Rob van Oord
Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 23e Nationale Wiskunde Dagen

Hoe vaak is oneindig?

Op vrijdag 3 februari en zaterdag 4 februari vonden in Noordwijkerhout voor de 23ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Twee dagen waarop wiskundeleraren en andere belangstellenden naar wiskunde kijken en luisteren, maar er vooral ook zelf mee aan de slag gaan. Een persoonlijke impressie van Rob van Oord, als gepensioneerd docent nog altijd actief als invalkracht.

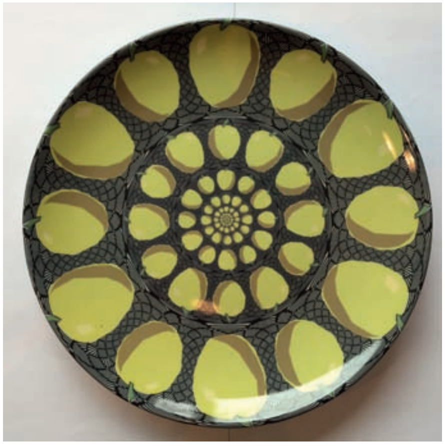
Blij en met een doos vol spullen ga ik op weg naar Noordwijkerhout. Dit keer mag ik met een oud-collega meerijden. Van de organisatie mag ik tot in lengte van dagen naar de NWD. Oneindig vaak als ik wil. Ik voel me vereerd en heb zin in de vol ingetekende workshop die ik samen met Rutger ga geven. Deelnemers uitdagen en inspireren, dat gaan we doen.

Sierborden

Professor Henk van der Vorst opende de 23ste NWD met een show van de passie die hij bij zijn emeritaat heeft opgevat, litho's ontwerpen en afdrukken. Omdat het maken van spiegelbeeld-afdrukken van litho's niet mogelijk is, gebruikt Henk eenzelfde litho door hem telkens een kwartslag te draaien. Daarna drukt hij volgende versies in andere kleuren eroverheen. Door er dan zestien te combineren krijg je schitterende tableaus. Zie Figuur 1.

Vervolgens heeft Henk banen van de basispatronen op een cirkelband getransformeerd. Tot slot werden deze banen naar binnen toe 'oneindig' vaak verkleind herhaald. Hierdoor lijken de cirkelvormige eindversies op plaatjes van Coxeter en Escher. Henk liet de op deze manier gevonden afbeeldingen op sierborden drukken. Alle sprekers kregen één van deze borden als dank voor hun inzet. Zie Figuur 2. Ook de poster van de NWD is een product van Henk.

Figuur 1 Basistableau van 16 tegels.



Figuur 2 Bord van Henk van der Vorst.

Wilhelmus

In een zinderend spannende presentatie legt Mike Kestemont uit dat met gebruikmaking van wiskundige vergelijkingsmethodes het Wilhelmus hoogstwaarschijnlijk niet door Marnix van St. Aldegonde is geschreven. Aan de hand van een database van getelde functiewoorden in teksten kan worden beweerd dat ons volkslied het meest overeenkomt met geschriften van Petrus Datheen. 'Blijf ik tot in den dood', is dat ook tot in het oneindige?

Sofia Kovalevskaya

Luuk Hoevenaars nam ons in zijn boeiende lezing mee naar het leven van Sofia Kovalevskaya (1850–1891). Deze dame van Russische komaf viel Weierstrass op toen zij in Berlijn bij hem een promotie deed. Wellicht is ze geïnspireerd door het behang in haar kamer, dat bestond uit bladzijden van een boek van de wiskundige Ostrogradsy, over differentiaal- en integraalrekening. Een hint voor collega's die op het punt staan de kamer van hun dochter te gaan behangen. Maar een witte wand waarop je doorlopend wiskundige teksten laat projecteren helpt misschien ook.

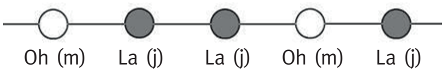
Ze heeft zelfs drie proefschriften geschreven, eentje over de uniciteit van analytische partiële differentiaalvergelijkingen die aan voorwaarden moeten voldoen die al eerder door Cauchy geformuleerd zijn. Voor haar latere werk over de mechanische beweging van een tol kreeg ze de prestigieuze prijs van de Franse academie van wetenschappen, de ‘Prix Bordin’. De oplossingen van dit probleem convergeren met een Taylorreeks naar een limiet als x naar oneindig gaat. Hoe ver moet je daarin gaan?

Zij ontdekte ook een tegenvoorbeeld van de bewering van Weierstrass dat elke hogere-orde partiële differentiaalvergelijking een particuliere oplossing heeft. De oplossing van de zogeheten temperatuurstaaf heeft een term die divergent is. De staaf zal dus als het ware ontploffen.

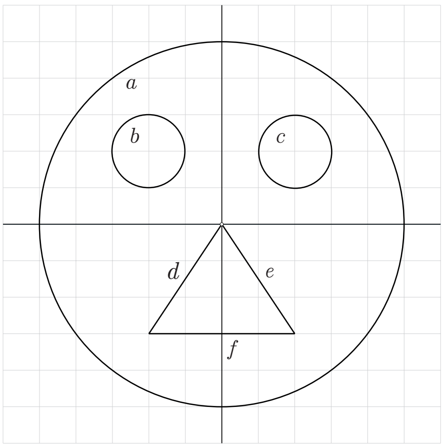
Na een ongelukkig huwelijk kreeg zij na de zelfmoord van haar man een aanstelling in Zweden aan de universiteit van Stockholm. Door een noodlottig voorval kreeg zij bij terugkeer van een vakantie de griep, waaraan ze stierf op 41-jarige leeftijd.

Oh-La-La, een lachend gezicht

In de tweede ronde moest ik zelf aan de bak. In deze ronde draaiden allemaal workshops waar de deelnemers zelf aan de slag konden. Ook Rutger Kock en ik daagden de deelnemers uit om zelf actief te worden. Van een som uit het boek naar een leuke les, hoe doe je dat? We begonnen met zingen waarmee je in je les machten van twee kunt inleiden. In Figuur 3 staat de eerste regel van de partituur. Bij een open rondje zingen de meisjes Oh, bij een dicht rondje zingen de jongens tegelijk La. Ik geef het tempo aan met een stokje. Met al die Oh’s (meisjes) en La’s (jongens) kwam de stemming er al goed in. Er worden vijf regels gezongen. (Daarna krijgen de leerlingen de opdracht om een zo lang mogelijke partituur van regels met vijf noten te maken, waarbij alle regels van elkaar verschillend zijn.)



Figuur 3 Eerste regel van de partituur.

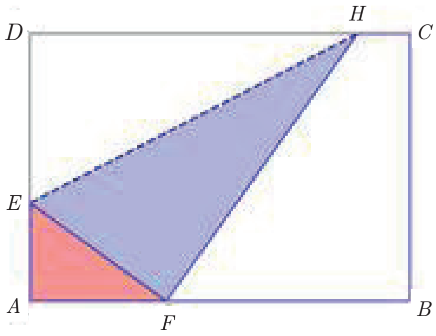


Figuur 4 Parametriseren van een gezicht.

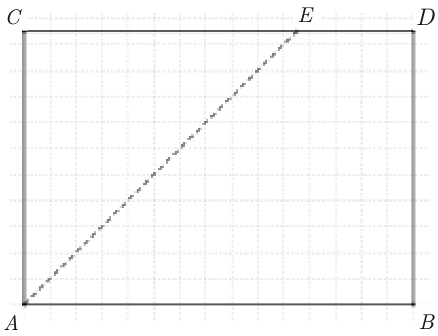
Vervolgens legde Rutger uit hoe hij zijn klas had uitgedaagd om met parametriseren een gezicht op het scherm te maken. Als bonus moest het gezicht lachend gemaakt worden. Hierbij moet je goed letten op het domein. Het domein van een cirkel ligt min of meer vast met $[0,\ 2\pi]$. Daar moeten de lijnstukjes en cirkelbogen op worden aangepast. Een mooie wiskundige denkactiviteit. Zie Figuur 4.

Driehoeken en ellipsen vouwen

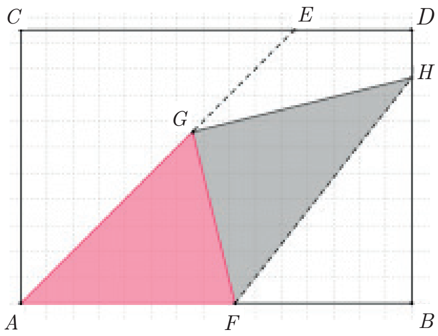
Nu volgt een voorbeeld van hoe ik bij een som uit het boek een leuke les maak. Ik laat het verhaal bij de opgave eerst zelf beleven. Er moet een vouw in een blaadje gemaakt worden waardoor er een driehoek ontstaat. Ik laat de klas dan willekeurige (drie)hoeken omvouwen. Hoekpunt D wordt naar F op zijde AB gevouwen. Zie Figuur 5. Daarna moeten ze door opmeten van de zijden de oppervlakte van een driehoek, in dit geval driehoek AFE, berekenen. Wie de grootste oppervlakte heeft gevonden krijgt wat lekkers. Je ziet dan bij de gegeven antwoorden (wie heeft een nog grotere oppervlakte?) ook meteen wie de factor $\frac{1}{2}$ is vergeten. Dat antwoord is dan ongeveer 2 keer zo groot als de andere. Jammer, maar je hebt dan niet gewonnen. Omdat blijkt dat er allemaal verschillende antwoorden tevoorschijn zijn gekomen, ga ik er met de klas dieper op in. Het lijkt wel of er een grootste is. Waar denk je dan aan? Welke vraag zou je kunnen stellen? Dan zet ik ze, liefst in groepjes, aan het werk. Ze zullen zelf een onbekende zijde x moeten stellen. In het boek wordt al aangegeven welke zijde je x moet stellen. Dan is het denkwerk al gedaan. Bovendien zijn er verschillende zijden die je x kunt stellen die allemaal wel tot hetzelfde antwoord leiden. Leuk om te zien dat leerlingen ook op verschillende manieren het antwoord vinden. Als je uitgaat van een blaadje van 30 bij 21 cm (A4-formaat) dan is de oppervlakte van driehoek AEF maximaal als $AE = 7$ cm. Ik daag de lezer uit dit te verifiëren. Naast de opgaven uit het boek kwamen er ook onnoemelijk veel zelf bedachte voorbeelden van vouwsels op tafel, vergelijkbaar met de opgave uit het boek. (Zie www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen, Archief, Slides/handouts. Ik ben bereid om bij secties die dat willen langs te komen en samen aan de slag te gaan om een leuke les bij opgaven uit het boek te maken.)



Figuur 5 *Getal & Ruimte* vwo B deel 4, opgave A28, p.118.

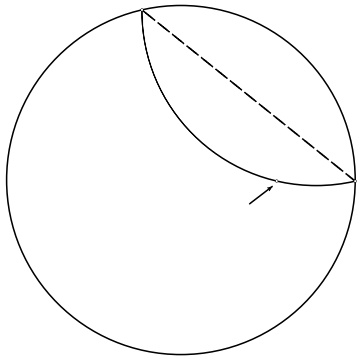


Figuur 6 Bissectrice AE van $\angle A$.

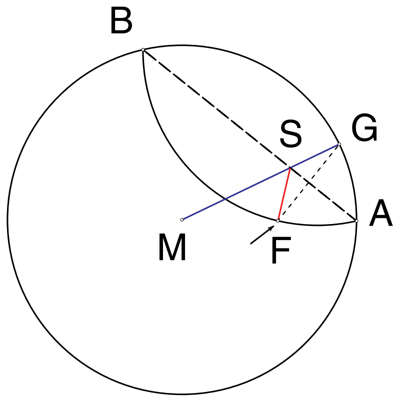


Figuur 7 B naar D op AE vouwen.

Bij de opgave ‘driehoek naar $y = x$’ wordt het hoekpunt rechtsonder naar de tevoren gevouwen bissectrice (diagonale vouw) van het hoekpunt linksonder gevouwen. Zie Figuur 6 en 7. Onder de omgevouwen onderkant zie je een driehoek (AFG) ontstaan met de gevouwen bissectrice en de onderkant van het blaadje. Zie Figuur 7. Ga weer uit van de afmetingen 30 bij 21 cm (A4-formaat). Hoe zou je door meten de oppervlakte kunnen berekenen? Stel een formule op van de oppervlakte van de (roze) driehoek AFG. Bereken de maximale oppervlakte van de op deze manier



Figuur 8 Een ellips vouwen.



Figuur 9 Vouwlijn is raaklijn.

verkregen driehoek. Aan de lezer om eerst eens zelf te gaan vouwen en de maximale oppervlakte te vinden. Het antwoord kan als volgt gaan. Stel $AF = x$. Dan is $BF = FG = 30 - x$. Neem AG als basis van driehoek AFG, dan is de hoogte de loodlijn uit F op AG is $x/\sqrt{2}$. Je kunt AG uitdrukken in x met behulp van de cosinusregel:

$$FG^2 = AF^2 + AG^2 – 2AF \cdot AG \cdot \cos(\angle GAF);$$

$\angle GAF = 45°$, dus krijg je

$$(30 - x)^2 = x^2 + AG^2 - 2xAG \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

oftewel

$$AG^2 - x\sqrt{2}\,AG + 60x - 900 = 0$$

en met de abc-formule is nu

$$AG = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 - 240x + 3600}\right);$$

de oppervlakte van $\triangle AFG$ is nu

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 - 240x + 3600}\right).$$

De afgeleide nul stellen levert een onprettige vergelijking op. CALC MAX geeft $x = 15$ (dus precies als je op het midden van de onderkant zit); $\max \mathrm{opp} = 112{,}5$. Wie kan het berekenen van de waarde van x waarbij de oppervlakte maximaal is, exact oplossen?

Behalve driehoeken werden er ook ellipsen 'gevouwen'. Als je oneindig vaak de rand van een cirkelvormig blaadje naar een gegeven stip (zie pijltje in Figuur 8) binnen de cirkel vouwt, dan ontstaat er binnen de cirkel een vlakdeel waar geen vouwen te zien zijn. Dit vlakdeel lijkt een ellips te zijn. Dit oneindig vouwen kun je beperken tot 20 tot 30 keer. De vraag is dan wat de vouwlijnen met de ellips te maken hebben. Kun je ook op elke vouwlijn het punt van de ellips construeren? Kun je ook de definitie van de ellips afleiden waarbij de som van de afstanden tot de brandpunten constant is (het tekenen van een ellips met twee punaises en een touwtje)? Als het goed is kun je snappen dat het gegeven stipje (F) een brandpunt van de ellips is en dat het middelpunt M van de gegeven cirkel het tweede brandpunt van de ellips is en dat de straal van de cirkel precies de lengte van het touwtje is. Allemaal vragen die je met de klas samen kunt proberen te beantwoorden. Als je bedenkt dat het vouwen van de cirkelrand in feite een spiegeling is van een cirkelboog, dan kun je veel vragen beantwoorden en snappen hoe het zit bij een ellips. Neem een van de vouwen in het vizier en teken die met potlood over. Geef op de omgevouwen cirkelboog aan (stip G) waar die op het stipje F komt. Vouw terug. G ligt nu op de cirkelrand. De vouw AB is de middelloodlijn van FG. Teken nu de straal MG. Het snijpunt S van MG en de vouwlijn AB ligt nu op de ellips met brandpunten F en M. Immers $SF = SG$ (middelloodlijn) en $MS + SG =$ straal, dus $MS + SF$ ook.

Getallentrucjes en Möbiusharten

Het avondprogramma werd verzorgd door Albrecht Beutenspacher. Hij is de directeur van het Mathatikum in Giessen (zie www.mathematikum.de). Dit museum trekt sinds de opening in 2002 jaarlijks vele bezoekers, jong en oud. Het is een interactief museum waarin allerlei spelletjes en puzzels gedaan kunnen worden met wiskundige principes en verrassingen. In enkele ruimtes waren ook een aantal ervan tentoongesteld. Eén ervan is een parabool waarmee je kunt vermenigvuldigen. Verbind de punten van de parabool $y = x^2$ boven $x = -a$ en $x = b$. Het antwoord van $a \cdot b$ vind je dan op de y-as. Verklaring: de helling van de lijn AB is $(b^2 - a^2)/(a + b) = b - a$. De lijn $y = (b - a)(x - b) + b^2$ heeft helling $b - a$ en gaat door (b, b^2). $x = 0$ geeft dan $y = ab$. Grappig, maar waar.

Figuur 10 Möbiusharten.

Hij maakte indruk met een getallentrucje waarmee je zonder gebruik van een rekenmachine eenvoudig twee grote getallen kunt vermenigvuldigen. Bijvoorbeeld 996×885 doe je als volgt: $996 = 1000 - 4$, $885 - 4 = 881$; de eerste 3 cijfers van het antwoord zijn nu 881, $885 = 1000 - 115$, doe nu $4 \times 115 = 460$, dit zijn de laatste 3 cijfers van het antwoord. Reken maar na: $996 \times 885 = 881460$. Hoe werkt de truc? Even uitgezocht. $x = 996$ geeft $1000 - x = 4$, $y = 885$ geeft $1000 - y = 115$. Dan is $y - (1000 - x) = x + y - 1000$ (dit is die 881); dus

$$\begin{aligned}(y - (1000 - x)) \cdot 1000 + (1000 - x)(1000 - y) \\ = (x + y - 1000) \cdot 1000 + 1000000 \\ - (x + y) \cdot 1000 + 1000000 + x \cdot y = x \cdot y.\end{aligned}$$

Dit is dan $881 \times 1000 + 4 \times 115 = 881460$.

Het meest interessante trucje was het plakken en doormidden knippen van twee dwars op elkaar geplakte tegengesteld gedraaide Möbiusbanden. Je krijgt dan twee in elkaar gestrengelde harten. 's Nachts op mijn kamer meteen maar uitgeprobeerd. Gelukt! Zie Figuur 10. Leuk om met Valentijnsdag in de les te doen.

TZAAR en Ramanujan

Voordat ik mij op de dansvloer waag probeer ik altijd een van de (nieuwe) spellen uit die elk jaar klaarliggen in de hal. Dit keer speelde ik een paar potjes *TZAAR* met Peter Donkelaar, een van de vrienden die ik ken van de staatsexamens. Het is een zogenaamd abstract gezelschapsspel voor 2 personen. Het is de bedoeling dat je als eerste van de tegenstander alle *tzaren*, *tzarra's* of *totts* van het veld hebt geslagen. Dit zijn allemaal ronde schijven met 0, 1 of 2 ringen. Het lijkt op een veredeld dammen waarbij je naar hartenlust mag stapelen 'tot in het oneindige'. Zie Figuur 11.

's Avonds werd de film *The man who knew Infinity*, over het leven van Srinivasa

Figuur 11 TZAAR.

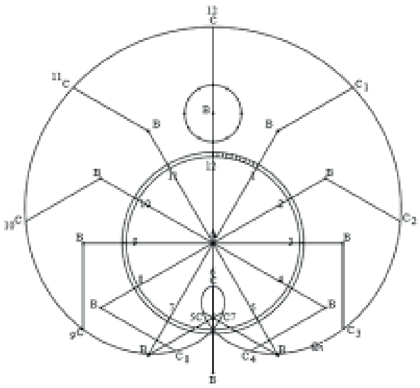
Ramanujan, getoond. In de krant las ik er niet zulke goede recensies over. Maar collega's die ik sprak die hem gezien hadden vonden hem best wel indrukwekkend.

Spinkromme en eikromme

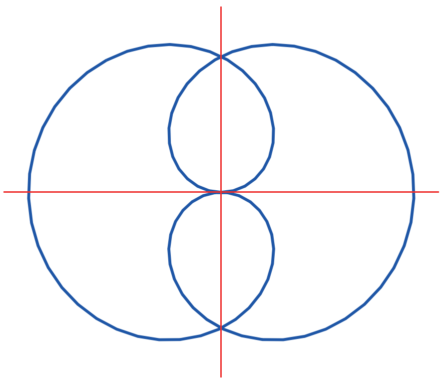
Voor de ochtendlezing op zaterdag ging ik naar Martin Kindt. Op 27 januari werd Martin aan het eind van een symposium ter gelegenheid van zijn 80ste verjaardag benoemd tot Officier in de Orde van Oranje Nassau. Zo de koning het heeft behaagd. Ik ben al vele jaren fan van Martin. Ook vandaag verraste hij ons weer met een mooi verhaal over de krommen van Dürer.

Uit een dik boek in het Duits in Gothische letters, een leerboek voor kunstenaars over de drie dimensies en perspectieftekenen, heeft Martin met de vertaling in het Engels ernaast enkele krommen gehaald en aan ons uitgelegd. De slakkenspiraal, de Archimedische spiraal en de helix (trappenspiraal) werden getoond en uitgelegd. De limaçon van Pascal werd al door Dürer geconstrueerd als een 'spinkromme' (1525). Hij tekende de hulplijntjes van de geconstrueerde punten er ook bij. Een straal met bijbehorende stukjes raaklijn. Op die manier lijkt het geheel op een spin met pootjes. Met $x = 3\sin(t) - 2\sin(2t)$ en $y = 3\cos(t) - 2\cos(2t)$ krijg je deze kromme op je scherm. Zie Figuur 12.

In de voor Martin typerende stijl, rustig en bescheiden, liet hij ons zien hoe Dürer bewees dat de 'eikromme' die je krijgt bij het doorsnijden van een kegel ook echt een ellips is. Al is het bewijs van Dandelin met de bollen in een kegel die onder en boven aan het doorsnijdingsvlak raken natuurlijk van een andere orde en eenvoud. Als slot liet Martin zien dat met het folium van Dürer de driedeling van een hoek kan worden gedaan. $x = \cos(\frac{1}{2}t) \cdot \cos(t)$ en $y = \cos(\frac{1}{2}t) \cdot \sin(t)$, dit geeft $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \cos(\frac{1}{2}t)$. Zie Figuur 13. Dürer was niet alleen een begenadigd schilder, maar had ook veel wiskundige kennis in huis. Dat is nu wel duidelijk.



Figuur 12 Spinkormme van Dürer.



Figuur 13 Folium van Dürer.

Bewegende '3D'-plaatjes

De laatste bloklezing die ik bijwoonde was van Jos Leys (www.josleys.com). Sinds 1980 bij de intrede van de eerste computers is Jos gefascineerd door plaatjes op het scherm. Immer nog maakt hij met behulp van eenvoudige formules met complexe getallen de mooiste bewegende '3D'-plaatjes van bijvoorbeeld Mandelbrotverzamelingen. Je kunt zien wat er gebeurt als je oneindig vaak inzoomt. Net als het Droste-effect waar bij het inzoomen ook nog eens gedraaid wordt. Jos gebruikt matrixtransformaties en groepentheorie om complexe vlakken af te beelden. Hij noemde onder andere werk van Bernard Maskit over de Schottky-groep als speciale Kleinse groep. Net als bij Henk van der Vorst worden stroken tot cirkels gemaakt en cirkels tot bollen. Met de duizelingwekkende beelden en een gevoel van bewondering, van zou ik dat ook ooit kunnen, verlaat ik de zaal.

Valselijk gebruik van statistiek

De slotlezing van Davy Paindaveine over de rangschikking van films vond ik wat te langdradig. De clou was al gauw duidelijk. Als je maar vaak genoeg een film een hoge waardering geeft dan gaan meer mensen die ook zien waardoor hij ook weer hoger gewaardeerd wordt. Op zich een mooi voorbeeld van het valselijk gebruik van statistiek. De rol van de mediaan en het gemiddelde werd pijnlijk duidelijk. Hoe een uitschieter naar oneindig voor een totale foute rangschikking kan leiden.

Voldaan naar huis

Na de lunch vertrok ik met een half lege big shopper, maar wel gevuld met mooie aandenkens aan deze NWD, voldaan naar huis.