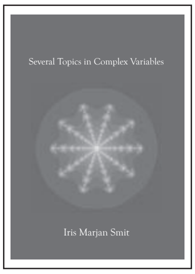
In de verdediging

| In defence



Several Topics in Complex Variables
Iris Smit

Op 23 oktober 2015 promoveerde Iris Smit aan de Universiteit van Amsterdam op het proefschrift *Several Topics in Complex Variables*, dat ze schreef onder begeleiding van prof. dr. Jan Wiegerinck en co-promotor dr. Han Peters. De voorkant van haar proefschrift toont in wit een stervormige fractal, meer specifiek een Julia-verzameling. Julia-verzamelingen worden vaak in één adem genoemd met de welbekende Mandelbrot-verzameling en met chaos in dynamische systemen. Maar een van de 'several topics' die Smit bestudeerde was juist niet die Julia-verzameling maar het complement ervan, en niet chaotisch, maar juist min of meer netjes gedrag.

Complexe analyse

Smit werkte allereerst met haar promotor Jan Wiegerinck aan zogenaamde plurifijne pluripotentiaaltheorie. Later is ze een zijweg ingeslagen toen Han Peters haar voorstelde ook een keer aan een onderwerp in de complexe dynamica te gaan werken. Dat had ze van tevoren niet verwacht, maar het beviel haar uitstekend. Hiermee is de titel van Smits proefschrift verklaard: haar proefschrift bestaat uit drie artikelen in het vakgebied Several Complex Variables, het deel van de complexe analyse dat zich bezighoudt met functies van meerdere complexe veranderlijken. Wanneer je zo'n functie op een domein $U \subseteq \mathbb{C}^m$ bekijkt, zou je U natuurlijk ook als deelverzameling van $\mathbb{R}^{2m}$ kunnen beschouwen. Maar de inclusie in $\mathbb{C}$ geeft U een extra structuur, die gebruikt kan worden. De complexe analyse houdt zich bezig met eigenschappen van functies die goed verenigbaar zijn met deze complexe structuur.

Sommige eigenschappen van reële functies kunnen worden aangepast om een complexe structuur te respecteren. Een belangrijk voorbeeld hiervan is complexe differentieerbaarheid. Dit concept blijkt vele malen sterker te zijn dan zijn reële equivalent. In het bijzonder geldt dat een functie $f : U \to \mathbb{C}$ met $U \subseteq \mathbb{C}^m$ die complex differentieerbaar (of *holomorf*) is, een afgeleide heeft die ook complex differentieerbaar is. Een eigenschap die zeker niet waar is voor reële differentieerbaarheid. En daar waar reële C^∞-functies een compacte drager kunnen hebben, zegt de Stelling van Liouville dat een globale holomorfe functie op $\mathbb{C}^m$ niet eens begrensd kan zijn, behalve als het om een constante functie gaat. De consequentie van dit alles is dat holomorfe functies heel schaars zijn in vergelijking met hun reëel differentieerbare tegenhangers.

De holomorfe bijectieve functies spelen een belangrijke rol. Een holomorfe bijectie $f : U \to V$ tussen gebieden in $\mathbb{C}^m$ koppelt de punten in U en V paarsgewijs aan elkaar en behoudt daarbij de complexe structuur. Als er tussen U en V een holomorfe bijectie bestaat, zijn deze gebieden dus in zekere zin 'hetzelfde'. U en V heten dan *biholomorf*.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl

Een ander veelvoorkomend thema in de complexe analyse is het vergelijken van een eendimensionale situatie met een geval waarbij een functie f van meerdere complexe veranderlijken afhangt. Over complexe analyse in één variabele is veel bekend, maar de introductie van een tweede variabele creëert allerlei nieuwe mogelijkheden.

Een jacht naar parallellen

In het algemeen kun je stellen dat de ruimtes $\mathbb{C}^1$ en $\mathbb{R}^{2m}$ vaak inspiratiebronnen zijn bij de studie van $\mathbb{C}^m$. Welke concepten hebben een analogon in $\mathbb{C}^m$? En waar houdt de analogie op te bestaan? De drie artikelen waar haar proefschrift op berust kunnen ook allemaal worden gezien als onderdeel van een jacht naar parallellen, aldus Smit. Ze hebben alle drie een centrale stelling als resultaat.

Het eerste artikel gaat over *plurifijne pluripotentiaaltheorie*, waarbij Smit met professor El Kadiri van de Université Mohammed V-Agdal het begrip maximaliteit uit de pluripotentiaaltheorie generaliseerde naar de plurifijne situatie. De woorden 'pluri' en 'plurifijn' zijn op zichzelf al een indicatie dat dit onderwerp deel uitmaakt van een systeem van analogieën en generalisaties.

Voor het tweede artikel keken Smit en Peters naar aantrekkende bassins van rijen automorfismen. Laat $f_0, f_1, f_2, \ldots$ een rij holomorfe bijecties van $\mathbb{C}^m$ naar $\mathbb{C}^m$ zijn, met de oorsprong als uniform aantrekkend gezamenlijk vast punt:

$$C\| z \| \leq \| f_n(z) \| \leq D\| z \| \quad \text{voor alle } z \in \mathbb{C}^m \text{ met } \| z \| \leq 1,$$
$$\text{en voor alle } n \in \mathbb{N}, \text{ waarbij } 0 < C < D < 1.$$

Volgens het zogenaamde sterkere Bedford Vermoeden moet de verzameling $\Omega_{(f_n)} = \{z \in \mathbb{C}^m : f_n \circ \cdots \circ f_0(z) \to 0 \text{ as } n \to \infty\}$ van punten die onder de compositie van de afbeeldingen f_n naar de oorsprong convergeren, biholomorf zijn aan $\mathbb{C}^m$.

Smit en Peters bewezen het Bedford-vermoeden in $\mathbb{C}^2$ onder de extra aanname dat $D^{11/5} < C$. Hiermee verbeterden ze het vorige record, dat op $D^{29/14} < C$ stond.

Iteraties van een polynoom en de Fatou-verzameling

Het derde artikel is eveneens gemeenschappelijk werk met Han Peters, en heeft te maken met het plaatje op de voorkant van het proefschrift. Ze bestudeerden opnieuw samenstellingen van functies, maar deze keer waren het iteraties van een *vast polynoom*; denk bijvoorbeeld aan $p(z) = z^2 + 2$. In $\mathbb{C}$ scheiden deze iteraties het complexe vlak in twee soorten punten:

1. de verzameling van punten met een begrensde voorwaartse baan: $K = \{z \in \mathbb{C} : \{p^n(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ is begrensd}\}$;
2. $\mathbb{C} \backslash K$, de overige punten in $\mathbb{C}$.

Het is deze verzameling K die de bekende, mooie fractalplaatjes oplevert, zie de afbeelding van het bekende 'Konijn van Douady'. Indirect definieert K ook de Fatou-verzameling van $p(z)$. Die wordt gegeven door $\mathcal{F} = K^\circ \cup (\mathbb{C} \backslash K)$.

De Fatou-verzameling $\mathcal{F}$ kan ook op een andere manier gedefinieerd worden, met een definitie die ook werkt in $\mathbb{C}^m$: de Fatou-verzameling van een polynoom p op $\mathbb{C}^m$ is de grootste open deelverzameling van $\mathbb{C}^m$ waarop $\{p^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ normaal is. Dat wil zeggen: elke deelrij van $\{p^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een deel-deelrij die uniform convergeert op de compacte deelverzamelingen van $\mathcal{F}$. Punten die in één samenhangscomponent van de Fatou-verzameling liggen, blijven min of meer bij elkaar in de buurt onder iteraties van p. De Julia-verzameling is per definitie gelijk aan het complement van de Fatou-verzameling. Hier kan een kleine verstoring in de startwaarde na herhaald toepassen van p juist tot een volledig ander gedrag van de rij leiden.

Peters en Smit hebben gekeken naar het gedrag van de samenhangscomponenten van $\mathcal{F}$: de Fatou-componenten. Voor een polynoom p op $\mathbb{C}$ zegt de Stelling van Sullivan dat elke Fatou-component op den duur periodiek wordt. Dat wil zeggen, er bestaan natuurlijke getallen n en $k \geq 1$ waarvoor $p^{n+k}(U) = p^n(U)$. Voor een polynoom p van twee variabelen is dit niet langer waar; nu kunnen Fatou-componenten eeuwig ronddwalen zonder ooit op dezelfde plaats terug te komen. Smit en Peters keken naar polynomen van de vorm $F(z, w) = (f(z, w), \lambda w)$ met $|\lambda| < 1$ en onderzoeken of deze situatie zwervende Fatou-componenten toelaat. Ze identificeerden een substantiële klasse van functies waarbij Sullivans stelling van toepassing is: alle Fatou-componenten worden op den duur periodiek.

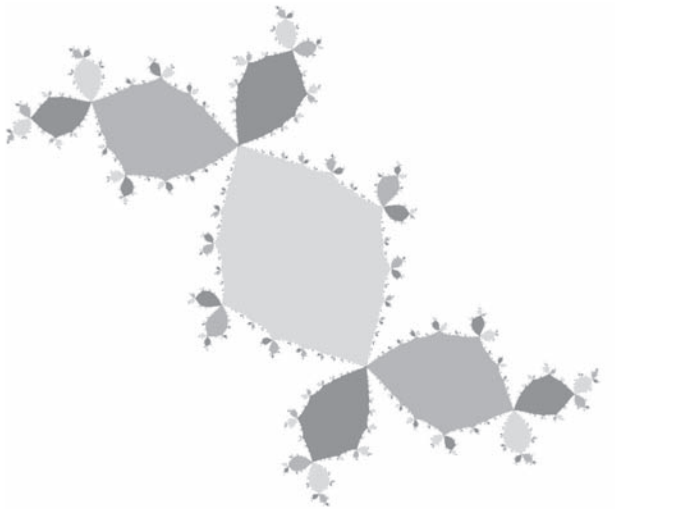
Zelf vindt Smit de centrale stelling uit haar derde artikel het mooist, waarschijnlijk vooral omdat ze het bijbehorende onderzoek erg leuk en afwisselend vond:

Stelling. *Laat $F : (z, w) \mapsto (f(z, w), g(w))$ een polynomiaal scheef product zijn, en veronderstel dat $0 = g(0)$ een aantrekkend vast punt met bijbehorend aantrekkend bassin B_g is. Neem bovendien aan dat het polynoom $p(z) = f(z, 0)$ subhyperbolisch is. Dan heeft F geen dwalende Fatou-componenten bevat in B_g.*

Bijzondere momenten en de toekomst

Smit herinnert zich nog goed de eerste keer dat ze het gevoel had echt zelf iets nieuws bewezen te hebben, zelfs al was dat maar een heel klein stukje. Er waren ook stressvolle momenten. Eén sprong eruit: midden in de nacht realiseerde Smit zich ineens dat er een flinke fout in een bewijs zat, terwijl ze wist dat het proefschrift vrij snel afgerond moest worden. Maar dit kwam gelukkig weer goed.

In het algemeen is Smit heel positief over het leven als aio en ze heeft er dan ook voor gekozen om verder te gaan in het wiskundig onderzoek. Ze is op dit moment postdoc bij NTNU in Trondheim, Noorwegen. En daarna? De tijd zal het leren.



Douady's Rabbit: $p(z)=z^2+c$ met c zodat $p^3(0)=0$ en $\mathrm{Im}(c)>0$. De grijze delen zijn de samenhangende componenten van het inwendige K° van K. De randen ervan vormen precies de Julia-verzameling.