

Robbert Fokkink

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
r.j.fokkink@tudelft.nl

Biografie Willem Wijthoff (1865–1939)

Wie weet wie Willem Wijthoff was?

Willem Wijthoff leidde een onopvallend leven en er is weinig informatie over hem te vinden, maar in de wiskunde heeft hij zijn sporen nagelaten in de vorm van het Wythoff-symbool en Wythoffs Nim. Twee verschillende begrippen, er zijn niet veel wiskundigen die dat op hun naam hebben staan. Wie was deze Willem Wijthoff eigenlijk? Robbert Fokkink schetst een beeld van het leven en werk van deze in de vergetelheid geraakte wiskundige.

Willem Abraham Wijthoff werd op 10 oktober 1865 geboren in Amsterdam. Hij groeide op in een monumentaal herenhuis op de hoek van de P.C. Hooftstraat en de Hobbe- mastraat — tegenwoordig is het een flag- shipstore van het strakke spijkerbroeken- merk G-Star Raw — waar hij bleef wonen tot aan zijn dood op 21 mei 1939. In de wiskunde wordt Wijthoff overigens ge- schreven met een y omdat Wijthoff dat zelf zo deed boven al zijn publicaties. De bur- gerlijke stand noteert een ij.

Willem Wijthoff was de jongste van vier kinderen. Hij had drie zussen: Geertruida, die net als hij wiskunde studeerde, Henriëtte, een schrijfster, en Anna, een kunstenares. De familie Wijthoff was welgesteld. De va- der en de grootvader van Willem Wijthoff waren eigenaar van de Amsterdamse sui- kerraffinaderij Wijthoff en Zoon. Deze firma ging eind 1864 failliet, een gebeurtenis die nog werd vermeld door de minister van Financiën vanwege consequenties voor de Nederlandse schatkist, maar maak- te in 1865 een doorstart op grote schaal onder de naam Internationale Suikerraffi- naderij. Het waren roerige tijden voor de Nederlandse suikerindustrie, die toen nog draaide op suikerriet. Er was concurren- tie van buitenlandse bietsuiker en er was weerstand tegen de erbarmelijke toestan-

den in de Amsterdamse fabrieken. Wijthoff en Zoon overleden kort na elkaar in 1880 en 1881. Een week na het overlijden van Wijthoff senior, in mei 1881, ging de Inter- nationale Suikerraffinaderij failliet. Rond dezelfde tijd schreef Truida Wijthoff zich in als student wis- en natuurkunde aan de universiteit van Amsterdam [11]. De enige Nederlandse vrouw die eerder studeerde was Aletta Jacobs.

In 1884 gaat ook Willem wis- en natuur- kunde studeren. Hij slaagt voor zijn kandi- daatsexamen in 1887, gaat daarna in dienst en doet doctoraalexamen scheikunde in 1892 en doctoraal wis- en natuurkunde in 1895. In 1895 is hij assistent van de na- tuurkunde in Groningen, waarschijnlijk bij Schoute. Misschien is hij daar al begonnen aan zijn proefschrift, een verhandeling over transformatiegroepen van de vierdimensi- onale ruimte. Korteweg is de promotor, maar het onderwerp van het proefschrift ligt dicht bij de interesse van Schoute.

In 1893 start de *Revue Semestrielle des Publications Mathématiques*, een voorlo- per van *Math Reviews* en het *Zentralblatt*, onder redactie van Schoute. Truida is een van de medewerkers van het eerste uur, zij schrijft de reviews van de Scandina- vische tijdschriften. Na zijn promotie in 1898 wordt ook Willem medewerker bij

de Revue. Hij neemt de Amerikaanse tijd- schriften voor zijn rekening, blijft dat der- tig jaar doen, en wordt hoofdredacteur na het overlijden van Schoute in 1913. Op de jaarlijkse vergadering van 1902 wordt hij gekozen in het bestuur van het Wiskundig Genootschap, maar al snel treedt hij terug. In de archieven van het WG zijn geen no- tulen te vinden met zijn naam en op de vergadering van 1903 is er sprake van een vacature die is ontstaan door de bedan- king van Wijthoff. Toch moet hij zichtbaar



Figuur 1 In 1885 werd de Amsterdamsche Studentenbond opgericht, als tegenhanger van het elitaire Studentencorps. Willem Wijthoff was een van de oprichters en werd secretaris, ofwel ab-actis, zoals te zien in deze oproep in het *Nieuws van de Dag*, 5 september 1887. Het is moeilijk om informatie over Wijthoff boven water te krijgen, maar in de ASB was hij prominent aanwezig. Als de bond op 7 juli 1901 bij elkaar komt, op wat later de laatste vergadering blijkt te zijn geweest, is er nog een ultieme poging om de vereniging nieuw leven in te blazen via het plan Wijthoff, een voorstel tot een fusie met het Amsterdamse Studenten Toneel. Het is vergeefs, eind 1901 werd de ASB opgeheven.



Foto: Indisch Thee & Familie Archief

Figuur 2 Truida Wijthoff. Erelid van het WG.

zijn gebleven in de wiskundige gemeenschap. In 1916 bemoeit Brouwer zich met de opvolging van Kapteyn. Brouwers eerste kandidaat is Mannoury en zijn tweede kandidaat is Wijthoff [7]. Uiteindelijk kiest de Universiteit Utrecht voor Denjoy, die een hele reis moet maken vanuit Frankrijk vanwege tussenliggende loopgraven.

Het is onduidelijk waar Wijthoff werkte en of hij dat überhaupt ooit wel heeft gedaan. Hij wordt soms beschreven als leraar wiskunde, maar op welke school is niet bekend. Vanaf 1920 was hij lid van de examencommissie voor de onderwijzersacte. Bij bijna alle leden van de commissie staan de functies vermeld, hoogleraar of onderwijzer, directeur of inspecteur, maar bij Wijthoff staat alleen de woonplaats. Wat dat betreft is er meer terug te vinden over Truida, die lerares wiskunde was aan de meisjesschool in Middelburg van 1884 tot 1886. Op 6 augustus 1885 bericht de Middelburgse Courant over een vergadering van de gemeenteraad, waarin haar herbenoeming wordt besproken. De ene helft van de raad is voor een vaste benoeming, de andere helft wil een tijdelijk contract, omdat de financiële situatie van de school weinig rooskleurig is. Bovendien moet de relevantie van het wiskundeonderwijs op de meisjesschool eerst nog eens worden gezien. Het wordt uiteindelijk een tijdelijke benoeming, want in de zomer van 1886 is Truida weer terug in Amsterdam. Waarschijnlijk heeft ze daarna niet meer voor de klas gestaan. Ze gaat werken voor het Administratiekantoor tot Beheer van Amerikaanse Spoorwegwaarden, een beleg-

gingsfonds van de Amsterdamse bankier Wertheim. Ze was, net als haar broer, een trouw oplosser van de problemenrubriek in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en maakte er een gewoonte van om de jaarlijkse prijsvraag te winnen. Op de jaarvergadering van 1907 werd Truida benoemd tot

erelid van het WG, nadat ze de prijsvraag voor de tiende keer had gewonnen. Op de website van het KWG staan de ereleden Coxeter, Erdős, Mahler, Vinogradov, en nog wat andere mannen. Het zou aardig zijn als het eerste vrouwelijke erelid van het WG in dit rijtje wordt opgenomen.

Het gezin Wijthoff blijft lang bij elkaar wonen op de P.C. Hooftstraat 28. In 1898 en 1899 verlaten twee zussen het huis. Henriëtte verhuist naar Heiloo. Truida trouwt met haar neef Julius Kerkhoven, een civiel ingenieur die twintig jaar lang in Semarang heeft gewerkt voor de Nederlands-Indische spoorwegmaatschappij en die zijdelings wordt beschreven in *Heren van de Thee*, een roman van Hella Haasse. Ze gaan wonen in Apeldoorn. Truida wint nog vele malen de jaarlijkse NAW-prijsvraag en ook Julius wordt een oplosser van de problemenrubriek. Anna blijft wonen in de P.C. Hooftstraat, maar op huisnummer 21. De familie Wijthoff had twee huizen in bezit, nummer 21 en 28. Uiteindelijk geeft ook Willem nummer 21 op als zijn huisadres. Wijthoff en zijn drie zussen leidden dankzij hun familiekapitaal een comfor-



Foto: Indisch Thee & Familie Archief

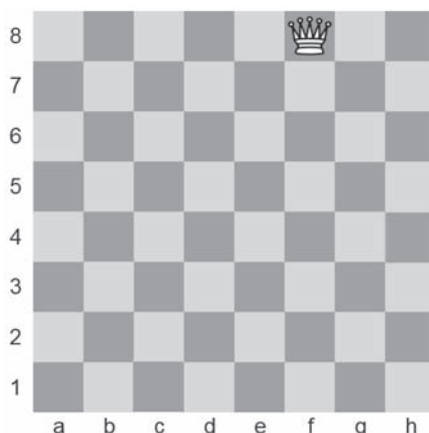
Figuur 3 Bij elkaar in het theehuis in de tuin van Truida in Apeldoorn. Van links naar rechts: Anna Wijthoff, Willem Wijthoff, Truida Wijthoff, Julius Kerkhoven, Anna Catharina Wijthoff-Kerkhoven.

tabel en rustig bestaan. Ze hadden een hechte band. Willem en Anna woonden bij elkaar in Amsterdam, Truida en Henriëtte woonden bij elkaar in Apeldoorn nadat Julius was overleden. Geen van hen had kinderen en daarom is er nu nog maar weinig over hen te vinden. Truida, de oudste van de vier, overlijdt als laatste in 1953.

Wythoffs Nim

In de *Revue Semestrielle* van 1902 schrijft Wijthoff een review over Boutons analyse van Nim (zie Figuur 4). Het moet hem aan het denken hebben gezet. Een paar jaar later schrijft hij in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* over een spel met twee stapels munten, dat hij 'a modification of the game of Nim' noemt. Wijthoffs spel kun je ook spelen met een dame op een schaakbord, of een ander bord met meer velden zoals een go-bord. Hoe groter het bord hoe beter. Plaats de dame op een willekeurig beginpunt (zie Figuur 5) en verklaar dit tot rechterbovenhoek. De ene speler doet een zet met de dame en de nieuwe positie van de dame is de nieuwe rechterbovenhoek, zo wordt het bord dus kleiner. Nu is de andere speler aan zet. Degene die de dame op de linkerbenedenhoek zet, wint. Er zitten veel patronen in dit spel en dat is de reden dat er nog steeds over wordt gepubliceerd. Zoek in MathSciNet maar eens op Wythoff.

Wythoffs spel draait om de verloren velden, dat wil zeggen, de posities van de dame waarbij de beginspeler verliest. De linkerbenedenhoek a_1 is een verloren veld, want de beginspeler kan gelijk niet meer zetten. Ook b_3 is een verloren veld, want a_1 is onbereikbaar, maar wordt bereikbaar na elke mogelijke beginzet. De verloren velden op een gewoon schaakbord zijn a_1 , b_3 , c_2 , d_6 , e_8 , f_4 en h_5 . Speel de dame naar een verloren veld zodra je aan zet bent. Staat de dame al op een verloren veld, hoop dan op een vingerfout van de tegenstander.



Figuur 5 Wijthoffs spel met een dame op een schaakbord.

Op een oneindig schaakbord is de notatie met cijfers en letters niet vol te houden, dus noteren we (m, n) met coördinaten $0, 1, 2, 3, \dots$. Zet de veelvouden van de gulden snede $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ op een rij, afgerond naar beneden op het gehele deel

$$1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, \\ 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 33, 35, \dots$$

Doe hetzelfde voor de veelvouden van ϕ^2 . Dit geeft de rij van de ontbrekende getallen

$$2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, 36, \dots$$

Zet nu de twee rijen onder elkaar. De kolommen vormen de verloren velden. Er zit symmetrie in het spel, dit zijn de verloren velden met $m < n$, de andere verloren velden krijg je door het bord om te klappen.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 11 & 12 & 14 & 16 & 17 & 19 & 21 & 22 & 24 & 25 & 27 \\ 2 & 5 & 7 & 10 & 13 & 15 & 18 & 20 & 23 & 26 & 28 & 31 & 34 & 36 & 39 & 41 & 44 \end{array}$$

Er is een andere manier om deze twee getallenrijen op te schrijven. Elk getal komt één keer voor en ook elk verschil tussen getallen in dezelfde kolom komt één keer voor. De simpelste manier om aan deze voorwaarden te voldoen is door te beginnen met 1 in de bovenste rij. Elk volgende getal komt dan op de eerste vrije plaats die dat toelaat: 2 past op de onderste rij,

3 op de bovenste. Daarna is er voor 4 geen plaats op de onderste rij, want het verschil $4-3$ laat dit niet toe, dus 4 moet op de bovenste rij. Vervolgens past 5 op de onderste rij, enzovoort. Deze simpelste methode creëert de rij van verloren velden.

Er zijn nog meer patronen. De opeenvolgende paren van getallen in de Fibonacci-rij $\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{8, 13\}, \{21, 34\}, \dots$ vormen een rij van verboden velden en wie verder kijkt, ontdekt Beatty-rijen en de stelling van Zeckendorf. Wie daar meer over wil weten, moet het artikel van Kimberling lezen [10], of hoofdstuk acht van Martin Gardners boek *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*.

Wythoffs constructie

Iedereen kent de vijf platonische lichamen: tetraëder, kubus, octaëder, dodecaëder en icoosaëder (Figuur 6). In dimensie vier zijn er zelfs zes platonische lichamen, maar vanaf dimensie vijf verschijnen alleen kopieën van de tetraëder, kubus en octaëder. Alicia Boole Stott, een secretaresse in Liverpool en de dochter van George Boole, ontdekt op eigen houtje de vierdimensionale platonische lichamen [12]. Ze maakt kartonnen modellen van driedimensionale doorsneden van deze lichamen, die nog steeds worden bewaard in het Groninger Museum (zie Figuur 7). Aan het eind van de negentiende eeuw komt zij in contact met Schoute, die haar bezoekt in Engeland. Er ontstaat een langdurige samenwerking.

De driedimensionale doorsneden van Alicia Boole Stott zijn polytopen met een hoge mate van symmetrie. Het zijn geen platonische lichamen, want de facetten zijn niet congruent, maar ze zijn bijna net zo esthetisch. Boole Stott noemt ze *half-regelmatige polytopen*. Ze ontdekt twee meetkundige operaties, de *expansie* en *contractie*, waarmee ze deze halfregelmatige polytopen rechtstreeks kan produceren vanuit platonische lichamen, zonder doorsneden te gebruiken. Na lang aandringen van Schoute publiceert ze haar resultaten in 1910 in de verhandelingen van de KNAW [2]. Ondertussen gaat Schoute zelf aan de slag om de coördinaten vast te leggen van alle halfregelmatige lichamen die via contractie en expansie kunnen worden geproduceerd. Hij schrijft de *Analytical Treatment of the Polytopes Regularly Derived from Regular Polytopes*, een werk in vijf delen waarvan de eerste vier [14] verschijnen in de verhandelingen van de Akademie van

Annals of Mathematics, Harvard University, 2nd series, III (1, 2), 1901, 1902.

(W. A. WYTHOFF.)

I 1, J 2 c. CH. L. BOUTON. Nim, a game with a complete mathematical theory. Three piles of counters are placed upon a table. Two players take alternately from a single pile an arbitrarily chosen number of counters. The player who takes up the last counters wins. Theory and modifications of the game (p. 35–39).

Figuur 4 Wijthoffs review over Boutons analyse van Nim.



Figuur 6 De vijf platonische lichamen.

Wetenschappen in 1911 en 1913. Voordat hij het vijfde deel [15] af kan maken, komt Schoute te overlijden. Er is alleen een stapel aantekeningen die wordt overgedragen aan Jacob Cardinaal, hoogleraar wiskunde en lid van de Akademie, voormalig rector magnificus in Delft. Hij schakelt de hulp in van Willem Wijthoff.

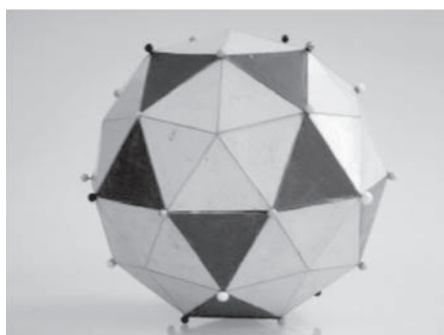
In de eerste drie delen had Schoute de methode van Boole Stott behandeld voor de drie platonische lichamen die in alle dimensies voorkomen: het simplex, de hy-

perkubus en het kruispolytoop. Deel vier ging over een halfregelmatic polytoop dat wordt opgespannen door hoekpunten van de hyperkubus die geen burens van elkaar zijn. Deel vijf, het deel dat op het bord van Cardinaal en Wijthoff terecht komt en dat twee jaar na Schoutes overlijden verschijnt, gaat over de speciale platonische lichamen die alleen in dimensie drie en vier voorkomen: de dodecaëder, de isocaëder in dimensie drie; de 24-cel, de 120-cel en de 600-cel in dimensie vier. Cardinaal en Wijthoff maken van het vijfde deel van de *Analytical Treatment* een nogal droge opsomming van zestig pagina's met coördinaten van halfregelmatic polytopen. Bijna de helft ervan zijn polytopen die ontstaan uit de 600-cel. De kampioen is $e_1 e_2 e_3 C_{600}$ met 14400 hoekpunten, waarvan de coördinaten drie pagina's in beslag nemen.

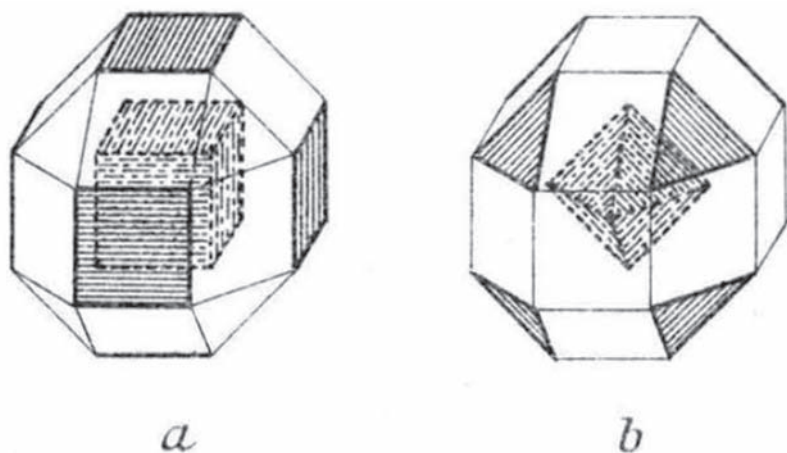
Wijthoff bedenkt dat het veel eenvoudiger is om de methode van Boole Stott te beschrijven met symmetriegroepen. De halfregelmatic polytopen hebben dezelfde symmetriegroep als de oorspronkelijke platonische lichamen. Je kunt net zo goed de convexe afsluiting nemen van $G \cdot x$, mits

de ribben allemaal even lang zijn. Om dit te bereiken, beschouwt Wijthoff een fundamenteel polytoop P , met de eigenschap dat het platonisch lichaam gelijk is aan de vereniging van $G \cdot P$. De symmetriegroep G wordt gegenereerd door spiegelingen in de facetten van P . Om ribben van gelijke lengte te produceren, moet x equidistant zijn met alle facetten van P die x niet bevatten. Dit heet tegenwoordig *Wythoffs constructie*. Wijthoff beschrijft zijn constructie aan de hand van de 600-cel, zijn grote plaaggeest uit het artikel met Cardinaal, een platonisch lichaam met een isometriegroep van orde 14400. Een kleine tien jaar later wordt Wijthoffs werk opgemerkt door Gilbert de Beauregard Robinson. Een ongebruikelijke gebeurtenis, want halfregelmatic polytopen zijn in de loop van de tijd telkens opnieuw ontdekt door onderzoekers die geen weet hadden van eerder werk. Robinson vertelt het door aan zijn mede-student Donald Coxeter (zie het hoofdstuk van Monson en Weiss in [8]), die Wythoffs constructie uitvoerig beschrijft in zijn boek over regelmatige polytopen en spiegelingsgroepen [5].

De icosidodecaëder in Figuur 7 en de semisnubkubus in Figuur 8 waren al bekend aan Archimedes. Het zijn twee van de dertien archimedische lichamen: polytopen met ribben van gelijke lengte en een symmetriegroep die transitief werkt op de hoekpunten. De vierdimensionale archimedische lichamen kunnen bijna allemaal worden gemaakt uit platonische lichamen via Wythoffs constructie. Er zijn twee essentiële uitzonderingen: de semisnub polyoctaëder, dat in 1900 werd gevonden door de Londense advocaat Thorold Gosset, en het grote antiprisma van John Conway en Michael Guy uit 1965. Conway en Guy produceerden alle vierdimensionale archimedische lichamen met behulp van de computer, en vonden nog een nieuwe vorm. "It would have been a bit disappointing if everything had already been found", zegt Conway daarover in zijn biografie [11].



Figuur 7 Alicia Boole Stotts model van de icosidodecaëder, zoals te zien in het Groninger Museum. Het is een drie-dimensionale doorsnede van de 600-cel, waarvan de facetten bestaan uit driehoeken en vijfhoeken.



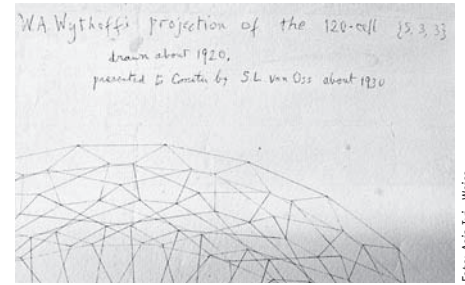
Figuur 8 Illustratie uit het artikel van Boole Stott van een 2-expansie gevolgd door een contractie. In de expansie in figuur a worden de zes gearceerde 2-cellen van de kubus naar buiten verplaatst en aangevuld met vierkanten en driehoeken. Het resultaat is een *semisnub kubus* (ook wel rhombicuboctaëder genoemd). In de contractie in b worden de vierkanten uit de semisnub kubus verwijderd en worden de driehoeken, die corresponderen met de hoekpunten in de oorspronkelijke kubus, naar binnen verplaatst. Het resultaat is een octaëder

Wythoffs tekening van de 120-cel

In maart 1957 schrijft John Conway, dan nog student in Cambridge, een lange brief aan Coxeter en eindigt met: "My absolute last remark is a question. Where can I find the requisite information to draw $\{5, 3, 3\}$, or do I have to work out the details for myself? I should be very thankful if you could supply me with some accessible information." De $\{5, 3, 3\}$ waar Conway het over heeft is het Schäfli-symbool voor de 120-cel. De eerste pagina van Coxeters boek *Regular Polytopes* bestaat uit een tekening van de 600-cel. Op pagina 247 staat uitgelegd hoe je deze tekening zelf kunt maken, maar Coxeter legt niet uit hoe je de 120-cel moet tekenen. Het is dus niet zo gek dat Conway daar naar vraagt. Dit polytoop heeft het grootste skelet onder de vierdimensionale platonische lichamen, met maar liefst 600 hoekpunten en 1200 zijden. Op pagina 260 schrijft Coxeter: "Van Oss inherited Wythoff's remarkable drawing of $\{5, 3, 3\}$ and showed me it when I visited

him in 1932. But the 1200 edges are too faint for photographic reproduction." Salomon van Oss, een student van Schoute, was dé specialist op het gebied van polytopen in Nederland en de tekening van de 600-cel op de eerste pagina van Coxeters boek is van hem. Van Oss liet niet alleen Wijthoffs tekening zien, hij deed deze ook cadeau. Tegenwoordig is de tekening in het bezit van Asia Ivič Weiss (York University, Toronto).

Het was voor Wijthoff niet zo moeilijk om de 120-cel te tekenen (Figuur 9), want hij kende de coördinaten van alle polytopen op zijn duimpje. Tegenwoordig kan iedereen die coördinaten zo vinden op het internet en door de komst van de computer is het veel eenvoudiger om de 120-cel zichtbaar te maken. Dit polytoop heeft zijn eigen Wikipedia-pagina met projecties in twee dimensies en animaties in drie dimensies. Wie meer wil weten moet John Stilwells verhaal in de *Notices* lezen [16].



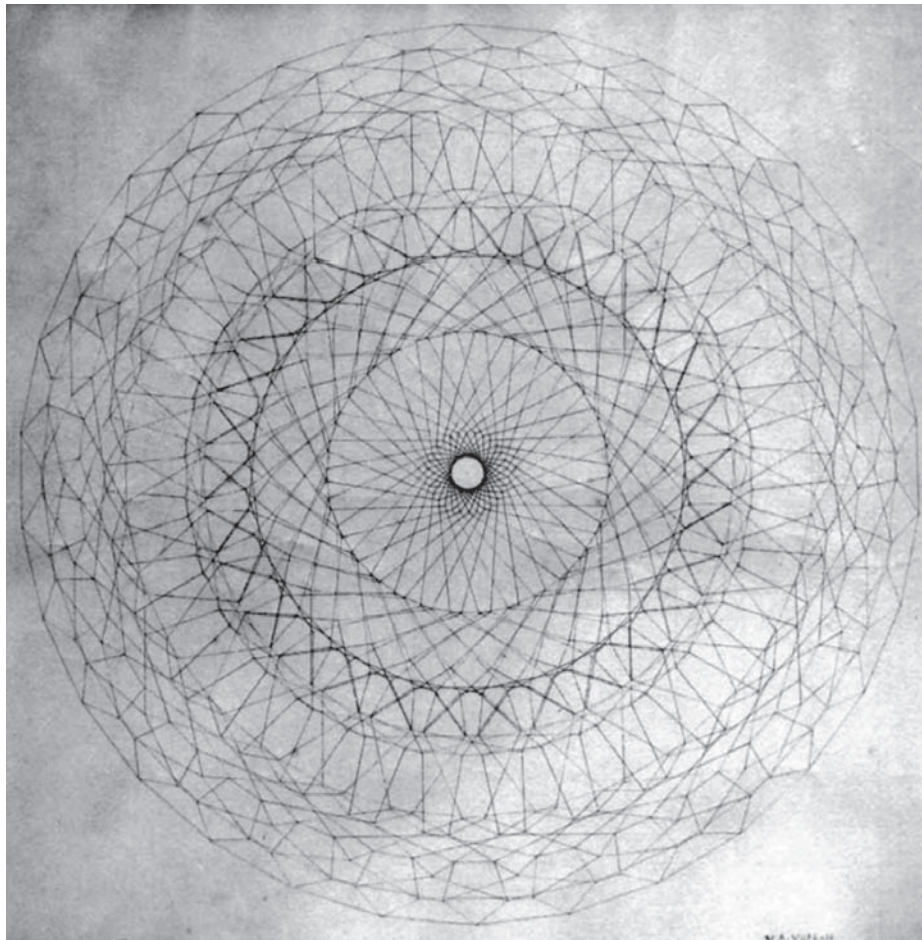
Figuur 10 Detail van Wijthoffs tekening met het bijchrift van Coxeter.

Wythoffs bewijs van de stelling van Mantel

Opgave 28 uit het *Nieuw Archief voor Wiskunde* van 1907 is van de Delftse wiskundige Willem Mantel: "Er zijn eenige punten gegeven waarvan geen vier in een zelfde vlak liggen. Hoeveel rechten kan men hoogstens tusschen de punten trekken zonder driehoeken te vormen?" De oplossing van opgave 28 is dat het aantal rechten ten hoogste gelijk is aan het kwadraat van het aantal punten, gedeeld door vier. Tegenwoordig heet dit de stelling van Mantel: een graaf met n knopen en e zijden bevat een driehoek als $e > n^2/4$. Het is een speciaal geval van de stelling van Turán, die aan de basis staat van de extreme grafentheorie.

Opgave 28 wordt opgelost door Gouwentak, Mantel, Teixeira de Mattos, Schuh, en Wijthoff. De gepubliceerde oplossing, en daarmee het eerste bekende bewijs in de extreme grafentheorie, is van Wijthoff. Het is analoog aan het bewijs van Erdős van de stelling van Turán. Wijthoff toont aan dat een graaf zonder driehoeken en met een maximaal aantal zijden bipartiet is. Aangezien een bipartiete graaf op n knopen ten hoogste $n^2/4$ zijden heeft, is daarmee de stelling van Mantel bewezen.

De redenatie gaat als volgt. Laat a_1 een knoop van maximale graad in G zijn, met burens $b_1, \dots, b_p$. Laten $a_2, \dots, a_q$ de knopen zijn op afstand twee van a_1 , de burens van de burens. Dan vormen $a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_p$ alle knopen, want een resterende knoop zou een extra zijde toelaten met a_1 zonder een driehoek te vormen in G . We hebben dus een partitie $A \cup B$ van de knopen. De b 's kunnen geen burens van elkaar zijn omdat ze anders een driehoek zouden vormen met a_1 . Als we nu aan kunnen tonen dat de a 's ook geen burens van elkaar zijn, dan zijn we klaar. Wijthoff beweert het volgende: haal de zijden tussen a 's weg en verbind elke knoop in A met elke knoop in B , dan gaat de graad van geen enkele knoop omlaag. De bewering is duidelijk



Figuur 9 Wijthoffs tekening van de 120-cel zoals gereproduceerd in [9], de ondertekening W.A. Wijthoff (met een ij) is vaag zichtbaar. Coxeter heeft erbij geschreven: "W.A. Wythoff's projection of the 120-cell $\{5, 3, 3\}$. Drawn about 1920. Presented to Coxeter by S.L. van Oss about 1930."

waar voor knopen in B , want die worden nu verbonden met heel A . De bewering is ook waar voor knopen in A , want die krijgen nu dezelfde graad als a_1 en die graad was maximaal. Als er in de oorspronkelijke graaf twee a 's met elkaar verbonden zouden zijn, dan zou de graad van b 's zelfs strikt toenemen, in tegenspraak met de aanname dat G een maximaal aantal zijden heeft. Dus G moet bipartiet zijn.

Naschrift

Het is onduidelijk wanneer de familie Wijthoff is verhuisd naar de P.C. Hooftstraat. De woningbouw buiten de stadswallen werd in Nederland officieel mogelijk door de Vestingwet van 1874, maar er werd al eerder gebouwd. De gemeenteraad legt de naam van de straat vast op 20 december 1872. De kadastrale tekening van P.C. Hooftstraat 20–28 is gedateerd op 1873 in het stadsarchief. Waarschijnlijk is de familie niet veel later verhuisd. Het was in die tijd aan de rand van de stad. Met de bouw van het Rijksmuseum, dat op een steenworp afstand staat, werd begonnen in 1876.

De ene grootvader van Willem Wijthoff was de suikerfabrikant Pieter George Lodewijk Wijthoff, de andere was de bankier en politicus Johannes Kerkhoven, die heeft geprobeerd de Dollard in te polderen. Hella Haasse beschrijft de familie Kerkhoven in *Heren van de Thee*, dat is vertaald in het Engels als *The Tea Lords*. Het boek is bovendien bewerkt tot een toneelstuk.

Willem Wijthoff schreef zijn achternaam vaak met een Griekse γ , maar niet altijd.

De spelling is vrij. Het Meertens Instituut maakt in de databank met familienamen geen onderscheid tussen een γ en een y .

De eerste publicatie van Brouwer betrof rotaties van de vierdimensionale ruimte. In deze publicatie verwijst Brouwer naar het proefschrift van Wijthoff. Het ligt voor de hand dat Korteweg zijn student Brouwer in contact heeft gebracht met zijn promovendus Wijthoff. Zo kreeg Brouwer dus al op jonge leeftijd te horen over de resultaten uit de school van Schoute. Misschien heeft deze kennis van polyeders en betegelingen Brouwer geholpen om de simpliciale approximatie te bedenken, het sleutelidee in het bewijs van de dekpuntsstelling. Misschien ook niet, maar in ieder geval heeft deze techniek zijn naam te danken aan Schoute, want die bedacht de term *simplex* in 1902.

De twee complementaire rijen van coördinaten in Wythoffs Nim zijn voorbeelden van wat later Beatty-rijen zijn genoemd. Klaarblijkelijk dacht Wijthoff ook al na over Beatty-rijen, want hij maakt enkele opmerkingen in die richting aan het eind van zijn artikel.

De dertien archimedische lichamen werden beschreven door Archimedes in een werk dat niet bewaard is gebleven. De meerdimensionale platonische lichamen werden gevonden door Ludig Schäfli, maar zijn werk werd pas bekend na zijn dood. De meerdimensionale archimedische lichamen werden bestudeerd door Thorold Gosset, bij gebrek aan cliënten in zijn advocatenpraktijk. De studie van polytopen is een riskante business.

Willem Mantel was repetitor in Delft en verdiende zijn brood door aankomende ingenieurs de calculus bij te brengen. Hij was ook een medewerker van de Revue Semestrielle. Buiten opgave 28 verschenen er in die tijd geen andere grafentheorieproblemen in het NAW. Dat is jammer, want Wijthoff had best de gedachtenstap kunnen zetten van een graaf zonder driehoeken naar een graaf zonder simplices. Gelukkig worden er tegenwoordig nog steeds resultaten over extreme grafen en polyeders geproduceerd in Amsterdam. Net als honderd jaar geleden gebeurt dat aan de rand van de stad. ↵

Dankwoord

Verschillende mensen hebben mij geholpen. Karel van der Hucht en Swanica Bergsma stelden informatie beschikbaar uit het Indisch Thee en Familie Archief, www.theefamiliearchief.nl. Asia Ivić Weiss maakte foto's van de tekening van Wijthoff, die zij bewaart in haar kamer in York University, Toronto. Jan Heerze doorzocht schoolarchieven in Apeldoorn, en stelde vast dat Truida Wijthoff daar geen lerares is geweest. Herman te Riele deed hetzelfde met het archief van het WG. Hij vond dat Willem Wijthoff geen enkele bestuursvergadering van het WG heeft bijgewoond en dat Truida Wijthoff erelid werd in 1907. Wieb Bosma haalde het plan Wijthoff uit een boekje over de ASB. Hij nodigde mij ook uit voor een lezing over speltheorie voor leraren tijdens het wiskundetoernooi in Nijmegen, in september 2015. Het leek me leuk om die lezing te beginnen met het werk van de 'leraar' Wijthoff en de obsessie die daarop volgde leidde uiteindelijk tot deze tekst.

Dit verhaal was onmogelijk geweest zonder het digitale archief Delpher van de Koninklijke Bibliotheek. Delpher verwijst naar het orakel en naar delven, net als Delft, waar ik dit verhaal geschreven heb.

Referenties

- 1 C. Berkers, *Anna Wijthoff (1864–1947), haar leven, haar illustraties en de receptie van haar werk*, BA-scriptie, Universiteit Utrecht, 2014, <http://dspace.library.uu.nl>.
- 2 A. Boole Stott, Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings, *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1e sectie, deel XI(1) (1910), www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00011492.pdf.
- 3 W. Bosma, Wiskundige Verpoelingen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/10 (2009), 42–47.
- 4 J.H. Conway, H. Burgiel en C. Goodman-Strauss, The symmetries of things, A.K. Peters, 2008.
- 5 H.S.M. Coxeter, Regular polytopes, Dover Publications 1973, 1e editie 1947.
- 6 H.S.M. Coxeter, Polytopes in the Netherlands, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/26 (1978), 116–141.
- 7 D. van Dalen, L.E.J. Brouwer, *Topologist, Intuitionist, Philosopher*, Springer, 2012.
- 8 C. Davis en E.W. Ellers, *The Coxeter Legacy, Reflections and Projections*, Fields Institute Communications, Vol. 48, AMS, 2005.
- 9 H. Houtgraaf, *40 jaar U.S.A. 1911–21 februari 1951*, Gedenkboek der Unitas Studiosorum Amstelodamensium waarin opgenomen een korte geschiedsbeschrijving van de Amsterdamse Studenten Bond, Amsterdam 1951.
- 10 C. Kimberling, The Zeckendorf array equals the Wythoff array, *Fibonacci Quarterly* 33(1), 1995, 3–8.
- 11 P.J. Knechtmans, *Professoren van de stad: het Athenaeum illustre en de Universiteit van Amsterdam, 1632–1960*, Amsterdam University Press, 2007.
- 12 I. Polo Blanco, Alicia Boole Stott's models of sections of polytopes, *Lett. Mat. Int.* 2 (2014), 149–154.
- 13 S. Roberts, *Genius at Play, the Curious Mind of John Conway*, Bloomsbury, New York, 2015.
- 14 P.H. Schoute, Analytical treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes (sections I–IV), *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1e sectie, deel XI(3) (1911) en deel XI(5) (1913), biodiversitylibrary.org.
- 15 P.H. Schoute en J. Cardinaal, Analytical treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes (section V), *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1e sectie, deel XII(2) (1915), biodiversitylibrary.org.
- 16 J. Stillwell, The story of the 120-cell, *Notices of the American Mathematical Society* 48(1) (2001), 17–24.
- 17 J. Top en E. Weitenberg, Schoute herschijnt, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/12 (2011), 116–120.
- 18 W.A. Wythoff, A Modification of the Game of Nim, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 2/7 (1907), 199–202, archive.org.
- 19 W.A. Wythoff, A relation between the polytopes of the C600-family, *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1e sectie, deel XX(2) (1918), 966–970 biodiversitylibrary.org.