Ieke Moerdijk
Afdeling Wiskunde
Radboud Universiteit Nijmegen
i.moerdijk@math.ru.nl

In Memoriam Daniël Marinus Kan (1927–2013)

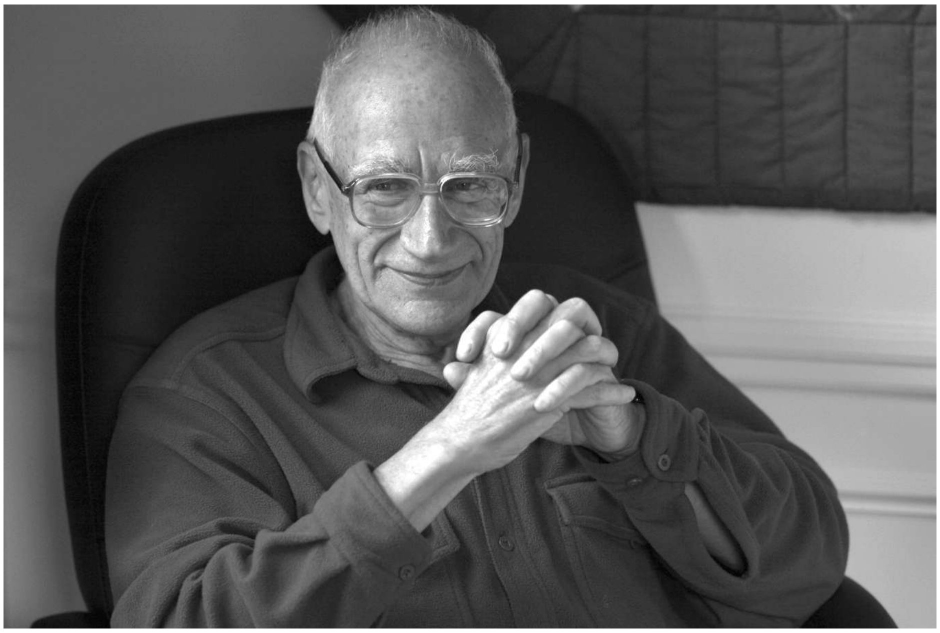
Simpliciale verzamelingen en geadjungeerde functoren

Daniël Marinus Kan werd geboren in Amsterdam op 4 augustus 1927. Na een lang en vruchtbaar leven overleed hij in 2013 vredig in zijn eigen huis in Waban (Newton, MA, Verenigde Staten), onder de rook van Boston, op zijn zesentachtigste verjaardag. In 1982 werd Daan Kan benoemd tot correspondent van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Dit levensbericht, geschreven door Ieke Moerdijk, is oorspronkelijk verschenen in de KNAW-publicatie ***Levensberichten en herdenkingen 2014*****.**

Daan Kan groeide op als enig kind in een liberaal joods advocatengezin in Amsterdam-Zuid. Na de Montessori-kleuterschool en de toentertijd bekende lagere 'Openluchtschool voor het Gezonde Kind' in de Cliostraat te hebben doorlopen, ging hij in 1939 naar het Barlaeus Gymnasium. Daar kon hij in eerste instantie maar twee jaren blijven, omdat joodse kinderen na het schooljaar 1940–1941 van het Barlaeus af moesten. Hij heeft toen een jaar op het Joods Lyceum doorgebracht, waarna een akelige tijd voor Kan en zijn familie aanbrak.

In de zomer van 1943 werd hij samen met zijn ouders opgepakt en naar Westerbork gebracht. Daar bleven zij een half jaar, om vervolgens naar Bergen-Belsen te worden weggevoerd. Daan Kan heeft vijftien maanden in dat kamp doorgebracht. Zijn beide ouders zijn daar door uitputting en ondervoeding om het leven gekomen. Daan zelf heeft het ternauwernood overleefd en is na de ontzetting van het kamp nog drie maanden in Duitsland gebleven om enigszins te herstellen. In de zomer van 1945 keerde hij terug naar Amsterdam. Daar werd hij samen met drie andere joodse jongens in eerste instantie slechts voorwaardelijk toegelaten tot de zesde klas van het Barlaeus. Hierover sprak Kan tot op hoge leeftijd als iets wat hij als uitermate beledigend heeft ervaren, te meer daar deze vier jongens als besten eindexamen deden.

Intussen beraadde Kan zich op de studiekeuze. Hij was geïnteresseerd in wiskunde, maar wilde liever (in zijn eigen woorden) geen leraar worden of bij een verzekeringsmaatschappij gaan werken. Het was L.E.J. Brouwer die hem op andere beroepsmogelijkheden wees, zodat hij in 1946 met de studie wiskunde en natuurkunde met scheikunde aan (wat nu heet) de Universiteit van Amsterdam begon. In 1948 legde Kan met succes het kandidaatsexamen af, en eind 1950 het doctoraal.



Een tweetal zaken uit zijn studietijd zijn wellicht vermeldenswaard, daar deze van grote invloed zijn geweest op Kans latere ontwikkeling. Ten eerste sprak Kan altijd lovend over de colleges integratie en differentiatie van professor De Groot. In het voorjaar van 1949 gaf dezelfde De Groot een lezing over een zojuist verschenen boek over topologie van de hand van de wiskundige Lefschetz uit Princeton, en organiseerde vervolgens bij hem thuis een werkgroep met studenten om dit boek door te werken. Kan woonde genoemde lezing bij en sloot zich aan bij de werkgroep, net als bijvoorbeeld het in 2011 overleden Akademielid T.A. Springer. Ten tweede kreeg Kan na zijn kandidaatsexamen het aanbod om assistent bij Brouwer te worden, een assistentschap dat hij mede vanwege de grote geboden vrijheid als zeer stimulerend heeft ervaren. Zo hebben Brouwer en De Groot de verdere keuzes van Daan Kan tot in hoge mate bepaald.

Israël

In februari 1951 is Kan met aanbevelingsbrieven van Brouwer en De Groot op zak naar Israël vertrokken, alwaar hij na enkele weken een aanstelling kreeg aan het Weizmann Instituut. Er werd toen met seismische methoden naar olie in de woestijn gezocht, en Kan moest de wiskundige berekeningen daarvoor doen. (De zoektocht naar olie bleef overigens zonder succes.) Kan beschreef het werk als niet erg intellectueel uitdagend en enigszins eentonig. Na een jaar moest hij in militaire dienst, maar hij mocht zijn dienstplicht aan het Weizmann Instituut vervullen en kon zo nog tweeënhalf jaar daar blijven. Zijn werk bood hem veel vrije tijd, die hij gebruikte om de topologie met succes weer op te pakken.

In het voorjaar van 1954 kwam Samuel Eilenberg vanuit Columbia University voor een bezoek van twee maanden naar de Hebrew University in Jeruzalem. (Eilenberg was toen al een van de leidende figuren op het gebied van de algebraïsche topologie, door zijn werk met Saunders Mac Lane en het kort daarvoor verschenen zeer invloedrijke boek *Foundations of Algebraic Topology* dat hij samen met Norman Steenrod had geschreven.) Eilenberg sprak met Kan, en moedigde hem aan zijn resultaten op te schrijven. Er werd ad hoc een status van graduate student aan de Hebrew University voor Kan geregeld, alwaar hij in de zomer van 1954 een proefschrift indiende (de formele PhD-graad werd hem in 1955 toegekend).

Intussen was Kan in 1953 in het huwelijk getreden met Nora Poliakof, dochter van een Amsterdamse huisarts en net als Kan overlevende van Bergen-Belsen. Ook Nora had beide ouders in de oorlog verloren, en was al direct na de oorlog naar Israël verhuisd. De twee kenden elkaar uit hun kindertijd en hadden altijd wat contact gehouden. Zo had Kan Nora in 1949 in Israël opgezocht. Het echtpaar kreeg vier kinderen, Ittay (1956), Michael (1957), Tamara (1962) en Jonathan (1965). Jonathan overleed in 1973 aan leukemie, een zware klap voor het gezin Kan. Kans vrouw Nora overleed in augustus 2007.

Verenigde Staten

Na zijn promotie kreeg Kan een postdocaanstelling voor een jaar (1955–1956) aan Columbia University, bij Eilenberg. In dat jaar schreef hij drie baanbrekende artikelen over simpliciale verzamelingen en twee over geadjungeerde functoren (cf. [4–8]), die hem later grote faam en naamsbekendheid in het vakgebied bezorgden. Hierover later meer. Vervolgens verbleef Kan een jaar in Princeton, om daarna in 1957 naar Israël terug te keren op wat wij nu een *tenure track position* zouden noemen, aan de Hebrew University. In 1959 keerde hij echter terug naar de Verenigde Staten, waar hij een positie aan MIT aannam. Daar werd hij al na vier jaar tot Full Professor bevorderd, vanwege een concurrerend aanbod uit Amsterdam.

Kan is heel zijn verdere werkzame leven aan MIT verbonden gebleven, tot aan zijn pensionering in 1993. Onder zijn invloed ontstond de MIT-school in de algebraïsche topologie, met nadruk op simpliciale en categorische methoden, methoden die ook tegenwoordig dominant zijn in veel ontwikkelingen in het vakgebied. Kan heeft een aantal promovendi opgeleid die zich later tot belangrijke onderzoekers in de topologie ontwikkelden, waaronder Pete Bousfield, Ed Curtis, Emmanuel Dror Farjoun, Bill Dwyer, Phil Hirschhorn, Dave Rector en Jeff Smith. De grote verschillen in aard van begeleiding van deze promovendi zijn tekenend voor Kans originele en onafhankelijke manier van werken. Zo schreef Rector een proefschrift van zeven pagina's ('een creatieve jongen', zei Kan), terwijl hij Bousfield beschreef als 'a collaborator from day one'. Samen met enkelen van zijn promovendi schreef Kan twee belangrijke boeken, waarnaar hij zelf altijd verwees als *The Yellow Monster* (1972) en *The Blue Beast* (2004), zie [1] en [2].

Ook op een aantal van zijn collega's op MIT heeft het werk van Kan veel invloed gehad. Het bekendste voorbeeld hiervan is het werk van Daniel Quillen over onder meer rationale homotopietheorie en K-theorie, dat doordrenkt is van categorietheoretische en simpliciale technieken.

Na zijn pensionering is Kan niet veel meer op MIT geweest. Hij hield op andere manier contact met jongere collega's, die veel bij hem thuis op bezoek kwamen.

Nederland

Kan heeft na zijn vertrek weinig contact met Nederland gehouden. Hij had zijn familie verloren en enkele van zijn beste jeugdvrienden waren ook geëmigreerd (zijn vrouw Nora ging nog wel regelmatig terug om vriendinnen uit haar jeugd op te zoeken). Maar Kan koesterde zijn band met de Akademie, en publiceerde regelmatig in *Indagationes Mathematicae*. En hij was een fervent fietser: tot op hoge leeftijd klom hij in weer en wind, en gekleed in knalrood tenue, op zijn fraaie mountainbike, om op de koffie te gaan bij een van zijn medewiskundigen en daar de laatste nieuwtjes op te doen, of om samen aan een artikel te werken.

Wiskundig werk

Topologie is de bestudering van ruimtelijke objecten en hun mogelijke vervormingen, in al hun algemeenheid. In het bijzonder kunnen deze objecten een willekeurig grote dimensie hebben. De resultaten en methoden van de topologie worden overal in de wiskunde gebruikt. Een belangrijk onderwerp van studie is de manier waarop een mogelijkerwijs wat vervormde kopie van één zo'n object in een ander gemaakt kan worden. Wiskundigen noemen de objecten topologische ruimten, en spreken van afbeeldingen tussen die objecten. De algebraïsche topologie probeert de objecten en de mogelijke afbeeldingen te classificeren met behulp van algebraïsche kenmerken van deze objecten. In het algemeen kunnen deze kenmerken twee objecten niet onderscheiden als de een in de ander vervormd kan worden door 'duwen en trekken' (in tegenstelling tot 'plakken en knippen'). Na funderend werk van onder anderen Brouwer en Freudenthal beleefde de algebraïsche topologie na de oorlog een heel snelle en zeer succesvolle ontwikkeling, onder meer door het werk van Steenrod, Lefschetz, Eilenberg en Mac Lane in de Verenigde Staten, Henri Cartan in Frankrijk en vele anderen.

Simpliciale verzamelingen

Het contrast tussen de veelheid van topologische ruimten en hun continue vervormingen enerzijds, en de starheid van de algebraïsche invarianten anderzijds, vroeg om een meer discrete of combinatorische aanpak van topologische ruimten, en hier lag het baanbrekende werk van Kan. Een simpliciale verzameling ('complete semi-simplicial complex' was de Engelstalige terminologie in de vijftiger jaren) kan men zich voorstellen als een ruimte, opgebouwd uit punten, lijnstukjes, driehoekjes, tetraëders, enzovoort, die slechts op een zeer beperkte manier aan elkaar geplakt mogen worden, bijvoorbeeld door voor te schrijven welke lijnstukjes als rand van welke driehoekjes figureren, welke driehoekjes als zijvlak van welk tetraëders, enzovoort. Een simpliciale verzameling kan dus beschreven worden door voor elke dimensie $0, 1, 2, 3, \ldots$ een aantal 'simplices' (dat wil zeggen punten, lijntjes, driehoekjes, enzovoort) te specificeren, samen met de 'plakinstructies'. Dit geeft een structuur die in allerlei delen van de wiskunde op blijkt te duiken. Een fundamenteel resultaat uit de topologie is dat voor elke topologische ruimte er een simpliciale verzameling gevonden kan worden die bijna niet te onderscheiden is van de oorspronkelijke ruimte, in de zin dat de gebruikelijke algebraïsche kenmerken volledig overeenkomen. Kans fundamentele bijdragen uit de vijftiger jaren [4–6] gaven onder andere een methode om de belangrijkste en meest onderscheidende van die algebraïsche kenmerken, de zogenaamde homotopiegroepen, van een topologische ruimte volledig te beschrijven in termen van de daarbij passende simpliciale verzameling. Kan ontdekte dat men zich hierbij kan beperken tot simpliciale verzamelingen die een bepaalde volledigheidseigenschap hebben. Deze staan nu bekend als 'Kan-complexen'. De ontdekking van dit begrip baande de weg tot een volledige beschrijving van de algebraïsche topologie (preciezer, van de 'homotopie-categorie') in termen van simpliciale verzamelingen en hun onderlinge relaties, waarbij de Kan-vezelingen ('Kan fibrations'), een generalisatie van de Kan-complexen, tot op de dag van vandaag een centrale rol spelen. Een meer gedetailleerde beschrijving van simpliciale verzamelingen en Kan-complexen wordt gegeven in een kader aan het eind van dit artikel.

Categorieën en functoren

Rond de oorlog ontstond in de topologie steeds meer het besef dat er een formalisme nodig was dat beter in staat was om wiskundige objecten niet zozeer in hun isolement te beschrijven, maar de nadruk legt op de mogelijke afbeeldingen tussen verschillende objecten, en bovendien het gedrag van de algebraïsche kenmerken van objecten onder die afbeeldingen beter kan beschrijven. Dit leidde tot de geboorte van de theorie van categorieën en functoren (zie [9]). Wiskundige objecten van een bepaalde soort en afbeeldingen daartussen vormen een 'categorie' (bijvoorbeeld topologische ruimten, of verzamelingen, of groepen, respectievelijk ringen uit de algebra) en constructies als de algebraïsche kenmerken van topologische ruimten kunnen efficiënt beschreven worden als 'functoren' van de ene categorie naar de andere. Gegeven zo'n functor tussen categorieën is er vaak een 'zuinigste' functor in de omgekeerde richting. Kan destilleerde dit begrip van 'adjoint functor', en liet zien dat veel belangrijke constructies in de wiskunde voorbeelden van adjoint functors zijn. Ook beschreef hij, gegeven een functor, precieze criteria voor het bestaan van zo'n geadjungeerde functor in de andere richting, met behulp van een later veel gebruikte methode bekend als 'Kan-extensie' (zie [7–8]). Een meer gedetailleerde beschrijving van geadjungeerde functoren wordt gegeven in een kader aan het eind van dit artikel.

Later werk

Met deze twee ontdekkingen, van Kan-complexen en Kan-extensies, had Kan reeds aan het begin van zijn wetenschappelijke carrière een naam verworven. Maar ook in latere jaren bleef Kan productief en leverde belangrijke bijdragen aan het vakgebied. Ik wil twee voorbeelden noemen. Ten eerste het werk met Bousfield over 'lokalisatie en completering' [1]. Enigszins vereenvoudigd gesteld is het idee als volgt: een topologische ruimte (of simpliciale verzameling!) heeft zoals gezegd algebraïsche kenmerken, die zich laten verenigen in bepaalde algebraïsche structuren zoals bijvoorbeeld een ring. Als je nu aan de algebraïsche kant die structuur enigszins verandert (als je de ring bijvoorbeeld lokaliseert of completeert), is er dan een topologische ruimte die precies de nieuwe kenmerken heeft? En hoe kun je die maken uit de eerste gegeven ruimte? Bousfield en Kan hebben in hun boek op deze vragen hele precieze antwoorden gegeven, op een manier die niet mogelijk was geweest zonder voorgaande ontdekkingen over categorieën en simpliciale verzamelingen. Een tweede voorbeeld is een serie van drie artikelen die Kan samen met Bill Dwyer schreef, gepubliceerd rond 1980. Quillen had eerder een axiomatische manier gevonden om aan twee objecten in een categorie een topologische ruimte (of beter, een simpliciale verzameling) toe te kennen die de structuur van alle afbeeldingen van het ene object in het andere beschreef. Deze constructie (voor vakgenoten: van de 'derived mapping space') is van groot belang in allerlei contexten. Samen met Dwyer vond Kan een alternatieve constructie, bekend als de simpliciale of 'hammock'-lokalisatie van een categorie, die hetzelfde resultaat oplevert als de constructie van Quillen, maar veel minder informatie gebruikt en dus veel algemener toepasbaar is gebleken.

Referenties

1 A.K. Bousfield en D.M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Springer, Berlijn , 1972.

2 W.G. Dwyer, P.S. Hirschhorn, D.M. Kan en J.H. Smith, *Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

3 W.G. Dwyer en D.M. Kan, Simplicial localizations of categories, *Journal of Pure and Applied Algebra* 17 (1980), 267-284.

4 D.M. Kan, On c.s.s. complexes, *American Journal of Mathematics* 79 (1957), 449–476.

5 D.M. Kan, A combinatorial definition of homotopy groups, *Annals of Mathematics* 67 (1958), 282–312.

6 D.M. Kan, On homotopy theory and c.s.s. groups, *Annals of Mathematics* 68 (1958), 38–53.

7 D.M. Kan, Adjoint functors, *Transactions of the American Mathematical Society* 87 (1958), 294–329.

8 D.M. Kan, Functors involving c.s.s. complexes, *Transactions of the American Mathematical Society* 87 (1958), 330–346.

9 S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlijn, 1971, 2de herziene druk, 1998.

Simpliciale verzamelingen en Kan-complexen

Een simpliciale verzameling is een systeem X van verzamelingen en afbeeldingen daartussen van de volgende vorm: voor elk natuurlijk getal $n \geq 0$ is er een verzameling X_n, waarvan de elementen de n-simplices van X genoemd worden. Verder is er voor elke niet-dalende functie

$$\alpha : \{0, \ldots, n\} \longrightarrow \{0, \ldots, m\}$$

een afbeelding α^* of $X(\alpha) : X_m \to X_n$. Deze afbeeldingen moeten bovendien aan twee voorwaarden voldoen: ten eerste moet gelden dat als α een identiteitsfunctie is, α^* dat ook is; verder moet voor een α als hierboven en een tweede functie $\beta : \{0, \ldots, m\} \to \{0, \ldots, k\}$ gelden dat

$$(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^* : X_k \longrightarrow X_n.$$

Voorbeelden van zulke niet-dalende functies α zijn de injectieve functies

$$\delta_i : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, n\}$$

die de waarde i overslaan (voor $i = 0, \ldots, n$) en de surjectieve functies

$$\sigma_j : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n-1\}$$

die de waarde j twee keer aannemen (voor $j = 0, \ldots, n-1$). Elke α kan geschreven worden als samenstelling van enkele δ_i's en σ_j's en daarom kan een simpliciale verzameling X ook beschreven worden door alleen de verzamelingen X_n en de operaties δ_i^* en σ_j^* te geven, zolang de laatste maar voldoen aan de vergelijkingen voor de samenstelling, zoals $\delta_i^* \delta_j^* = \delta_{j-1}^* \delta_i^*$ voor $i < j$. Men schrijft gewoonlijk $d_i : X_n \to X_{n-1}$ voor δ_i^* en $s_j : X_{n-1} \to X_n$ voor σ_j^*. Deze afbeeldingen d_i en s_j heten de kant-afbeeldingen en degeneratie-afbeeldingen en passen samen in een diagram:

$$X_0 \;\underset{d_0}{\overset{d_1}{\substack{\longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}}}\; X_1 \;\underset{d_0}{\overset{d_2}{\substack{\longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}}}\; X_2 \;\underset{d_0}{\overset{d_3}{\substack{\longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}}}\; \cdots$$

terwijl de genoemde vergelijkingen voor de samenstellingen van deze afbeeldingen de simpliciale identiteiten heten.

Een simpliciale verzameling X moet geïnterpreteerd worden als een combinatorische beschrijving van een topologische ruimte $|X|$, de zogenaamde meetkundige realisatie van X. Elk element x in X representeert een n-simplex in $|X|$, en de kantafbeeldingen d_i geven aan hoe die simplices aan elkaar geplakt moeten worden. Bovendien geven de degeneratie-afbeeldingen s_j aan hoe je een $(n-1)$-simplex op kunt vatten als een dichtgeklapt (gedegenereerd) n-simplex. Voor een precieze beschrijving definiëren we eerst het standaard n-simplex

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_i \leq 1, \Sigma_i t_i = 1\}.$$

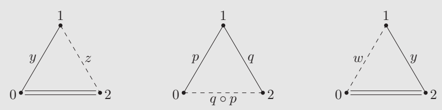
Dit n-simplex heeft $n+1$ hoekpunten van de vorm $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Elke functie $\alpha : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, m\}$ zoals hierboven induceert een affiene lineaire afbeelding $\alpha_* : \Delta^n \to \Delta^m$ die het i-de hoekpunt van Δ^n naar het $\alpha(i)$-de hoekpunt van Δ^m stuurt:

$$\alpha_*(t_0, \ldots, t_n) = (u_0, \ldots, u_m)$$
$$\text{met} \quad u_j = \Sigma_{\alpha(i)=j}\, t_i.$$

Vervolgens definieert men $|X|$ als het quotiënt van de disjuncte vereniging van kopieën van de verschillende Δ^n, precies een kopie voor elke $x \in X_n$ en elke $n \geq 0$. Dit quotiënt wordt verkregen door, voor elke $\alpha : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, m\}$ en elke $x \in X_m$, een punt $(t_0, \ldots, t_n)$ in de kopie van Δ^n behorende bij $(n, \alpha^* x)$ te identificeren met het punt $\alpha_*(t_0, \ldots, t_n)$ in de kopie van Δ^m behorende bij (m, x).

Zo geeft elke simpliciale verzameling X een topologische ruimte $|X|$. Omgekeerd krijgen we voor elke topologische ruimte T een simpliciale verzameling $\mathrm{Sing}(T)$, het zogenaamde singuliere complex van T. De verzameling $\mathrm{Sing}(T)_n$ van n-simplices in $\mathrm{Sing}(T)$ is hierbij de verzameling van alle continue afbeeldingen $\Delta^n \to T$, en de operaties $\alpha^* : \mathrm{Sing}(T)_m \to \mathrm{Sing}(T)_n$ worden eenvoudig gedefinieerd door samenstelling met α_*: voor een continue afbeelding $f : \Delta^n \to T$ geldt $\alpha^*(f) = f \circ \alpha_*$.

Er bestaat een evaluatie-afbeelding $|\mathrm{Sing}(T)| \to T$ die $(t_0, \ldots, t_n)$ in Δ^n in de kopie behorende bij $(g : \Delta^n \to T)$ in $\mathrm{Sing}(T)_n$ stuurt naar $g(t_0, \ldots, t_n) \in T$. Een fundamenteel resultaat in de topologie is dat via deze afbeelding nauwelijks onderscheid kan worden gemaakt tussen T en $|\mathrm{Sing}(T)|$, in de zin dat deze isomorfismen in homotopie en cohomologie induceert. In feite is deze evaluatie-afbeelding een homotopie-equivalentie als T een voldoende nette ruimte is (een manifold, bijvoorbeeld). Mede om deze reden ligt het voor de hand te trachten om de homotopie-theorie van topologische ruimten te ontwikkelen op een zuiver combinatorische manier, alleen met simpliciale verzamelingen. Het werk van Daan Kan heeft aangetoond dat dit inderdaad mogelijk is, mits men zich maar beperkt tot simpliciale verzamelingen die aan een zekere extensieconditie voldoen. Deze conditie staat tegenwoordig bekend als de Kan-conditie, en de simpliciale verzamelingen die eraan voldoen heten Kan-complexen. Voordat we de conditie formuleren, merken we op dat een n-simplex $x \in X_n$ een $(n+1)$-tal kanten $d_i(x) \in X_{n-1}$ heeft (voor $i = 0, \ldots, n$), die aan elkaar passen op grond van de simpliciale identiteiten, zoals $d_i d_j x = d_{j-1} d_i x$ voor $i < j$. De Kan-conditie is nu de voorwaarde dat indien, omgekeerd, n zulke potentiële kanten x_i in X_{n-1} zijn gegeven voor elke $i = 0, \ldots, n$ op één na, zeg k, die aan elkaar passen alsof ze de kanten van een n-simplex x zijn, er dan ook inderdaad een n-simplex x in X bestaat met $d_i(x) = x_i$ voor elke i behalve k. Deze Kan-conditie stelt ons in staat om 'paden' samen te stellen of van richting te veranderen zoals voor paden in een topologische ruimte. Ter illustratie hiervan geven we voorbeelden van diagrammetjes die horen bij de Kan-condities voor $n = 2$ en $k = 0, 1, 2$. Zie Figuur 1.



Figuur 1

Het gelijkheidsteken hier geeft een gedegenereerd 1-simplex aan. Dus de Kan-conditie voor het eerste plaatje zegt: gegeven een $y \in X_1$ bestaat er een $x \in X_2$ met $d_2 x = y$ en $d_1 x$ gedegenereerd. Dan is $z = d_0 x$ dus een 1-simplex met de eigenschap dat $d_1 z = d_0 y$ en $d_0 z = d_1 y$; met andere woorden, z kan worden opgevat als het pad y doorlopen in omgekeerde richting, een soort links-inverse voor y. Het tweede plaatje beschrijft de samenstelling van paden p en q; het derde plaatje beschrijft, analoog aan het eerste plaatje, een rechts-inverse voor y.

Aanbevolen literatuur: Er zijn vele goede leerboeken over simpliciale verzamelingen geschreven aan het eind van de zestiger jaren nadat de basistheorie was ontwikkeld, bijvoorbeeld:

– P. Gabriel en M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Springer.
– K. Lamotke, *Semisimpliziale algebraische Topologie*, Springer.
– J.P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, University of Chicago Press.

Een moderner boek is:

– P.G. Goerss en J.F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Springer.

Geadjungeerde functoren

Diverse constructies in de algebraïsche topologie, zoals homologie- en homotopiegroepen, hebben goede eigenschappen met betrekking to continue afbeeldingen tussen topologische ruimten. Om deze eigenschappen te beschrijven introduceerden Eilenberg en Mac Lane de taal van categorieën en functoren. Een categorie is een structuur bestaande uit 'objecten' en 'morfismen' daartussen. In het bijzonder is er voor elk object X in een categorie een identiteitsmorfisme gegeven en is er een associatieve compositie van morfismen, die voor twee morfismen $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ een morfisme $gf : X \to Z$ geeft. De identiteitsmorfismen werken als neutrale elementen voor deze compositie-operatie. De meeste typen wiskundige objecten vormen categorieën: zo is er de categorie van topologische ruimten en continue afbeeldingen daartussen, de categorie van groepen en homomorfismen, de categorie van (bijvoorbeeld) reële vectorruimten en lineaire afbeeldingen daartussen, de categorie van verzamelingen en functies daartussen, enzovoort, enzovoort.

Een 'functor' is een soort afbeelding tussen categorieën: zo'n functor stuurt objecten van de ene categorie naar objecten van de andere en net zo voor morfismen, op zo'n manier dat identiteiten en compositie gerespecteerd worden. Enkele voorbeelden van functoren vanuit de categorie van topologische ruimten en continue afbeeldingen zijn de 'onderliggende verzameling', naar de categorie van verzamelingen en functies, en de n-de homologie, naar de categorie van abelse groepen en homomorfismen (voor elke $n \geq 0$ een functor). De fundamentaalgroep geeft een voorbeeld van een functor van de categorie van topologische ruimten met basispunt naar de categorie van groepen.

Veel van deze zogenaamde functoriële constructies hebben speciale eigenschappen als het gaat om morfismen vanuit of naar waarden van de betreffende functor. Zo is voor een vectorruimte V een morfisme van commutatieve $\mathbb{R}$-algebra's van de symmetrische algebra $S(V)$ naar een andere $\mathbb{R}$-algebra A 'hetzelfde als' een morfisme van V naar A opgevat als vectorruimte. Deze correspondentie kan worden beschreven door een tweetal functoren

$$S : (\text{reële vectorruimten}) \rightleftarrows (\mathbb{R}\text{-algebra's}) : U$$

waarbij $U(A)$ gedefinieerd is als de onderliggende vectorruimte van een algebra A. Er is een een-op-eencorrespondentie tussen morfismen $S(V) \to A$ in de ene categorie en $V \to U(A)$ in de ander. (Bovendien gedraagt deze correspondentie zich netjes ten opzichte van de compositie aan beide kanten.) In zo'n soort situatie zegt men dat de functor S links geadjungeerd is aan U, en U rechts geadjungeerd aan S. Het was Daan Kan die in het begin van de vijftiger jaren dit begrip van geadjungeerde functor ontdekte, geïnspireerd door de analogie tussen twee bekende een-op-eencorrespondenties: de ene tussen afbeeldingen $\Sigma(X) \to Y$ en $X \to \Omega(Y)$, dat wil zeggen van de suspensie van een topologische ruimte X naar een andere ruimte Y en van X naar de lussenruimte van Y; de andere tussen morfismen van modulen $L \otimes M \to N$ en morfismen $M \to \mathrm{Hom}(L, N)$. Het werd al snel daarna duidelijk dat dit soort paren van geadjungeerde functoren in heel veel verschillende situaties in de wiskunde opduiken en hoe belangrijk ze daar zijn. Omgekeerd is het voor een gegeven constructie vaak nuttig om te kijken of er soms een links of rechts geadjungeerde voor bestaat. De constructies van het singuliere complex van een topologische ruimte en van de meetkundige realisatie, besproken in het andere kadertje, zijn ook voorbeelden hiervan: realisatie is links geadjungeerd aan het singuliere complex. Dit betekent dat er een bijectieve correspondentie is tussen morfismen van simpliciale verzamelingen $X \to \mathrm{Sing}(T)$ en continue afbeeldingen $|X| \to T$. In het bijzonder krijgen we als we deze correspondentie toepassen op een identiteitsmorfisme $\mathrm{Sing}(T) \to \mathrm{Sing}(T)$ een continue afbeelding $|\mathrm{Sing}(T)| \to T$. Zoals vermeld in het andere stukje induceert deze afbeelding isomorfismen op het niveau van allerlei invarianten uit de algebraïsche topologie en drukt op een meer formele manier uit dat simpliciale verzamelingen en topologische ruimten vanuit het perspectief van de algebraïsche topologie equivalente categorieën zijn.