, 2, \ldots$ in een halfvlak liggen. Voor reguliere $R$ zijn *alle* gehele functies met nulpunten in $R$ approximeerbaar. Voor



G. Pólya

niet-reguliere $R$ kijkt men naar de eerste $R^k$ waarvoor de asymptotische richtingen in een halfvlak liggen, enzovoort. Vergelijk ook [23].

Dit soort werk zou uiteindelijk ook leiden tot een artikel over approximatie op begrensde, enkelvoudig samenhangende, gebieden $G$ door polynomen waarvan de nulpunten op de rand liggen. Alle analytische functies op $G$ bleken zo benaderbaar, zie mijn *Annals*-artikel [26].

Fred was al in 1947 gepromoveerd. Hij verliet het Mathematisch Centrum in 1948, was een poosje leraar en werd in 1953 medewerker aan de Universiteit Utrecht. Hij werd daar in 1955 hoogleraar en zou later ook enige jaren rector zijn.

**Contacten met Paul Erdős**

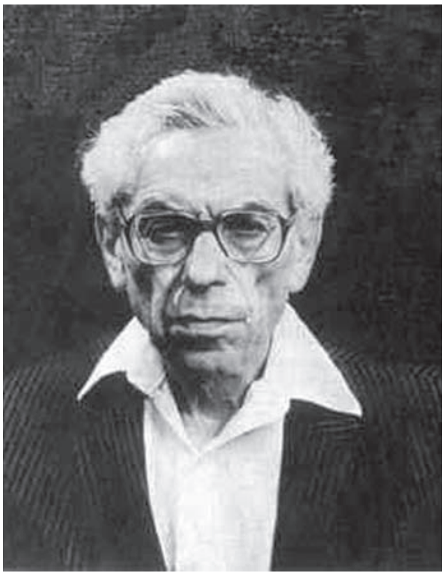
Het meest heb ik wel geleerd van contacten met Paul Erdős (1913–1996), te beginnen aan het Mathematisch Centrum in 1948. Daar sprak hij over zijn elementaire bewijs van de priemgetalstelling [7] (ten dele gevonden samen met Atle Selberg [45]). Elementair betekent hier: zonder gebruik van complexe analyse en de zetafunctie. Zijn voordracht zou resulteren in de *eerste* publicatie over het elementaire bewijs, namelijk door van der Corput [5]. Erdős ging met mij praten omdat ik een aanvulling had gepubliceerd [19] op een artikel van Clarkson en hemzelf [4], over benadering op $[0,1]$ met lineaire combinaties van machten $x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots$. (Ons probleem was overigens in de oorlog al opgelost door Laurent Schwartz in zijn dissertatie [43], maar die kende ik niet op tijd.) Erdős wilde nu mijn commentaar op het moeilijke bewijs van zijn niet-lineaire Tauberstelling [8], die uitging van een abstracte vorm van de zogenaamde fundamentele relatie van Selberg. Maar ik kon zijn ingewikkelde bewijs, waarvan de presentatie uren in beslag nam, toen nog niet volgen!

Ik zou Erdős vele malen ontmoeten, op diverse plaatsen: Purdue University, Delft, diverse conferenties, UC San Diego, en tenslotte in Jeruzalem, toen hij daar in 1984 een Wolfprijs kreeg! (Slim als altijd ried Erdős meteen waarom ik daar ook was.)

*Restschattingen*

Aan Purdue zou Erdős mij in 1950 wijzen op het belang van goede restschattingen in Tauberstellingen. Bijvoorbeeld, als

$$\left|\sum a_n x^n - A\right| \leq B(1-x) \quad \text{voor } 0 \leq x < 1$$



Paul Erdős

en $|na_n| \leq C$, wat kun je dan zeggen over de resten $|s_n - A|$? Hij deed een suggestie om nuttige voorbeelden te construeren, en na enige tijd vond ik voor dit geval de optimale restschatting

$$|s_n - A| \leq C/\log n,$$

zie [22]. Het was teleurstellend dat de rest niet kleiner hoefde te worden. (Later bleek dat Geza Freud al eer wist dat $s_n - A = O(1/\log n)$. Turan had die bovengrens eerst niet willen publiceren omdat hij dacht dat hij veel te zwak was! Zie Freud [9].)

Tussen haakjes: in april 1952 zou Erdős bij mij en mijn vrouw Jopie logeren in Delft, net een week voor de geboorte van onze oudste dochter Wilma. We moesten hem vragen ergens anders heen te gaan. Hij begreep dat eerst niet goed, maar het bleek geen probleem. Zijn natuurkundige vriendin Jo Brunings uit Rochester (oorspronkelijk uit Rijswijk), die hem naar al zijn afspraken reed, zorgde voor ander onderdak.

Naast zeer algemene resultaten voor machtreeksen zou ik al snel optimale restschattingen vinden voor andere soorten reeksen. Met hulp van mijn vroegere mentor Kloosterman kon al dit werk snel gepubliceerd worden in de *Proceedings* van de KNAW. Dat was belangrijk omdat ik, inmiddels assistant professor aan de Universiteit van Wisconsin (1953–1964), onder druk stond om te publiceren teneinde daar een vaste baan te krijgen. Overigens werd goed lesgeven in Madison ook belangrijk gevonden.

Ik zou over mijn Tauberstellingen spreken tijdens een 'Summer of Analysis' aan de Universiteit van Chicago (georganiseerd door Zygmund) in 1956. Daar ontmoette ik Littlewood voor het eerst; het was zijn eerste bezoek aan de Verenigde Staten. Hij zou later een jaar in Madison doorbrengen en ik zou hem ook ontmoeten aan Trinity College in Cambridge.

Als een terzijde vermeld ik dat mijn restschattingen-artikel [24] uit 1954 impliciet het antwoord bevatte op een leuke vraag die Donald Newman in 1960 zou stellen: Voor welke exponenten $k_n$ benadert de functie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{k_n}$$

de limiet $\frac{1}{2}$ voor $x \nearrow 1$ zo snel mogelijk? (Het antwoord is $k_n = n^2$. Zie [39] en mijn opmerking in *Mathematical Reviews* 0117474.)

**Intermezzo over Wienertheorie**

Ik noem alleen de nuttige stelling van Wiener en zijn leerling S. Ikehara [14] uit 1931.

**Stelling 2.** *Zij de reeks*

$$g(s) = \sum \frac{b_n}{n^s} \quad \textit{met } b_n \geq 0$$

*convergent voor* $s = \sigma + i\tau$ *als* $\sigma > 1$, *en stel dat*

$$h(s) = g(s) - \frac{B}{s-1}$$

*continue randwaarden heeft als* $\sigma \searrow 1$. *Voor* $S(x) = \sum_{n \leq x} b_n$ *geldt dan*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{S(x)}{x} = B.$$

(Later zou ik een bewijs geven met complexe analyse [32].)

Toegepast op de reeks

$$\sum_{p \text{ priem}} \frac{\log p}{p^s},$$

of op

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum \frac{\log p}{p^s} + \sum \frac{\log p}{p^{2s}} + \ldots$$

geeft de stelling onmiddellijk de priemgetalstelling. Want er is dan een pool $1/(s-1)$ in het punt $s = 1$. Men hoeft verder alleen maar te weten dat $\zeta(s)$ geen nulpunten heeft op de lijn $\{\sigma = 1\}$. De conclusie is dat

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{p\le x, p \text{ priem}}\log p = 1.$$

Nu ligt $\log p$ voor $x^{1-\varepsilon} \le p \le x$ dichtbij $\log x$. Met de notatie $\pi(x)$ voor het aantal priemgetallen $p \le x$ vindt men dan dat

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

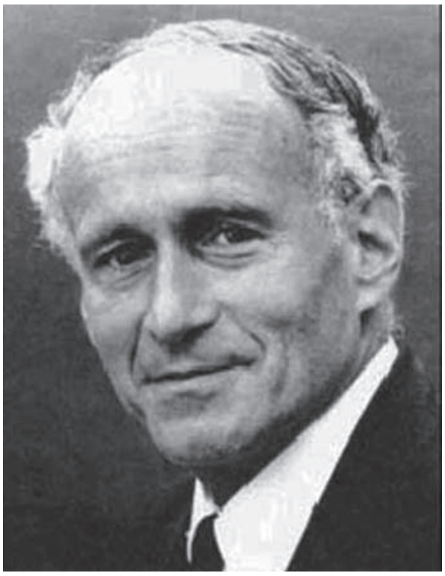
In woorden: $\pi(x)$ is asymptotisch gelijk aan $x/\log x$.

**Contacten met Laurent Schwartz, distributies**

Mijn vriend Hans Tolhoek en ik kwamen al vroeg gegeneraliseerde functies tegen zoals de 'deltafuncie', vergelijk het boek van Lützen [36] over de prehistorie van distributies. Maar ik dank bijna al mijn echte kennis over distributies aan Laurent Schwartz (1915–2002). Op het ICM Congres in Cambridge, Massachusetts 1950 luisterde ik naar zijn voordracht (en die van Hermann Weyl) in verband met zijn Fieldsmedaille. (Mijn vrouw Jopie en ik genoten ook van het optreden van Tom Lehrer in het Harvard Theater.) Aan Purdue University organiseerden Michael Golomb, Merrill Shanks en ik daarna enthousiast een werkgroep over distributies. Het eerste boek van Schwartz was net verschenen [44]. We vonden daarin het gebruik van de topologische vectorruimten van Dieudonné en Schwartz best lastig. Ik begon al gauw te zoeken naar een meer elementaire aanpak. Onder druk publiceerde ik echter te haastig over een elementaire theorie, zie [25]. Later zou ik een meer elegante aanpak bedenken met completering. Zo'n constructie werkt zowel voor de invoering van reële getallen, als voor Lebesgue-integreerbare functies en ook distributies! Zie beneden en mijn latere boeken [28,33]. (Met distributies kon ik de voorwaarde van continue randwaarden in de Wiener–Ikehara stelling uit Stelling 2 omzetten in een nodige en voldoende voorwaarde, vergelijk [31] en ook [27].)

*Polen zomer 1966*

Ik ga het nu eerst hebben over een grote conferentie over gegeneraliseerde functies of distributies in Polen, georganiseerd door J.G. Mikusinski (1913–1987). Hij was bekend om zijn elementaire (minder algemene) distributietheorie, vergelijk [37,38]. De bijeenkomst werd bijgewoond door veel prominente experts: Laurent Schwartz, Sergei Sobolev, George Temple en Jean Dieudonné (een van de grondleggers van de invloedrijke Bourbakigroep in Frankrijk). Mijn oude vriend Wim Luxemburg en mijn vrouw Jopie waren er ook. De conferentie begon in Katowice, waar Mikusinski zijn vaste baan had. Later verhuisde de bijeenkomst naar een wintersportgebied in het zuidoosten van Polen (Kluszkowcze?). Deelnemers en begeleidende personen werden per bus vervoerd en we kregen een lunchpakket mee. Rond de middag stopten we onverwachts bij de ingang van het concentratiekamp Auschwitz. Dat was schrikken; de confrontatie met de Holocaust was heftig. Enkele deelnemers weigerden het kamp binnen te gaan.



Laurent Schwartz

In de middag gingen we verder naar onze eindbestemming waar de conferentie werd voortgezet. Daar werden we al gauw getrakteerd op een excursie naar de bergen. Een gammele stoeltjeslift vervoerde ons over een flinke afstand, min of meer horizontaal, over een ruig landschap. Laurent Schwartz zat in het stoeltje voor mij en Sobolev net achter me. Toen de lift abrupt stopte en hevig begon te schommelen boven een ravijn, riep Schwartz naar Sobolev: als we nu neerstorten is dat het einde van distributietheorie! Na een poosje ging de lift verder naar een picnicplaats. Daar besloten Schwartz, mijn vrouw Jopie en ik om te voet terug te gaan.

In 1972 kon ik Dieudonné uitnodigen voor een semester als gasthoogleraar aan UC San Diego (ik was toen Department Chair). En in 1983 zou ik Schwartz nog ontmoeten bij zijn afscheid van de École Polytechnique in Palaiseau bij Parijs.

**Completering, distributies**

In een vectorruimte $X$ met een geschikt convergentiebegrip beschouwen we Cauchyrijen $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, enzovoort, dus

$$u_j - u_k \to 0 \text{ in } X \text{ wanneer } j,k \to \infty, \text{enz.}$$

Sommige Cauchyrijen zullen in $X$ convergeren, andere niet. Cauchyrijen $\{u_k\}$ en $\{u'_k\}$ heten *equivalent* als $u_k - u'_k \to 0$ voor $k \to \infty$. De equivalentieklassen $U$ enzovoort van Cauchyrijen $\{u_k\}, \{u'_k\}, \ldots$, enzovoort, met voor de hand liggende definities voor diverse operaties, vormen de 'completering' $\overline{X}$ van $X$. Als een element $U$ uit convergente rijen $\{u_k\}$ enzovoort bestaat wordt het geïdentificeerd met de limiet $u$ van die rijen in $X$. Onder geschikte voorwaarden zal de nieuwe ruimte $\overline{X}$ inderdaad volledig zijn.

Voor de invoering van *distributies* op $\mathbb{R}$ gaat men uit van rijen $\{u_k\}, \{v_k\}, \ldots$ van continue of lokaal integreerbare functies. Convergentie is nu relatief tot testfuncties: oneindig differentieerbare functies $\phi$ met begrensde drager. Dus $u_k \to u$ in $X$ wordt gedefinieerd door de eis dat

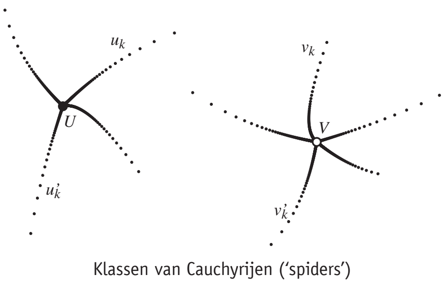
$$\int_{\mathbb{R}} u_k\phi \to \int_{\mathbb{R}} u\phi \quad \text{voor alle } \phi.$$

Nu is $\{u_k\}$ een Cauchyrij in $X$ als $\int (u_j - u_k)\phi \to 0$ voor alle $\phi$. Distributies op $\mathbb{R}$ zijn per definitie equivalentie-klassen $U, V, \ldots$ van zulke Cauchyrijen in X.

Voor primitieven $F = f^{(-1)}$ van lokaal integreerbare functies $f$ voldoet de afgeleide $DF = f$ aan de relatie

$$\int_{\mathbb{R}} (DF)\phi = -\int_{\mathbb{R}} F\phi' \quad \text{voor alle } \phi.$$

Dezelfde formule wordt gebruikt om de afgeleide $DU$ van een distributie $U$ te definiëren: in elke equivalentieklasse zitten wel primitieve functies. Men bewijst vervolgens dat elke distributie lokaal gelijk is aan de afgeleide $D^kF$ van zekere orde $k$ van een lokaal integreerbare functie $F$. De volledigheid van het stelsel distributies kan bewezen worden met behulp van Fourierreeksen, vergelijk [33]. In de completering $\overline{X}$ is de distributie $V$ de limiet van zijn Cauchyrijen $\{v_k\}$.




Klassen van Cauchyrijen ('spiders')

*Spiders*
Mijn studenten aan UCSD verrasten mij rond 1973 met een leuke schets, die ik sterk ingekort weergeef.

*The Gospel according to Professor Korevaar.* In the beginning the earth was desolate and empty. But then The Lord created spiders. He made them of two kinds: spiders with a heart, and spiders with a hole. The first kind He called functions, and the second kind He named distributions. The two kinds lived well together and they had numerous offspring. Some of the offspring had a heart, but most of them had just a hole. However, every spider with a hole had an ancestor with a heart!

**Dankbetuiging**
Ik dank Tom Koornwinder voor de foto's van wiskundigen en Jan van de Craats voor de 'spiders'.

**Referenties**

1 F. van der Blij, *Theta Functions of Degree $m$*. PhD thesis, University of Leiden, 1947, 47 pp.

2 S. Bochner, Ein Satz von Landau und Ikehara. *Math. Z.* 37 (1933), 1–9.

3 N.G. de Bruijn, Levensbericht H.D. Kloosterman, *Jaarboek KNAW 1967–1968*, pp. 326–330.

4 J.A. Clarkson en P. Erdős, Approximation by polynomials, *Duke Math. J.* 10 (1943), 5–11.

5 J.G. van der Corput, Démonstration élémentaire du théorème sur la distribution des nombres premiers, *Scriptum,* No. 1, Math. Centrum Amsterdam, 1948, 32 pp.

6 G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Springer, 1937, xiii + 436 pp.

7 P. Erdős, On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 35 (1949), 374–384.

8 P. Erdős, On a Tauberian theorem connected with the new proof of the prime number theorem, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* 13 (1949), 131–144.

9 G. Freud, Restglied eines Tauberschen Satzes, I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 2 (1951) (the paper actually appeared somewhat later), 299–308; II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 3 (1952/53), 299–307; III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 5 (1954), 275–288.

10 G.H. Hardy, Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series, *Proc. London Math. Soc. (2)* 8 (1910), 301–320.

11 G.H. Hatdy en J.E. Littlewood, Tauberian theorems concerning series of positive terms, *Messenger of Math.* 42 (1913), 191–192.

12 G.H. Hardy en J.E. Littlewood, Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet series whose coefficients are positive, *Proc. London Math. Soc. (2)* 13 (1914), 174–191.

13 G.H. Hardy en J.E. Littlewood, On a Tauberian theorem for Lambert's series, and some fundamental theorems in the analytic theory of numbers, *Proc. London Math. Soc. (2)* 19 (1921), 21–29.

14 S. Ikehara, An extension of Landau's theorem in the analytical theory of numbers, *J. Math. and Phys. M.I.T.* 10 (1931), 1–12.

15 J. Karamata, Über die Hardy–Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes, *Math. Z.* 32 (1930), 319–320.

16 H.D. Kloosterman, On the convergence of series summable $(C,r)$ and on the magnitude of the derivative of a function of a real variable, *J. London Math. Soc.* 15 (1940), 91–96.

17 H.D. Kloosterman, The behaviour of general theta functions under the modular group and the characters of binary modular congruence groups, I, II, *Ann. of Math. (2)* 47 (1946), 317–375, 376–447.

18 J. Korevaar, Some entire functions represented in a half-plane by Laplace integrals. (Dutch) *Mathematica B, Zutphen* 12 (1944), 107–114.

19 J. Korevaar, A characterization of the sub-manifold of $C[a,b]$ spanned by the sequence $\{x^{n_k}\}$. *Indag. Math.* 9 (1947), 360–368.

20 J. Korevaar, *Approximation and Interpolation Applied to Entire Functions*, PhD thesis, University of Leiden, 1949, viii+56 pp.

21 J. Korevaar, The zeros of approximating polynomials and the canonical representation of an entire function, *Duke Math. J.* 18 (1951), 573–592.

22 J. Korevaar, Best $L^1$ approximation and the remainder in Littlewood's theorem, *Indag. Math.* 15 (1953), 281–293.

23 J. Korevaar, Entire functions as limits of polynomials, *Duke Math. J.* 21 (1954), 533–548.

24 J. Korevaar, A very general form of Littlewood's theorem, *Indag. Math.* 16 (1954), 36–45.

25 J. Korevaar, Distributions defined (from the point of view of applied mathematics) by fundamental sequences, I, II, III, IV, V, *Indag. Math.* 17 (1955), 368–378, 379–389, 483–493, 494–503, 663–674.

26 J. Korevaar, Asymptotically neutral distributions of electrons and polynomial approximation, *Ann. of Math. (2)* 80 (1964), 403–410.

27 J. Korevaar, Distribution proof of Wiener's Tauberian theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 (1965), 353–355.

28 J. Korevaar, *Mathematical Methods, Vol. 1: Linear Algebra, Normed Spaces, Distributions, Integration*, Academic Press, 1968, xi + 505 pp.

29 J. Korevaar, On Newman's quick way to the prime number theorem, *Math. Intelligencer* 4 (1982), 108–115.

30 J. Korevaar, *Tauberian Theory. A Century of Developments*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 329, Springer, 2004, xvi+483 pp.

31 J. Korevaar, A Tauberian theorem for Laplace transforms with pseudofunction boundary behavior, Complex analysis and dynamical systems II, *Contemp. Math.*, No, 382, Israel Math. Conf. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 233–242.

32 J. Korevaar, The Wiener-Ikehara theorem by complex analysis, *Proc. Amer. Math. Soc.* 134 (2006), 1107–1116.

33 J. Korevaar, *Fourier Analysis and Related Topics*, Amsterdam, Spring 2011, Internet book, vi+320 pp.

34 R.A. Kortram, In memoriam Cornelis Visser. *Nieuw Arch. Wisk.* 5/2 (2001), 202–203.

35 J.E. Littlewood, The converse of Abel's theorem for power series, *Proc. London Math. Soc. (2)* 9 (1911), 434–448.

36 J. Lützen, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, No. 7, Springer, 1982. viii+232 pp.

37 J. Mikusiński, Une définition de distribution. *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III* 3 (1955), 589–591.

38 J. Mikusiński and R. Sikorski, *The Elementary Theory of Distributions, I*, Rozprawy Mat., No. 12 (1957), 54 pp; II, Rozprawy Mat., No. 25, 1961, 47 pp.

39 D.J. Newman, $1-1+1-1+\cdots=1/2$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 11 (1960), 440–443.

40 D.J. Newman, Simple analytic proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly* 87 (1980), 693–696.

41 N. Obrechkoff, *Quelques classes de fonctions entières limites de polynomes et de fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles*, Actualités Scientifiques et Industrielles , No. 891, Hermann et Cie, 1941, 47 pp.

42 F. Riesz, Sur les opérations continues linéaires, *C.R. Paris* 149 (1910), 974–977.

43 L. Schwartz, *Étude des sommes d'exponentielles réelles*, PhD thesis, Paris, 1943, 89 pp.

44 L. Schwartz, *Théorie des distributions. Tome I*, Actualités Sci. Ind., No. 1091, Hermann et Cie, 1950; *Tome II*, Actualités Sci. Ind., No. 1122, Hermann, 1951, 169 pp.

45 A. Selberg, An elementary proof of the prime-number theorem, *Ann. of Math. (2)* 50 (1949), 305–313.

46 A. Tauber, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monatsh. Math. u. Phys.* 8 (1897), 273–277.

47 R. Timman, In memoriam Prof. Dr. H. Bremekamp, *Nieuw Arch. Wisk.* 3/11 (1963), 61–63.

48 R. van der Veen en J. van de Craats, *De Riemann-hypothese. Een miljoenenprobleem*, Epsilon Uitgaven, deel 69, 2011, vi+102 pp.

49 N. Wiener, Tauberian theorems, *Ann. of Math.* 33 (1932), 1–100.