

Theo-Jan van de Pol

Ichthuscollege, Veenendaal
tjvdpol@ichthuscollege.nl

Lia Hemerik

Leerstoelgroep Wiskundige en Statistische Methoden
Wageningen UR
lia.hemerik@wur.nl

Onderwijs Een schoolvoorbeeld van alternatieve evenwichten

Wiskunde in model

Theo-Jan van de Pol heeft twee jaar lang gewerkt als Leraar in Onderzoek. In die periode werd één dag per week het lesgeven onderbroken door onderzoek, gefinancierd door NWO. Het onderzoek was gericht op wiskundige modellen die het proces van algengroei op koraal beschrijven en vond plaats bij de leerstoelgroep wiskundige en statistische methoden, onderdeel van Biometris aan de Wageningen Universiteit, onder begeleiding van Lia Hemerik. Tijdens het modelleren is steeds gekeken of en waar de uitkomsten van het onderzoek in het middelbaar onderwijs kunnen worden gebruikt. Te denken valt aan het domein ‘dynamische modellen’ binnen het vak wiskunde D, maar ook aan de wiskundige denkactiviteiten die in het nieuwe curriculum van het wiskundeonderwijs een grote plaats innemen. Dit artikel gaat met name in op de onderdelen van het onderzoek die voor het onderwijs relevant zijn. Daarbij wordt een aanzet gegeven voor diverse wiskundige denkactiviteiten in het kader van wiskundig modelleren.

Wiskundig modelleren is een moeilijke wiskundige vaardigheid. In het curriculum van het voortgezet onderwijs werd tot voor kort relatief weinig aandacht besteed aan deze vaardigheid. Dat is jammer, omdat modelleren bij uitstek de gelegenheid biedt om de opgedane kennis van analyse en algebra toe te passen op een breed scala van onderwerpen. Hiermee kun je de relevantie van de wiskunde voor andere wetenschappen en toepassingsgebieden illustreren.

In 2015 zijn de wiskundige denkactiviteiten deel gaan uitmaken van het curriculum van wiskunde op het voortgezet onderwijs (vo). Deze wiskundige denkactiviteiten worden onderverdeeld in verschillende kernaspecten, waarvan modelleren er één is [2,3]. Eén van de bedoelingen van deze denkactiviteiten is het stimuleren

van leerlingen om de opgedane wiskundekennis zelf te kunnen toepassen in nieuwe contexten.

Dit artikel laat zien dat het mogelijk is om het modelleren een plaats te geven in de wiskundeles. De toepassing wordt hierbij gebruikt als vertrekpunt van het wiskundig modelleren. In deel 40 van de Zebra-reeks [4] is dit onderwerp verwerkt in direct inzetbaar leerlingmateriaal.

Aanleiding

In het kader van een lio-project (leraar in onderzoek) is onderzoek gedaan naar wiskundige modellen die de groei van algen op koraal beschrijven [6]. Achtergrond van het onderzoek is de wereldwijde bedreiging van koraal. Door diverse omstandigheden worden koraalriffen overwoekerd

door algen. Deze overwoekering zorgt er onder andere voor dat de koralen hun kleur verliezen: verbleking [1]. Om dit proces te begrijpen en te sturen, zijn we geïnteresseerd in een model voor de beschrijving van algengroei.

In dit artikel worden diverse parameters gebruikt. In Tabel 1 staat een overzicht met voor elke parameter een standaardwaarde. Als wordt afgeweken van deze standaardwaarde, dan wordt dit expliciet vermeld.

Algen op koraal, groei

Leerlingen leren dat een model een vereenvoudigde weergave is van de werkelijkheid. Laten we dus eenvoudig beginnen. Voor algengroei heb je algen nodig. De groeisnelheid is in de meest eenvoudige vorm alleen afhankelijk van de omvang van de dichtheid aan algen in biomassa per oppervlakte-eenheid (A in g m^{-2}) en wordt bepaald door de relatieve groeisnelheid r . Differentiaalvergelijking (1) (het groeimodel van Malthus), kan dienen als eerste uitgangspunt om met leerlingen over dit probleem na te denken:

$$\frac{dA}{dt} = rA. \quad (1)$$

In (1) is r de enige parameter. Uit (1) volgt ook direct dat de eenheid van r per dag is (dag^{-1}). Als we vervolgens aannemen

Parameter	Betekenis	Standaardwaarde	Eenheid
r	relatieve groeisnelheid	1,5	dag ⁻¹
K	draagkracht van het systeem	20	g m ⁻²
c	consumptiesnelheid van algen	3,5	m ⁻² dag ⁻¹
g_m	per capita consumptiesnelheid (per herbivoor)	1	dag ⁻¹ H ⁻¹
h	halfverzadigings-constante: de concentratie algen waarbij de herbivoor de helft van zijn maximale consumptie haalt	1	g m ⁻²

Tabel 1 Gebruikte parameters in de diverse modellen.

dat $A(0) = 10 \text{ g m}^{-2}$, moeten leerlingen met hun vaardigheid in differentiëren en integreren de oplossingformule voor de ontwikkeling van de biomassa aan algen A door de tijd heen kunnen bepalen.

Al snel zullen leerlingen tegenwerpen dat zo'n groei-model niet realistisch is. Een exponentieel en ongeremd groeiende algenpopulatie past niet bij (hun beeld van) de werkelijkheid. Nu komt het erop aan dat leerlingen inzicht in groei kunnen vertalen in wiskundige formules. Deze stap kan voor de leerlingen lastig zijn. De rol van de docent zou hier moeten bestaan uit het aan bod laten komen van de diverse groei-modellen met hun karakteristieken. Groei is in deze context immers niet onbeperkt, maar afhankelijk van bijvoorbeeld ruimte, voedsel en licht. De biomassa aan algen is gebonden aan de maximale draagkracht K (g m⁻²) van het ecosysteem. Het model hierop aanpassen levert differentiaalvergelijking (2) op (het groei-model van Verhulst, ook wel logistische groei genoemd):

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K}\right). \quad (2)$$

Afhankelijk van het niveau van de groep is het mogelijk om de differentiaalvergelijking via breuksplitsen op te lossen, gegeven r en K volgens Tabel 1 en $A(0) = 10 \text{ g m}^{-2}$. Dat is een goede oefening in algebraïsche vaardigheden.

De volgende stap is om dit model met leerlingen te analyseren. Vanuit de context is het interessant om te kijken of er evenwichten zijn en of deze stabiel of instabiel zijn. De begrippen evenwicht en stabiliteit worden door leerlingen nogal moeilijk gevonden. Een voor leerlingen bruikbare beschrijving van een evenwicht is: als je in deze toestand begint, blijf je ook in deze toestand. Met andere woorden: de hoeveelheid algen zal dan constant blijven. Een bruikbare omschrijving van een (lokaal) stabiel evenwicht is: als je in deze evenwichtstoestand bent en de toestand

verandert een beetje, dan kom je altijd weer in hetzelfde evenwicht terug. Er is sprake van een (lokaal) instabiel evenwicht als je bij een willekeurige, kleine verandering vanuit een evenwichtstoestand, niet meer in hetzelfde evenwicht terugkomt.

Welk effect hebben verandering van r of K op de groei van de biomassa aan algen A of op (de stabiliteit van) de evenwichten? In plaatjes in Excel en met de applets JODE [7,8,9] of InterEuler [10,11] kunnen leerlingen experimenteren met het variëren van parameters en daar zelf conclusies uit trekken.

Algen op koraal, consumptie

Ook nu ontbreekt er nog veel aan het model. Algen groeien niet alleen, maar ze worden ook opgegeten. Consumptie van algen vindt plaats door vissen en zee-egels (de zogenaamde herbivoren). Opnieuw een eenvoudige start. Leerlingen begrijpen dat voor consumptie van algen, algen nodig zijn. Hoe meer algen, hoe meer er geconsumeerd kan worden. Consumptie is dus afhankelijk van de dichtheid aan algen A . Gaan we uit van evenredigheid met c , de consumptiesnelheid (dag⁻¹), dan krijgen we $\text{Consumptie} = c \cdot A$ en omdat consumptie negatief werkt op de groei ontstaat differentiaalvergelijking (3a). Na enige herleiding ontstaat daaruit differentiaalvergelijking (3b).

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K}\right) - c \cdot A, \quad (3a)$$

$$\frac{dA}{dt} = (r - c)A - \frac{r}{K}A^2. \quad (3b)$$

Ook dit model onderzoeken we op evenwichten. Leerlingen vinden de evenwichten door het oplossen van $\frac{dA}{dt} = 0$, namelijk de twee oplossingen $A = 0$ en $A = \left(1 - \frac{c}{r}\right)K$. Aan deze laatste oplossing is te zien dat er (natuurlijk) alleen een positieve evenwichtswaarde van de biomassa aan algen A optreedt voor $c < r$: een wiskundige

onderbouwing van het vermoeden dat de consumptiesnelheid kleiner moet zijn dan de relatieve groeisnelheid wil een populatie kunnen blijven bestaan.

De Monod-functie

De eerder aangenomen evenredigheid tussen A en c blijkt in de praktijk anders te liggen. Onderzoek naar wiskundige modellen die consumptie beschrijven, is onder anderen gedaan door Holling [5]. Onderzoek onder dieren heeft inderdaad uitgeezen dat een toename van voedsel ertoe leidt dat er meer wordt gegeten. Daarbij wordt echter ook waargenomen dat de consumptiesnelheid per herbivoor asymptotisch nadert tot een maximum (g_m) bij toenemende voedseldichtheid (A). Dit kan worden beschreven met de Monod-functie (ook wel Holling type II functionele respons genoemd):

$$\text{Consumptiesnelheid per herbivoor} = g_m \frac{A}{A+h}.$$

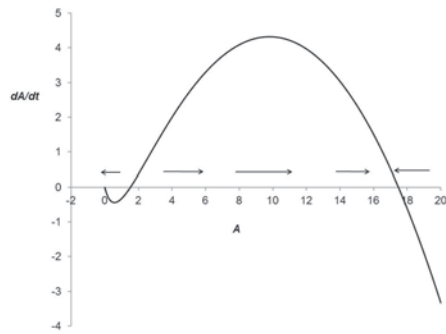
Dit is de consumptie per dier per dag. Hierin is h de biomassa aan algen waarbij de herbivoor de helft van zijn maximale consumptiesnelheid bereikt. Voor de totale consumptie moet nog worden vermenigvuldigd met de dichtheid aan herbivoren (H in aantal per m²). Nemen we vervolgens $c = g_m H$ (c in aantal per m² per dag) dan wordt differentiaalvergelijking (4) ons volgende groei-model.

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K}\right) - c \cdot \left(\frac{A}{A+h}\right). \quad (4)$$

Ook hier levert het oplossen van de vergelijking $\frac{dA}{dt} = 0$ weer de evenwichtswaarden van A uitgedrukt in de parameters van het model. Natuurlijk is er weer de oplossing $A = 0$. Daarnaast ontstaat de evenwichtsvergelijking

$$r - \frac{r}{K}A - \frac{c}{A+h} = 0.$$

Deze is te herschrijven tot de kwadratische



Figuur 1 dA/dt (vergelijking (4)) is verticaal uitgezet tegen A op de horizontale as. Er zijn drie nulpunten, waarbij de algenpopulatie in evenwicht is. De evenwichten bij $A=0$ en $A \approx 17,5$ zijn stabiel, die bij $A \approx 1,52$ instabiel. Vanuit dit laatste punt gezien zorgt een verhoging van A voor $dA/dt > 0$, dus A neemt verder toe, terwijl een verlaging van A zorgt voor $dA/dt < 0$. A neemt dan verder af. De pijllengte is een maat voor de snelheid waarmee A verandert in de richting van één van de stabiele evenwichten.

vergelijking

$$-\frac{r}{K}A^2 + \left(r - \frac{rh}{K}\right)A + rh - c = 0,$$

met als discriminant

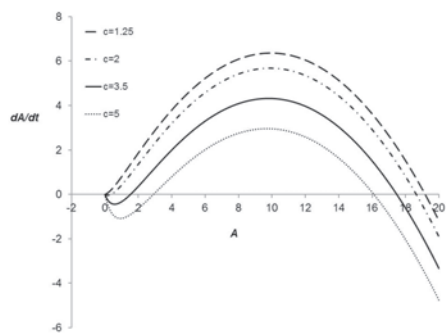
$$D = \left(r - \frac{rh}{K}\right)^2 + 4\frac{r}{K}(rh - c)$$

$$\Rightarrow D = \left(r + \frac{rh}{K}\right)^2 - 4\frac{rc}{K}$$

$$= r\left(\left(1 + \frac{h}{K}\right)^2 r - 4\frac{c}{K}\right).$$

Hieruit is op te maken dat het aantal oplossingen (en dus het aantal evenwichten) opnieuw wordt bepaald door de ratio $c:r$. Als geldt dat

$$\frac{c}{r} < \frac{K}{4} \left(1 + \frac{h}{K}\right)^2,$$



Figuur 2 Opnieuw is dA/dt (vergelijking (4)) uitgezet tegen A . De relatieve groeisnelheid is constant gehouden ($r=1,5$), terwijl de consumptiesnelheid varieert. Een hoge consumptiefactor zorgt voor een lagere evenwichtswaarde aan de rechterzijde van de figuur. Ook is er een hogere startwaarde van A nodig om in deze hoge evenwichtstoestand te komen. Bij de laagste consumptiesnelheid ($c=1,25$) lijken er nog slechts twee evenwichten over te blijven. Een instabiele voor $A=0$, en een stabiele evenwichtssituatie voor $A \approx 19,2$. Vanuit het oogpunt van overwoekering door algen is dit een ongewenste situatie.

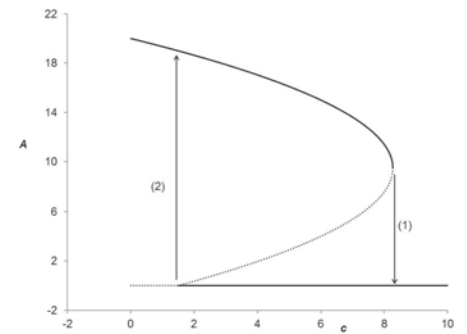
dan zijn er twee oplossingen, met een gelijkheidsteken is er één oplossing en anders zijn er geen oplossingen. Wanneer we model (4) als uitgangspunt nemen voor een verdere analyse, is het handig om met leerlingen eerst uit te gaan van een model met één variabele. Een afbeelding van differentiaalvergelijking (4), een zogenaamd groeiplaatje [4], is gemaakt in Excel, en gegeven in Figuur 1.

De evenwichtswaarden van A kunnen nu worden berekend. Met behulp van deze figuur kunnen leerlingen bovendien uitspraken doen over de stabiliteit van deze evenwichten. Als de waarde van het rechterlid van differentiaalvergelijking (4) positief is, groeit de populatie in aantal (pijlje naar rechts in Figuur 1) en bij negatieve waarden daalt de populatiegrootte (pijlje naar links in Figuur 1). Evenwichtspunten met pijltjes ernaartoe gericht zijn stabiel en die met de pijltjes ervanaf zijn instabiel. Dit zijn de enige biologisch relevante mogelijkheden.

Daarnaast kunnen leerlingen het model in bijvoorbeeld Excel invoeren en experimenteren met het variëren van parameters en daar conclusies uit trekken. Constant houden van de reproductiefactor en variatie van de consumptiefactor ($c = 1,25$, respectievelijk 2, 3,5 en 5) geeft een afbeelding zoals in Figuur 2.

Leerlingen krijgen zo een beeld van het effect van een hoge consumptiesnelheid op het aantal en de ligging van de evenwichten. Gezien de context is het interessant om te zien wat er gebeurt bij lage consumptie. Het instabiele evenwicht komt dicht bij $A = 0$ te liggen, zodat het systeem in de praktijk vrijwel altijd in de hoge evenwichtssituatie zal komen.

Leerlingen kunnen met de eerder gegeven discriminant onderzoeken, of er werkelijk twee evenwichten ontstaan of dat er altijd, dicht bij $A = 0$, een derde evenwicht blijft bestaan. Hiervoor kunnen ze in de evenwichtsvergelijking behorend bij model (4) c vrijmaken en vervolgens de evenwichten van A uitzetten tegen de waarde van de parameter c . Dit geeft Figuur 3, een zogenaamd bifurcatiediagram. De omslag van een hoog stabiel evenwicht naar een laag stabiel evenwicht (pad (1) in Figuur 3) vindt plaats bij een hogere consumptie dan de omslag van een laag stabiel evenwicht naar een hoog (pad (2) in Figuur 3). Dit verschijnsel heet *hysteresis*.



Figuur 3 Uit de evenwichtsvergelijking $r - \frac{rA}{K} - \frac{c}{A+h} = 0$ is c vrijgemaakt. Vervolgens is A uitgezet tegen c . De overige parameters zijn als in Tabel 1. Voor elke waarde van c is te zien wat het aantal en de mogelijke ligging is van de evenwichten van A . Ook is te zien dat bij een hoge consumptie (te berekenen op $c > 8,27$) alleen het evenwicht $A=0$ (horizontale lijn) overblijft. Het gestreepte deel van de curves stellen de instabiele evenwichten voor en de doorgetrokken lijnen de stabiele evenwichten. Bij verhoging van c vanuit het positieve evenwicht wordt pad (1) gevolgd. Pad (2) wordt gevolgd bij verlaging van c vanuit het lage stabiele evenwicht.

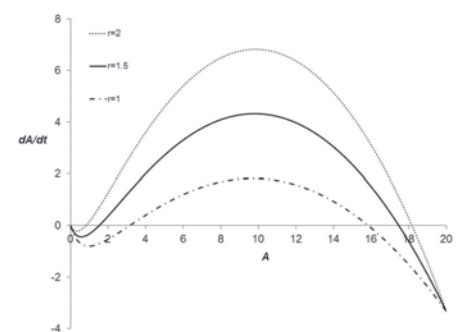
Een constante consumptiefactor en variatie van de reproductiefactor geeft een afbeelding zoals in Figuur 4.

De Hill-functie

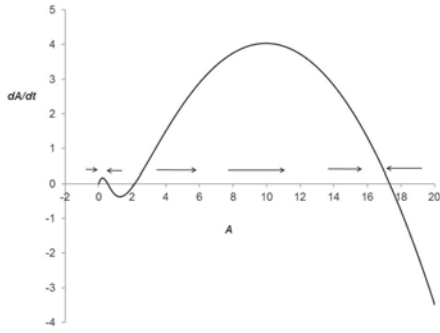
Wanneer herbivoren bij een lage algen-dichtheid (A) overgaan op ander voedsel of niet al het voedsel kan worden bereikt, kan de consumptie worden beschreven met de Hill-functie:

$$\text{Consumptiesnelheid per herbivoor} = g_m \frac{A^p}{A^p + h^p}.$$

De curve krijgt bij toenemende p een meer sigmoïdaal verloop tot het extreme geval bij grote p van een stapfunctie. In het geval van vissen en zee-egels die algen eten is er sprake van een Hill-functie met $p = 2$. Dit wordt in de biologie de sigmoïdale functionele respons of Holling type III functionele respons genoemd.



Figuur 4 dA/dt (vergelijking (4)) is uitgezet tegen A . De consumptiesnelheid is constant gehouden ($c=3,5$), terwijl de relatieve groeisnelheid varieert. Te zien is dat een hogere relatieve groeisnelheid zorgt voor een snellere groei, waardoor de evenwichtssituatie sneller wordt bereikt. Er blijven drie evenwichten bestaan, waarvan er twee stabiel zijn en één instabiel.



Figuur 5 De grafiek van dA/dt (vergelijking (5)) uitgezet tegen A . Leerlingen zien hierin de vier nulpunten en kunnen van hieruit verder onderzoeken wat de stabiliteit van deze evenwichten is.

Dit deel van het model zal door leerlingen waarschijnlijk niet zelf worden gevonden. Er is volgens ons echter niets op tegen om na een verkenning van de Monod- en de Hill-functie (onderzoek het verloop, wat gebeurt er bij erg grote p , bijvoorbeeld $p > 10$) dit deel van het model gewoon te geven.

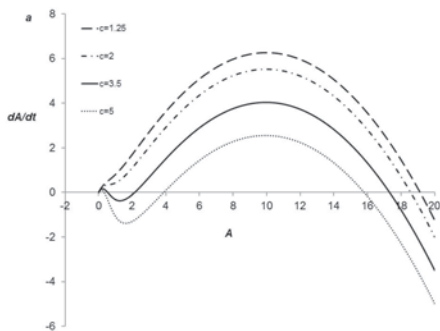
Begrazing wordt verder nog bepaald door het aantal herbivoren per m^2 (H). Kiezen we in de totale begrazing $c = g_m H$, dan wordt begrazing beschreven door:

$$\text{begrazing} = c \cdot \left(\frac{A^2}{A^2 + h^2} \right).$$

Wanneer ten slotte groei en begrazing in één model worden samengenomen, krijgen we het volgende (nog steeds sterk vereenvoudigde) model:

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K} \right) - c \cdot \left(\frac{A^2}{A^2 + h^2} \right). \quad (5)$$

Wanneer differentiaalvergelijking (5) met de standaardparameters wordt uitgezet tegen A krijgen we een groeiplaatje, zie Figuur 5. Hierin zien leerlingen dat de grafiek van $\frac{dA}{dt}$ vier nulpunten heeft, de evenwich-



Figuur 6 Opnieuw is dA/dt (vergelijking (5)) uitgezet tegen A . De relatieve groeisnelheid is constant gehouden ($r=1,5$), terwijl de consumptiesnelheid varieert. (a) Een hoge consumptiesnelheid zorgt voor een lagere evenwichtswaarde aan de rechterzijde van de figuur. Ook is er een hogere startwaarde van A nodig om in deze hoge evenwichtstoestand te komen. (b) is een uitvergroting van (a).

ten. Deze nulpunten kunnen de leerlingen ook zelf berekenen met behulp van de evenwichtsvergelijking

$$r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K} \right) - c \cdot \left(\frac{A^2}{A^2 + h^2} \right) = 0.$$

Dit levert de triviale oplossing $A = 0$ en een derdegraadsvergelijking

$$-\frac{r}{K}A^3 + rA^2 - \left(\frac{rh^2}{K} + c \right)A + rh^2 = 0.$$

Invullen van de standaardparameters geeft:

$$-0,075A^3 + 1,5A^2 - 3,575A + 1,5 = 0,$$

met als oplossingen $A \approx 0,5376$, $A \approx 2,1488$ en $A \approx 17,3136$. We zijn opnieuw geïnteresseerd in de stabiliteit van deze evenwichten. Aan de hand van de grafiek is te beredeneren dat het triviale evenwicht ($A = 0$) instabiel is. De andere evenwichten zijn in oplopende grootte respectievelijk stabiel, instabiel en stabiel.

Ook nu is variatie van parameters mogelijk om leerlingen inzicht te geven in de betekenis van deze parameters voor het ecosysteem. Variatie van de consumptiesnelheid c levert Figuur 6a en 6b op. Ook variatie van de relatieve groeisnelheid r laat zien dat de populatie zowel lage als hoge stabiele evenwichten heeft.

Alternatieve evenwichten en bifurcatie

Wanneer we in de vergelijking

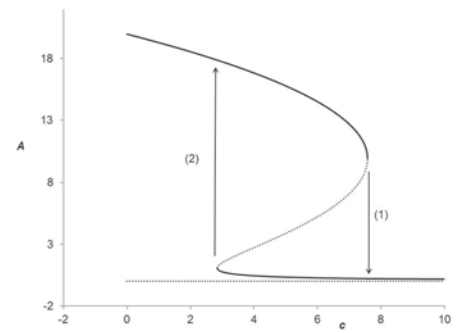
$$r \cdot \left(1 - \frac{A}{K} \right) - c \cdot \left(\frac{A}{A^2 + h^2} \right) = 0$$

de variabele c vrijmaken, krijgen we

$$c = \frac{r(K-A)(A^2 + h^2)}{AK}.$$

Met de ingevulde standaardwaarden ontstaat de vergelijking

$$c = -0,075A^2 + 1,5A - 0,075 + 1,5A^{-1}.$$



Figuur 7 Afbeelding van de vergelijking $c = -0,075A^2 + 1,5A - 0,075 + 1,5A^{-1}$, met de biomassa aan Algen A in $g\ m^{-2}$ uitgezet tegen de consumptiesnelheid c in dag^{-1} . Zie Figuur 3 voor de betekenis van de stijl van de lijn en de paden (1) en (2). In de figuur is ook het instabiele evenwicht $A=0$ getekend (de horizontale lijn).

De grafiek hiervan is getekend in Figuur 7, waarbij opnieuw A is uitgezet tegen c .

Voor de hele curve in Figuur 7 geldt $\frac{dA}{dt} = 0$. De grafiek geeft dus bij een gegeven consumptiesnelheid c de mogelijke evenwichtswaarden van A . Hiervan zijn, zoals we eerder zagen, sommige evenwichten stabiel en andere instabiel. Deze figuur laat zien dat er een plotselinge overgang van het ene evenwicht naar een ander kan plaatsvinden. Wanneer de consumptie toeneemt, van $c=2$ tot $c=7,5$ zal de evenwichtswaarde van A geleidelijk afnemen. Voor $c > 7,6$ is het systeem niet meer in staat om zich hieraan voldoende aan te passen. De evenwichtswaarde van A stort dan in (zie pijl 1 in Figuur 7). Het systeem kantelt dan van een situatie met een hoge stabiele evenwichtswaarde van A naar een situatie met een lage stabiele evenwichtswaarde van A . Voor de koralen betekent dat een overgang van een situatie met veel algen naar een situatie met weinig algen.

Wanneer vervolgens de consumptie wordt teruggebracht tot onder de 7,6 zorgt dat echter niet direct voor een herstel van de oude situatie. Een verlaging tot $c=2,85$ zorgt maar voor een heel geringe toename van de evenwichtswaarde van A . Bij een verdere verlaging van c , tot onder $c \approx 2,84$ zien we opnieuw een plotselinge omslag optreden (zie pijl 2 in Figuur 7). Consumptie van algen is daar op zo'n (laag) niveau gekomen dat de evenwichtswaarde van A plotseling veel hoger komt te liggen. Ook hier is dus sprake van een kantelpunt naar een ander evenwicht.

We zien hier dat de overgang van een hoog naar een laag stabiel evenwicht (het kantelpunt) op een andere plaats ligt dan

de overgang van een laag naar een hoog stabiel evenwicht. Dit kan verklaren waarom het herstel van een verstoord systeem vaak een forse ingreep vraagt.

Ervaringen

Inmiddels is het rekenen aan en bestuderen van kantelpunten enkele keren uitgeprobeerd in de wiskundelessen. De ervaring is enerzijds heel positief. Leerlingen in vwo 6 (wiskunde B) zijn positief verrast dat de wiskundige kennis die zij in enkele jaren hebben opgedaan, toepasbaar en bruikbaar is binnen hele diverse contexten. Anderzijds blijkt het voor leerlingen heel lastig om zonder sturing het beschikbare wiskundige gereedschap in te zetten binnen nieuwe contexten. Met name het vertalen van groeikarakteristieken naar wiskundige formules blijkt een flinke hobbel te zijn, maar ook het interpreteren van groeicurves in relatie tot de stabiliteit van evenwichten wordt niet eenvoudig gevon-

den. Hier zit ook een grote uitdaging voor de wiskundige denkactiviteiten.

Conclusie

In dit artikel hebben we geïllustreerd dat het mogelijk is om de leerlingen opgedane wiskundige vaardigheden te laten toepassen. Het vrijmaken van c , invullen van parameters en herleiden, zijn stappen die vallen onder algebraïsche vaardigheden, die door leerlingen uit de bovenbouw van het vwo zelfstandig moeten kunnen worden uitgevoerd. Hetzelfde geldt voor het zoeken van de waarden van c en A voor het kantelpunt, met behulp van de afgeleide van A naar c .

Ondertussen hebben we ze bij het modelleren aan de hand genomen om uit te leggen waarom er bepaalde stukjes van de vergelijkingen zijn toegevoegd. Tevens hebben we de leerlingen, als belangrijkste toegevoegde waarde, laten ontdekken hoe ze stabiele en instabiele evenwichten kun-

nen interpreteren. We doen dit door in het groeiplaatje te laten zien dat als je bij een stabiel evenwicht begint je daar blijft, terwijl beginnen bij een instabiel evenwicht ervoor zorgt dat je wegloopt naar een ander 'evenwicht'.

We hopen met dit voorbeeld een bijdrage te leveren aan het besef bij leerlingen van de brede toepasbaarheid van de wiskunde. Daarnaast leveren deze toepassingen uit de praktijk de docenten in het voortgezet onderwijs handvatten om aan de slag te gaan met wiskundige denkactiviteiten. We doen bij deze dan ook een oproep aan collega-wiskundigen aan andere universiteiten om meer van deze bruikbare toepassingen te leveren voor het wiskundeonderwijs op de scholen voor voortgezet onderwijs. In een periode waarin het tekort aan bètastudenten groot is, kunnen wellicht ook dit soort illustraties ingezet worden om vwo-leerlingen te interesseren voor een exacte studie. ☺

Referenties

- 1 D.R. Bellwood, T.P. Hughes, C. Folke en M. Nystrom, Confronting the coral reef crisis, *Nature* 429 (2004), 827–833.
- 2 cTWO, *Rijk aan betekenis, Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*, cTWO, Utrecht 2007.
- 3 P. Drijvers, Denken over wiskunde, onderwijs en ICT, Oratie, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 2015.
- 4 L. Hemerik, E. van Nes en T.J. van de Pol, *Kantelpunten en alternatieve evenwichten*, Zebra 40, Epsilon Uitgaven, 2014.
- 5 C.S. Holling, Some characteristics of simple types of predation and parasitism, *Canadian Entomologist* 91 (1959), 385–398.
- 6 M. Scheffer, E.H. van Nes, M. Holmgren en T.P. Hughes, Pulse-driven loss of top-down control: The critical-rate hypothesis, *Ecosystems* 11 (2008), 226–237.
- 7 <http://jode.sourceforge.net/download.php>.
- 8 <http://sourceforge.net/projects/jode/files/>.
- 9 <http://www.math.rutgers.edu/~sontag/JODE/manual.html>.
- 10 <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00122/>.
- 11 <http://www.fi.uu.nl/wisweb>.