Martijn Kool
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
m.kool1@uu.nl

Column Tenure-tracker

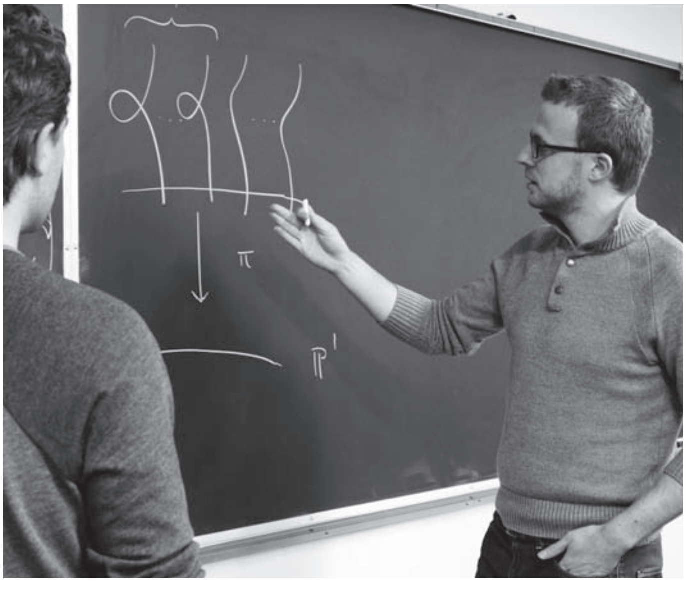
Krommen tellen

In deze rubriek stellen houders van een tenure track-positie zich voor. Om het wiskundig onderwijs en onderzoek op niveau te houden zijn in 2013 tenure track-posities gerealiseerd door de wiskundeclusters. Deze aanstellingen bieden jonge wiskundige onderzoekers kans op aanzienlijke groei in hun wetenschappelijke carrière. Martijn Kool heeft een tenure track-positie aan de Universiteit van Utrecht.

Aftellende meetkunde is één van de oudste takken van de wiskunde met wortels in de Oudheid. Een probleem in aftellende meetkunde vraagt naar het aantal meetkundige objecten van een bepaald type dat aan gegeven beperkingen voldoet. Bijvoorbeeld, het probleem van Apollonius van Perga (circa 262 v. Chr. — circa 190 v. Chr.) luidt: "Hoeveel cirkels raken drie gegeven cirkels in het vlak?" In de negentiende eeuw ontwikkelde de school van H. Schubert tal van methoden om problemen in de aftellende meetkunde op te lossen, bijvoorbeeld "Hoeveel lijnen snijden vier gegeven lijnen in de 3-dimensionale ruimte?" Hoewel aftellende meetkunde in de negentiende eeuw veel vooruitgang kende, waren er ook problemen die niet konden worden opgelost, bijvoorbeeld de bepaling van zogenaamde Severi-graden, die we dadelijk introduceren.

Een algebraïsche kromme C in het vlak $\mathbb{R}^2$ is de nulpuntenverzameling van een veelterm: $f(x,y)=0$. In de aftellende meetkunde is het gebruikelijk om te werken in het 'complexe vlak' $\mathbb{C}^2$, zodat algebraïsche krommen ook daadwerkelijk niet-leeg zijn. Ook worden de vraagstukken veelal geformuleerd op projectieve ruimten. Het complexe projectieve vlak $\mathbb{CP}^2$ is het gewone vlak $\mathbb{C}^2$ met een (projectieve) lijn in het oneindige toegevoegd. Het projectieve vlak $\mathbb{CP}^2$ heeft als voordeel dat twee verschillende lijnen elkaar altijd snijden; ook als ze parallel zijn, namelijk in een punt op de lijn in het oneindige. We beschouwen vanaf nu dan ook algebraïsche krommen in $\mathbb{CP}^2$.

Veeltermen van graad d hebben $\binom{d+2}{2}$ coëfficiënten en worden dus geparametriseerd door een complexe vectorruimte van dimensie $\binom{d+2}{2}$. Wanneer we opmerken dat twee veeltermen die een multiplicatieve constante verschillen dezelfde kromme definiëren, vinden we dat de ruimte van krommen van graad d niets anders is dan de complexe projectieve ruimte van dimensie $\binom{d+2}{2}-1$. Alle krommen die door een gegeven punt in het vlak gaan, liggen in een lineaire deelruimte van codimensie 1 in deze projectieve ruimte. Wanneer we ons vervolgens afvragen hoeveel krommen van graad d door $\binom{d+2}{2}-1$ generieke punten gaan, doorsnijden we eigenlijk $\binom{d+2}{2}-1$ hyperoppervlakken in een projectieve ruimte van dimensie $\binom{d+2}{2}-1$. Aangezien zo'n doorsnede (generiek) precies één oplossing heeft, zien we dat het antwoord één is.



Bijvoorbeeld voor $d=1$ concluderen we dat één lijn door twee punten gaat.

De situatie wordt aanzienlijk moeilijker wanneer de krommen ook singulariteiten hebben. De eenvoudigste singulariteit is de *knoop*: een singulariteit die er lokaal uitziet als de oplossing van de vergelijking $xy=0$. De *Severi-graad* $N_{d,\delta}$ is het aantal krommen van graad d met δ knopen dat door

$$\binom{d+2}{2}-1-\delta$$

generieke punten gaat. Een eenvoudige opgave: ga na dat $N_{2,1}=3$ door een plaatje te tekenen. In de negentiende eeuw waren alle Severi-graden met ten hoogste drie knopen bekend: $\delta=1$ (J. Steiner, 1848), $\delta=2$ (A. Cayley, 1863, en ook G. Salmon, 1865) en $\delta=3$ (S. Roberts, 1875)

$$\begin{aligned} N_{d,1} &= 3(d-1)^2, \\ N_{d,2} &= \frac{3}{2}(d-1)(d-2)(3d^2-3d-11), \\ N_{d,3} &= \frac{9}{2}d^6-27d^5+\frac{9}{2}d^4+\frac{423}{2}d^3-229d^2-\frac{829}{2}d+525. \end{aligned}$$

Voor een gedetailleerd historisch overzicht verwijzen we naar S. Kleiman en R. Piene [4]. Het duurde echter meer dan een eeuw voordat alle Severi-graden $N_{d,\delta}$ werden bepaald door Z. Ran in 1989 [9] en L. Caporaso en J. Harris in 1996 [1].

Afgaande op bovenstaande lijst zou je kunnen vermoeden dat voor vaste δ het getal $N_{d,\delta}$ gegeven wordt door een veelterm in d. Dit blijkt alleen het geval te zijn wanneer $d\gg\delta$ ($d\geq\delta$ is voldoende). Als

$$\delta=\frac{d^2-3d}{2}+1,$$

dan telt $N_{d,\delta}$ het aantal zogenaamde *rationale krommen* van graad d door $3d-1$ punten. Het tellen van rationale krommen is opgelost door M. Kontsevich [5] en in dit geval worden de getallen $N_{d,\delta}$ in het algemeen *niet* door een veelterm gegeven.

Men kan ook krommen van gegeven graad d en aantal knopen δ tellen op andere oppervlakken S (en dus niet alleen op het projectieve vlak $\mathbb{CP}^2$). Bijvoorbeeld wanneer S gegeven wordt door de nulpuntenverzameling van een homogene veelterm op $\mathbb{CP}^3$. In 1997 formuleerde L. Göttsche het vermoeden dat voor iedere δ en $d\gg\delta$, de bijbehorende 'gegeneraliseerde Severi-graad' voor ieder oppervlak S door een universele veelterm in d (en drie andere getallen) wordt gegeven. In het bijzonder zouden de gegeneraliseerde Severi-graden alleen van de *topologie* van S afhangen. Inmiddels bestaan er diverse bewijzen van dit vermoeden, zie onder andere [3, 6, 10].

Eén manier om het Göttsche-vermoeden op te lossen is door het oppervlak S in te bedden in een variëteit van één complexe dimensie hoger (een zogenaamde *complexe drievoud*). Krommen op complexe drievouden en hun moduli blijken aan heel bijzondere eigenschappen te voldoen. Rond de jaren negentig van de vorige eeuw werden allerlei interessante invarianten van complexe drievouden X ontdekt, waarvan de zogenaamde *Gromov–Witten-* en *Donaldson–Thomas-invarianten* het meest opmerkelijk zijn. GW-invarianten tellen krommen op X en DT-invarianten tellen zogenaamde schoven (denk: vectorbundels) op X. Een diep vermoeden van D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov en R. Pandharipande [7] claimt dat de genererende functies van GW- en DT-invarianten gelijk zijn (op een mysterieuze variabelensubstitutie na). Dit zogenaamde MNOP-vermoeden is inmiddels in veel gevallen bewezen, zie [8].

Terug naar Severi-graden: door S in te bedden in een drievoud X kan men gegeneraliseerde Severi-graden in termen van bepaalde GW-invarianten van X uitdrukken. Vanwege het MNOP-vermoeden kun je die GW-invarianten uitrekenen door middel van DT-invarianten en die blijken in deze specifieke context inderdaad door universele veeltermen te worden gegeven. Dit leidt tot een kort bewijs van het Göttsche-vermoeden [6].

Ik ben geïnteresseerd in het berekenen van genererende functies van GW/DT-invarianten voor specifieke families van complexe drievouden X. Afhankelijk van je keuze van X leidt dit tot verbanden met aftellende meetkunde, modulaire vormen, combinatoriek van partities, of theoretische natuurkunde (GW-invarianten zijn een topologische versie van padintegralen in de snaartheorie). Hier valt dus veel te beleven!

Biografie

Martijn Kool promoveerde in 2010 in Oxford onder begeleiding van D. Joyce. In 2010–2013 werkte hij als postdoc aan Imperial College en 2013–2014 als PIMS postdoc aan UBC. Hij is begonnen als tenure-tracker in Utrecht in januari 2015 en ontving een Marie Skłodowska-Curie-beurs in hetzelfde jaar.

Referenties

1 L. Caporaso en J. Harris, Counting plane curves of any genus, *Invent. Math.* 131 (1998), 345–392.
2 L. Göttsche, A conjectural generating function for numbers of curves on surfaces, *Comm. Math. Phys.* 196 (1998), 523–533.
3 M. Kazarian, Multisingularities, cobordisms, and enumerative geometry, *Russ. Math. Surv.* 58 (2003), 665–724.
4 S. Kleiman en R. Piene, Node polynomials for families: methods and applications, *Math. Nachr.* 27 (2004), 69–90.
5 M. Kontsevich, Enumeration of rational curves via torus actions, in *The Moduli Space of Curves*, Progress in Math. No. 129, Birkhäuser, 1995, pp. 335–368.
6 M. Kool, V. Shende en R. P. Thomas, A short proof of the Göttsche conjecture, *Geom. Topol.* 15 (2011), 397–406.
7 D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov en R. Pandharipande, Gromov–Witten theory and Donaldson–Thomas theory, I, *Compos. Math.* 142 (2006), 1263–1285.
8 R. Pandharipande en A. Pixton, Gromov–Witten/Pairs correspondence for the quintic 3-fold, arXiv:1206.5490.
9 Z. Ran, Enumerative geometry of singular plane curves, *Invent. Math.* 97 (1989), 447–469.
10 Y.-J. Tzeng, A proof of the Göttsche–Yau–Zaslow formula, *J. Diff. Geom.* 90 (2012), 439–472.