Arjeh Cohen
Department of Mathematics and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
a.m.cohen@tue.nl

Afscheidsrede

Wiskunde in het web

Na bijna 22 jaar hoogleraarschap nam Arjeh Cohen op 28 maart 2014 afscheid van de Technische Universiteit Eindhoven. In 1992 werd hij er benoemd tot hoogleraar discrete wiskunde aan de Faculteit Wiskunde en Informatica. Dit artikel is een licht bewerkte versie van zijn afscheidsrede.

Tussen mijn afstuderen in 1971 en deze afscheidsrede zijn veel beroemde wiskundige vermoedens opgelost. Twee daarvan zijn zó bekend dat u er vast wel eens van hebt gehoord.

Het eerste is de Laatste Stelling van Fermat. In 1637 schreef Fermat, in de marge van een bladzij uit een boek, dat hij een bewijs had. Maar dat bewijs is nooit door een ander gevonden of gereconstrueerd. Het eerste algemeen geaccepteerde bewijs van de stelling komt van Wiles en is pas verschenen in 1995. Het vermoeden stond dus 358 jaar open.

Het tweede is de vierkleurenstelling. Die gaat over het zodanig kleuren van landkaarten dat geen enkel tweetal aangrenzende landen dezelfde kleur heeft. De uitspraak is dat je bij elke landkaart daarvoor met vier kleuren toekan. In 1840 vroeg Möbius al of elke landkaart vierkleurbaar is. Het is voor het eerst bewezen door Appel en Haken in 1976. De vraag stond dus 136 jaar open. Het bewijs van Appel en Haken berust op computerwerk. Het is een bewijs uit het ongerijmde. Dat betekent dat het bestaan van een kleinste landkaart die niet vierkleurbaar is, wordt aangenomen en dat daaruit een tegenspraak wordt afgeleid. Met bekende redeneringen kwamen Appel en Haken uit op een lijst van 1936 landkaarten. Ten minste één daarvan zou in een kleinste landkaart voor moeten komen die niet vierkleurbaar is. Met behulp van computerberekeningen hebben ze vastgesteld dat dit voor geen van de 1936 kaarten het geval is. Zo verkregen ze de gewenste tegenspraak.

Het contrast met de laatste stelling van Fermat kan haast niet groter zijn. Ten eerste is de rol van de computer in het bewijs van Wiles minimaal. Ten tweede strekken de gevolgen voor de wiskunde van zijn resultaten veel verder dan alleen Fermat. Ik vraag met deze observatie dus eigenlijk: wat maakt het ene resultaat beter dan het andere? Zijn de resultaten van Wiles belangrijker, interessanter, of dieper dan de vierkleurenstelling van Appel en Haken? Bestaat er zoiets als goede wiskunde?

Mijn promotor Springer zei lang geleden dat je als wiskundige wel aanvoelt wat goede wiskunde is. Misschien vraagt u zich af waarom ik deze vraag dan toch stel. Dat is omdat bestuurders en geldschieters ons al jaren analyseren met methoden als citatie-analyses, waarbij de beoordeling wel met maar niet door wiskundigen plaatsvindt. Daar voelen velen zich ongemakkelijk bij.

Ter aansporing tot een beoordeling geheel door wiskundigen zelf, stel ik vijf criteria voor. Aan de hand daarvan ga ik op een derde grote stelling in. Daarna gebruik ik de vijf criteria om de positieve bijdrage van het web aan de wiskunde te bespreken.

Vijf criteria

Volwassenheid

De nadruk die ik legde op de lange tijd dat de twee genoemde problemen open stonden, suggereert dat de lengte van die periode een criterium voor een goed wiskundig resultaat is. Maar een vraag kan best lang open staan omdat niemand zich er voor interesseert. Daarom is het verstandig dit criterium ruimer te nemen. Een goede omschrijving lijkt me volwassenheid van het probleem. Van de achterliggende vermoedens zijn al veel gevolgen geïdentificeerd en al veel pogingen tot falsificatie gestrand.

Het gaat bij het oplossen van een probleem duidelijk niet alleen om de vastgestelde uitspraak. Ook telt hoe het resultaat afgeleid wordt. Dit verwijst direct naar de uitdaging die wiskundigen in hun werk zien: slim zijn.

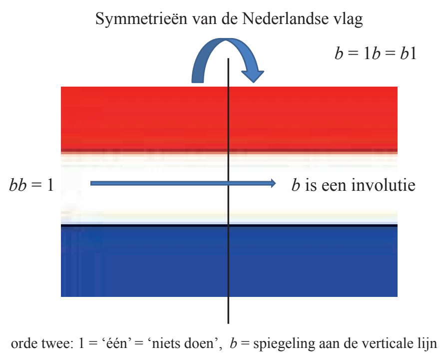
Resistentie

Zodra een bewijs gevonden is, kan het beeld van het achterliggende probleem drastisch veranderen. Fermat zelf verwees naar een bewijs dat hij had, en dat nooit door anderen gevonden is. Wat zou de waardering van de stelling geweest zijn als dat wel het geval was geweest? Hoeveel mensen zouden dan niet beweren dat het probleem eigenlijk triviaal is? Dat is wiskundig jargon voor ‘te flauw om los te lopen.’ Het is een favoriete bezigheid van wiskundigen om dat te roepen. Het bevestigt je status als slimmerd.

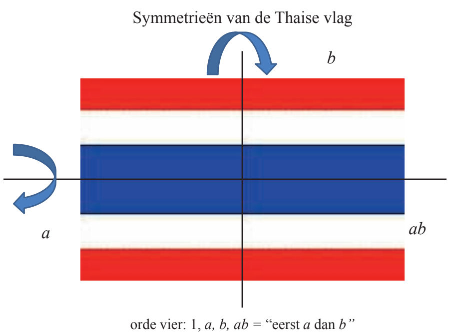
Het bewijs van een stelling is soms alleen maar lang omdat het onhandig is opgezet. De waardering van het resultaat kun je dus niet alleen maar aflezen aan de lengte van het bewijs. Daarom wil ik dit criterium graag als resistentie omschrijven: de weerstand tegen belagers die het bewijs proberen te vereenvoudigen.

Originaliteit
Het komt ook voor dat een bewijs drastisch ingekort wordt door verrassend gebruik van een sterke stelling uit een heel ander gebied. De waardering hiervoor deel ik in bij het criterium originaliteit. Het is natuurlijk ook van toepassing op het resultaat zelf. Goede wetenschap brengt een schok te weeg, een plots verkregen inzicht dat uitstijgt boven het normale. Nu zou je kunnen denken dat dat bij Fermat toch nauwelijks het geval is, omdat de uitspraak al eeuwen bekend is.

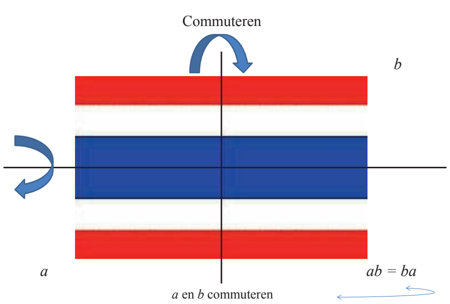
Toch is de bewering al wonderbaarlijk voor iedereen die er voor het eerst naar kijkt, vooral omdat er voor exponent n gelijk aan twee heel veel gehele oplossingen zijn, wat sterk contrasteert met het ontbreken van dergelijke oplossingen voor n groter dan twee. De vierkleurenstelling biedt echter geen grote verrassing. De professionele kaartenmaker ziet bij vrijwel elke concrete landkaart snel hoe je vaak al met drie maar in ieder geval met vier kleuren toekunt.



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

Unificatie
Dicht bij de verrassing zit een ander aspect: goede wetenschap unificeert. Unificatie berust op abstractie en kracht. Abstractie helpt bij het terugbrengen van een model naar de kale essentie. Door alle afleidende ruis weg te snijden, krijg je beter boven tafel wat de kern van het probleem is. Bovendien kan een oplossing in meerdere situaties gebruikt worden.

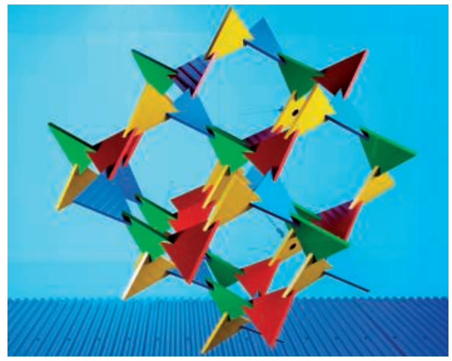
Een goed voorbeeld van abstractie is een netwerk. Als wiskundig concept is een netwerk een verzameling knooppunten waarvan bepaalde tweetallen met elkaar verbonden zijn, al of niet voorzien van informatie over de lengte of sterkte van die verbinding.

Of het netwerk nu een web voorstelt, een sociaal netwerk of een gasdistributie, maakt daarbij niet uit. De abstractie zorgt ervoor dat het model in verschillende situaties kan worden toegepast.

Een tweede voorbeeld is het wiskundige begrip groep. In mijn onderzoek heb ik daar veel mee te maken gehad. Het is een abstractie van het concept symmetrie. Een symmetrie van een meetkundige figuur is een transformatie die de figuur als geheel niet verandert.

De Nederlandse vlag, bijvoorbeeld, neergelegd in het platte vlak, heeft twee symmetrieën. Een daarvan is de spiegeling aan de verticale lijn door het midden van de vlag. Deze spiegeling geven we aan met b. De ander is 'niets doen', ofwel 'alles op zijn plaats laten'. Deze luie actie noemen we de één en geven we aan met het symbool 1, net als het cijfer. Zie Figuur 1.

De spiegeling b en de één samen vormen, zo zeggen we dan, een symmetriegroep die orde twee heeft. We kunnen de groep algebraïsch beschrijven met de symbolen 1 en b. Het uitvoeren van twee of meer symmetrieën achter elkaar heet een samenstelling. Samenstellingen noteren we als woorden in de symbolen, hier 1 en b. Dus bb staat voor het twee keer uitvoeren van de spiegeling b. De formule $bb = 1$ drukt uit dat twee keer spiegelen aan dezelfde lijn hetzelfde resultaat oplevert als niets doen. Elementen met deze eigenschap noemen we involuties. De formule $1b = b$ drukt uit dat samenstelling van eerst b en dan de één, weer de symmetrie b geeft. Immers, de 1 staat voor niets doen. Het geheel van symmetrieën en hun samenstellingen is een groep.



Figuur 4

De symmetriegroep van de Thaise vlag heeft orde vier. Zie Figuur 2. Naast de elementen 1 en b als in de Nederlandse vlag, hebben we nog een spiegeling a en de samenstelling van a en b.

Of we nu eerst a en dan b uitvoeren, of andersom, het resultaat hier is hetzelfde: $ab = ba$. Als deze gelijkheid geldt, zeggen we dat a en b commuteren. Zie Figuur 3. We zullen later zien dat dit lang niet altijd het geval is. De groep van symmetrieën bestaat hier dus uit de vier elementen 1, a, b en ab. Met andere woorden, de groep heeft orde vier.

Groepen worden gebruikt om verschillende patronen zoals kristalstructuren, naar hun symmetrieën te onderscheiden. Een mooi stukje van een dergelijk patroon hangt op onze campus. Zie Figuur 4.

Het begrip groep staat centraal in het Erlanger Programm, dat in 1872 door Felix Klein is gepubliceerd. Het gaat ervan uit dat alle relevante natuurkundige wereldbeelden afgeleid kunnen worden van een speciaal soort oneindige groepen, die Lie-groepen genoemd worden, naar de Noorse wiskundige Sophus Lie. In hun zoektocht naar de vereniging van de vier fundamentele krachten in één unificerend model, hebben natuurkundigen al verschillende Lie-groepen gebruikt.

Naast abstractie koppel ik aan unificatie het begrip kracht. Dat drukt uit in hoeveel gevallen de stelling een uitspraak van betekenis doet. Bij toegepaste wiskunde kun je de kracht van een resultaat meten aan situaties waar het een voorspellende uitspraak over doet. In meer abstracte wiskunde kun je tellen hoeveel andere resultaten direct uit de gegeven stelling volgen.

Fermat staat hierin sterk ten opzichte van de vierkleurenstelling. Taylor, die meewerkte aan de laatste loodjes van het bewijs van Fermat, heeft later Wiles' methoden gebruikt om een erg krachtige uitspraak te bewijzen. In tegenstelling tot zijn kleurige karakter, zijn van de vierkleurenstelling weinig consequenties bekend, noch in de wiskunde noch daarbuiten.

Waardering

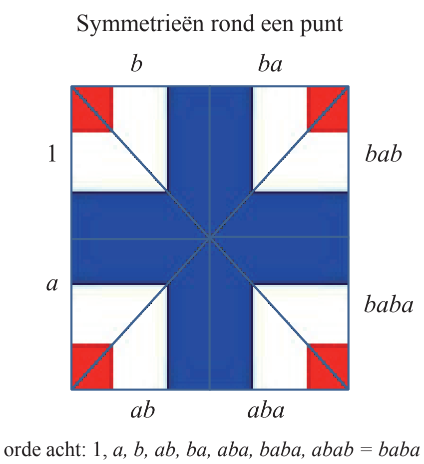
Het laatste criterium ter beoordeling van wiskundige resultaten dat ik wil voorstellen, is de waardering van de vakgenoten.

Wiskundigen zien zichzelf graag als onafhankelijke denkers. Toch hebben ze vrijwel allemaal een bepaalde gemeenschap van vakgenoten als referentiekader. Een stel collega's van Wiles keek gezamenlijk het werk van hem na vóórdat het bewijs van Fermat gepubliceerd werd. De waardering van deze onderzoekers voor zijn werk en die speciale behandeling getuigen van een gemeenschap van vakgenoten die zeer stimulerend kan werken, zelfs voor een individualist als Wiles.

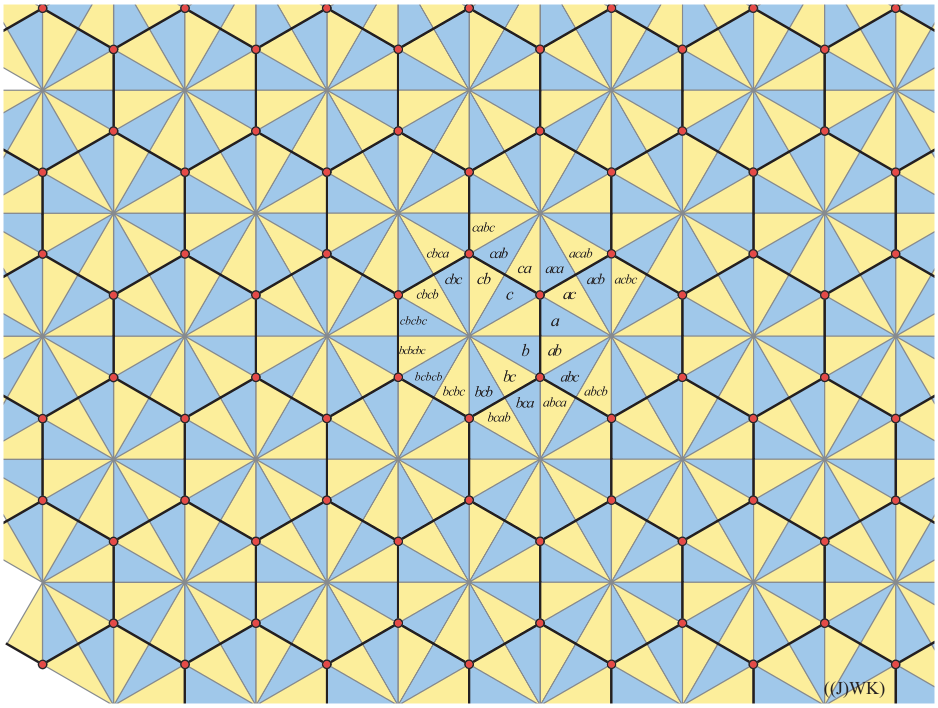
Hoewel ook wiskundigen aan hypes en modes blootgesteld zijn, bepalen de bevindingen van de eigen gemeenschap mede het duurzame belang van een stelling. Die waardering spreekt ook uit prijzen, waarvan er steeds meer in omloop zijn.

Conclusie

Zo zijn we tot vijf criteria gekomen om in te schatten hoe goed een wiskundig resultaat is. Ik heb de benamingen zo gekozen dat de eerste letters een aansprekend acroniem vormen: VROUW.



Figuur 5



Figuur 6

Eindige groepen

We gaan deze vijf criteria uitproberen op een derde groot resultaat: de classificatie van de eindige enkelvoudige groepen. Ik heb namelijk een groot deel van de geschiedenis van dichtbij meegemaakt en mijn favoriete onderzoeksterrein, een bepaald soort meetkunde, heeft hier veel mee te maken.

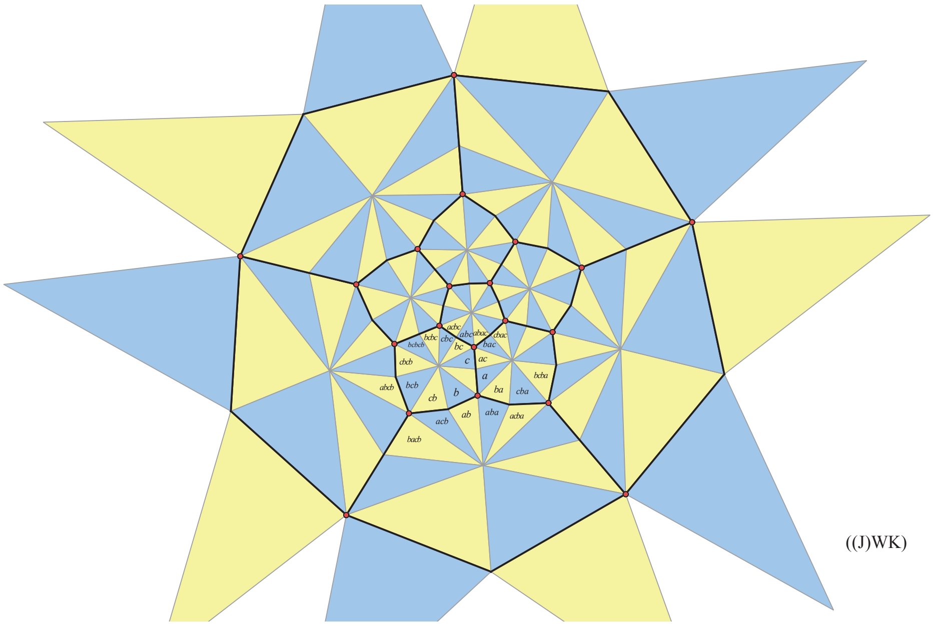
Om een idee te geven waar het vak over gaat, visualiseren we een abstracte groep met behulp van meetkunde. Denk weer even terug aan de twee vlaggen. De Nederlandse vlag heeft een symmetriegroep van orde twee en de Thaise van orde vier. Maar met behulp van de groep van symmetrieën van de Thaise vlag, kunnen we de Nederlandse vlag Thais maken. Daartoe passen we eerst twee spiegelingen toe op de Nederlandse vlag. De ene, die we b noemen, is de spiegeling aan de oostzijde van de vlag en de andere, die we a noemen, aan de zuidzijde van de vlag. Passen we daarna ook hun samenstelling toe, dan ontstaat de Thaise vlag. We kunnen dus aan de hand van een abstracte groep een concrete meetkundige figuur maken waarin alle symmetrieën van de groep zichtbaar zijn. Van de abstracte groep hebben we hier gebruikt dat de twee involuties a en b commuteren, zodat de twee samenstellingen — eerst de één en dan de ander of andersom — het zelfde resultaat leveren, namelijk de vierde vlag.

We gaan nu over op driehoeken in plaats van vlaggen. We nemen een driehoek uit de vlag waarin een hoek zit van 45 graden. Als we die driehoek gaan spiegelen om de zijden door een hoekpunt van 45 graden en dat blijven doen, ontstaan acht driehoeken op dat hoekpunt. Zie Figuur 5. Dit heeft te maken met het feit dat 45 gelijk is aan 360 gedeeld door 8. Niet alle elementen uit de groep commuteren met elkaar, maar de vier draaiingen wel. Deze groep heet de cyclische groep van orde vier. Net zo krijgen we, uitgaande van een driehoek met een hoek van $\frac{360}{2m}$ graden, voor elk natuurlijk getal m, de cyclische groep van orde m.

Dergelijke constructies van meetkunde en groep met spiegelingen voeren we nog drie keer uit, elke keer met een driehoek als uitgangspunt en met spiegelingen aan alle drie zijden van de driehoek in plaats van twee, zoals daarnet.

We kijken eerst naar een driehoek in het platte vlak met hoeken van 30, 60 en 90 graden. Zie Figuur 6, waarin we beginnen met de witte driehoek binnen de zijden waar a, b en c bij staan.

Steeds spiegelen we aan de zijden van bekende driehoeken om nieuwe driehoeken te maken. In sommige driehoeken staat een samenstelling van de spiegelingen a, b en c beschreven die de begindriehoek naar die driehoek transformeert. Rond elk hoekpunt ontstaan steeds vier driehoeken, zes driehoeken of twaalf driehoeken. Het eindresultaat is een betegeling van het platte vlak met driehoeken. Elke spiegeling wordt een symmetrie van de hele betegeling. De groep van symme-



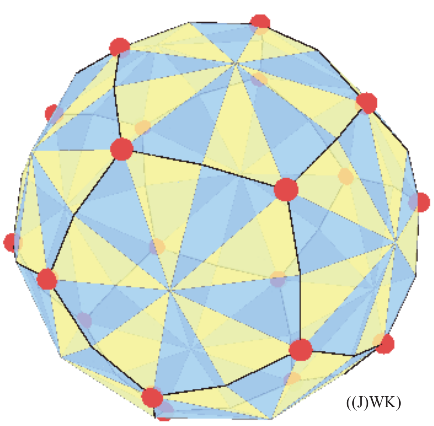
Figuur 7

trieën en de meetkundige figuur ontstaan zo hand in hand. Er zijn oneindig veel driehoeken, en de groep heeft oneindig veel symmetrieën. Met andere woorden, de groep heeft een oneindige orde. In Figuur 6 is de rand van elk twaalftal driehoeken op één hoekpunt aangedikt om het honingraat-motief naar voren te laten komen.

Dit voorbeeld laat een van de vele mooie interacties zien tussen de meetkunde, de plaatjes dus, en de algebra, de groep waarvan symmetrieën geregistreerd worden in woorden, met de letters a, b en c.

De tweede constructie starten we met een driehoek die hoeken van 36, 60 en 90 graden heeft. Zie Figuur 7. Dit betekent dat het spiegelen aan lijnen door een hoekpunt respectievelijk tien, zes en vier driehoeken op dat hoekpunt oplevert. We maken weer de drie buren van de oorspronkelijke driehoek en gaan door met spiegelen aan de zijden om nieuwe driehoeken te creëren.

Na 119 stappen is de opbouw compleet: er zijn 120 driehoeken ontstaan. Het eindresultaat is wat moeilijk te tekenen in het platte vlak. Daarom zijn de toppen van de tien uitstekende driehoeken apart getekend, terwijl ze eigenlijk samenvallen. Ook de lijnstukken die bij dat buitenste punt eindigen en in hetzelfde punt starten, vallen eigenlijk samen. We dikken de rand van elk tiental driehoeken op één hoekpunt aan om te accentueren dat we de dodecaëder, het beroemde regelmatige twaalfvlak, hebben gevonden.



Figuur 8

Het plaatje is letterlijk en figuurlijk rond. Zie Figuur 8. Dit is te zien dankzij de transformaties van de figuur, die het driehoekenpatroon intact houden. Het aantal gevonden driehoeken is gelijk aan het aantal symmetrieën van de groep. De bijbehorende groep heeft dus orde 120.

In de eerste constructie begonnen we met een driehoek waarvan de som van de hoeken gelijk is aan 180 graden, zoals we gewend zijn. In de tweede constructie was de som 186 graden, dus meer dan de gebruikelijke 180; de ontstane figuur in het platte vlak bleek tot een boloppervlak om te krommen.

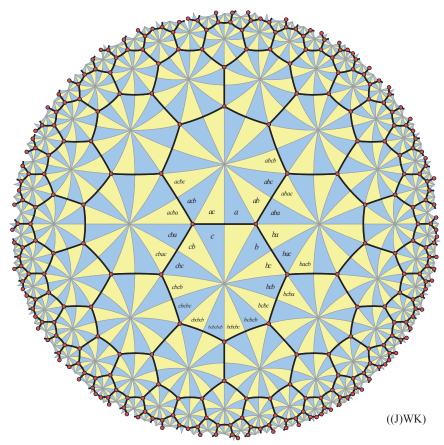
Voor het derde voorbeeld starten we met een driehoek waarvan de hoeken $\frac{360}{14}$, 60 en 90 graden zijn. De som van de hoeken is dan minder dan 180 graden. Zie Figuur 9.

Ook hier blijven we spiegelen om nieuwe driehoeken te maken, waarbij er steeds vier driehoeken, zes driehoeken of veertien driehoeken op een hoekpunt komen. Ten slotte dikken we de rand van elk veertiental driehoeken op één punt weer aan. De figuur die hier ontstaat, ligt in een zogenaamd hyperbolisch vlak, dat getekend is in een cirkelschijf. De cirkelschijf geeft een klassiek model voor wie zich afvraagt waar de rand van de wereld ligt. In het midden van de schijf kun je je bewegen zoals je gewend bent. Maar naarmate je dichter bij de rand van de schijf komt, worden je bewegingen trager. Zó traag dat je nooit echt bij de rand kunt komen. Dit model heeft Poincaré gebruikt om het gevoel over te brengen dat je in een wereld leeft waarvan je de rand nooit zult bereiken. De groep van symmetrieën van deze Poincaré-schijf is een Lie-groep en het wereldmodel past in het eerder genoemde Erlanger Programm van Felix Klein. De groep van symmetrieën van de verenigde driehoeken is een deel van deze Lie-groep.

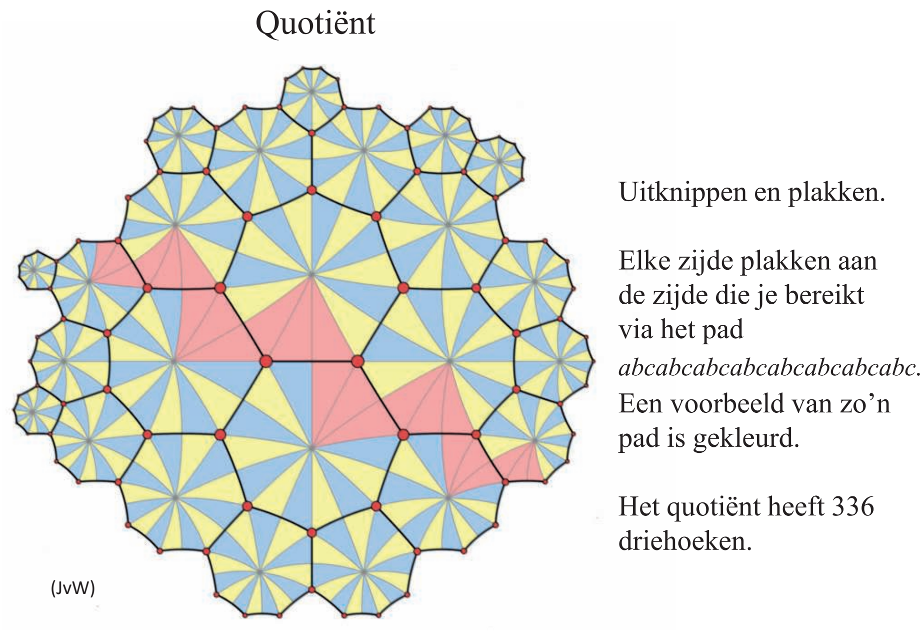
Er ontstaan oneindig veel driehoeken. Maar je kunt eindige groepen vinden, door quotiënten te nemen. Een eindig quotiënt krijg je door de rand om een stuk met eindig veel driehoeken van de figuur uit te knippen en de zijden van telkens twee driehoeken uit die opengeknipte rand zó aan elkaar te plakken dat er geen rand overblijft. Niet elke aanpak leidt onmiddellijk tot een interessante groep, maar we weten waar we het zoeken moeten. In Figuur 10 staat een voorbeeld, waarin het plakvoorschrift voor twee zijden uit de rand door een roze pad is aangegeven.

Het resultaat is te zien in Figuur 11. De groep in dit voorbeeld heeft orde 336.

Een eindige groep bestaat uit eindig veel symmetrieën. Dat aantal heet, zoals gezegd, de orde van de groep. Veruit de meeste groepen kunnen worden opgebouwd uit kleinere groepen, waarbij het product van de ordes van de kleinere groepen gelijk is aan de orde



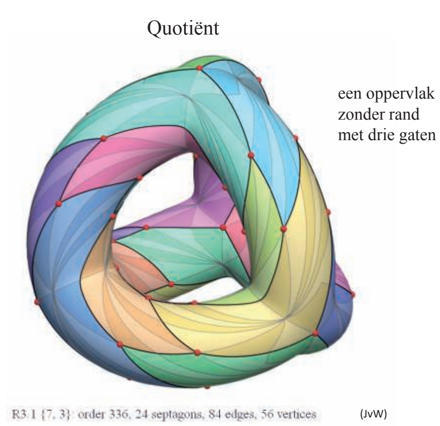
Figuur 9



Figuur 10

van de oorspronkelijke groep. Bijvoorbeeld, de cyclische groep van orde 4 is opgebouwd uit twee cyclische groepen van orde 2, en de cyclische groep van orde 6 is opgebouwd uit een cyclische groep van orde 2 en een cyclische groep van orde 3. Een groep die niet opgebouwd kan worden uit twee kleinere groepen, heet enkelvoudig.

Tussen 1888 en 1894 zijn de enkelvoudige Lie-groepen geclassificeerd. Deze groepen kennen varianten die eindige enkelvoudige groepen zijn. Er zijn precies 18 oneindige reeksen van die eindige varianten. Veruit de eenvoudigste van de 18 reeksen bestaat uit de cyclische groepen waarvan de orde een priemgetal is. De twee kleinste voorbeelden die niet cyclisch zijn maar wel in de oneindige reeksen voorkomen, zijn de groepen van draaiingen in de eerder besproken groep van orde 120 van de dodecaëder en de



Figuur 11

quotiëntgroep van orde 336 van het oppervlak met de drie gaten. Er zijn precies 26 eindige enkelvoudige groepen bekend die niet in een van de 18 oneindige reeksen voorkomen. Deze groepen worden sporadisch genoemd. De grootste van deze sporadische groepen heet het monster. Zijn orde, het aantal symmetrieën van deze groep dus, is ongeveer gelijk aan het aantal kilogrammen dat het universum weegt.

Na al deze voorbereidingen zijn we klaar voor het derde grote resultaat: de classificatie van de eindige enkelvoudige groepen. Die zegt dat elke eindige enkelvoudige groep bekend is, dat wil zeggen, tot een van de 18 oneindige reeksen behoort of een van de 26 sporadische groepen is.

In 1892 vroeg Hölder of een dergelijke stelling mogelijk was. Het bewijs was rond in 2005, dus 113 jaar later.

We gaan nu de VROUW-criteria voor de classificatie nalopen.

Volwassenheid van CFSG

De enige eindige enkelvoudige groepen waarvan elk tweetal symmetrieën commuteert, zijn de cyclische die als orde een priemgetal hebben. Dit is een betrekkelijk eenvoudig deelresultaat van de classificatie. In 1899 publiceerde Burnside een moeilijker geval: hij classificeerde alle eindige enkelvoudige groepen die een involutie hebben waar alleen maar de één en enkele andere involuties mee commuteren. Deze classificatie, zo zag hij het, zou meeromvattend kunnen worden als het waar is dat elke eindige enkelvoudige groep die niet cyclisch is, een involutie heeft. Dit vermoeden leek lange tijd te moeilijk om op te lossen, maar het is in 1963 bewezen door Feit en Thompson. Het was het startsein voor een grote gezamenlijke inspanning om de volledige classificatie van eindige enkelvoudige groepen rond te krijgen. Sindsdien zijn stelling en bewijs langzaam maar zeker volwassen geworden.

Resistentie van CFSG

Omdat het begrijpen van de stelling al zo veel werk is, zal het niemand verbazen dat het bewijs erg lang is. Het bewijs beslaat ongeveer 4000 pagina's. Ter vergelijk: de publicatie van Wiles en Taylor telt niet meer dan 140 pagina's.

De meest aansprekende blunder van de classificatie zou een eindige enkelvoudige groep zijn die niet bekend is. Deze gedachte kwam vaak op en is al vroeg uitgesproken door Conway. Maar het bewijs lijkt redelijk robuust tegen de komst van een nieuwe groep; het zal dan hoogstwaarschijnlijk maar op een paar puntjes aanpassing behoeven.

Originaliteit van CFSG

Een verrassend aspect aan het bewijs is het 'van lokaal naar globaal'-principe, waarbij je verregaande conclusies kunt trekken over een groep als geheel uit informatie die alleen maar iets zegt over kleine onderdeeltjes ervan. Een illustratie van dit principe zit in een vlucht vogels in V-formatie. Een prachtige globale structuur als deze komt tot stand door de lokale sturing van elke deelnemende vogel. Het globale beeld ontstaat zonder centrale organisatie!

Bij de figuren die uit spiegelingen van driehoeken ontstonden, zagen we ook een voorbeeld van dit principe: de som van de hoeken in de startdriehoek bepaalt op voorhand of het betegelde oppervlak dat de driehoeken vormen, recht blijft als in het platte vlak, krom trekt tot een bol, of uitdijt tot het hyperbolisch vlak als in de Poincaré-schijf.

Dan nu het 'lokaal naar globaal'-principe in de classificatie. In de opzet van een bewijs uit het ongerijmde, nemen we aan dat er een kleinste eindige enkelvoudige groep G bestaat die niet bekend is. De stelling van Feit en Thompson uit 1963 zegt dat die groep G een involutie heeft. De symmetrieën van G die met deze involutie commuteren, vormen een groep die kleiner is dan G. Uit de aannames volgt dat deze kleinere groep opgebouwd is uit bekende groepen. De lokale informatie van de involutie is dus min of meer bekend. Volgens het 'van lokaal naar globaal'-principe worden alle eindige enkelvoudige groepen met deze bekende lokale structuur bepaald, om te constateren dat die zelf ook bekend zijn. In het bijzonder is de groep G bekend, in tegenstelling tot de aanname. Een tegenspraak is afgeleid en de stelling is bewezen uit het ongerijmde. Dit is natuurlijk een hele grove indicatie van het bewijs, maar het geeft het verrassende 'van lokaal naar globaal'-principe goed weer.

Voor de oplossing waren heel veel nieuwe concepten en methoden nodig, meer in de orde van Fermat dan de vierkleurenstelling. Er moest ook veel parallel gewerkt worden aan allerlei verschillende gevallen, wat weer meer overeenkomst vertoont met de vierkleurenstelling.

Unificatie van CFSG

Veel stellingen die in de groepentheorie niet zonder meer bewezen konden worden, zijn nu bewezen dankzij de classificatie. Want de lijst van voorbeelden is uitputtend, zodat elke uitspraak over eindige enkelvoudige groepen op juistheid gecontroleerd kan worden door haar te verifiëren voor elke groep uit de lijst. De kracht van de stelling is dus dat het een abstract begrip als eindige enkelvoudige groep zeer concreet maakt.

Daar staat tegenover dat op dit moment de stelling weinig toepassingen buiten de groepentheorie heeft. Ik verwacht dat dat over vijftig jaar wel anders zal zijn en hoop het mee te maken.

Waardering van CFSG

Het onderzoek werd uitgevoerd door een relatief grote gemeenschap, geleid door een soort van generaal: Gorenstein. Hij was een groot wetenschapper, maar ook een groot leider.

Op de Santa Cruz-conferentie in 1979, waar ik bij was, werd door Gorenstein de op handen zijnde classificatie aangekondigd. Het nieuws had een enorm effect op de gemeenschap. Er was veel waardering voor die grote stelling die er aan zat te komen, en de gemeenschap was trots op wat er bereikt was. Maar er was ook ontreddering omdat voor velen hun dagelijkse werk, het bewijzen van deelresultaten voor die classificatie, uit handen leek geslagen. Sommigen besloten acuut naar een ander gebied van onderzoek te verhuizen. Anderen gingen gewoon door in de eindige-groepentheorie. Deze personen hadden gelijk in de zin dat de aankondiging van Gorenstein in 1979 achteraf wat voorbarig bleek. Tegenwoordig wordt het in 2005 verschenen werk van Aschbacher en Smith als de afronding van het bewijs gezien.

Er waren ook onderzoekers die hun heil zochten in meetkundig onderzoek dat de classificatie vanuit een ander gezichtspunt zou kunnen benaderen. Het was de ambitie van Jacques Tits en Francis Buekenhout de classificatie van de eindige enkelvoudige groepen zoveel mogelijk in meetkunde te vatten. Ook die activiteiten hebben bijgedragen aan de grote waardering voor het resultaat.

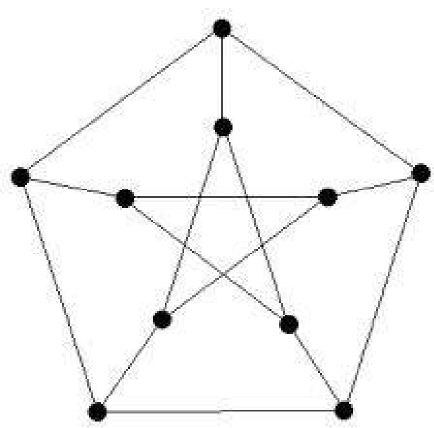
Meetkunde

Ik gaf al aan dat ik de recente geschiedenis van de classificatie van dichtbij heb meegemaakt.

Tijdens mijn mastersstudie in Utrecht volgde ik colleges over groepen bij Freudenthal en Strooker, en combinatoriek bij Klarner, die destijds in Eindhoven te gast was. Zij wezen me de weg naar de discrete wiskunde. Ik werd promovendus bij Springer en schreef een proefschrift over eindige complexe spiegelingsgroepen. Dit gaat over een uitbreiding van groepen van de gewone wereld van de reële getallen naar die van de complexe getallen.

Een paar jaar later, aan de Universiteit Twente, stortte ik me op nog complexere groepen en classificeerde ik de eindige spiegelingsgroepen in de wereld van de quaternion-getallen. Hierbij kwam een sporadische groep uit de classificatie naar voren. Seidel, de oprichter van de Faculteit Wiskunde en Informatica in Eindhoven, vertelde het nieuws aan de eerder genoemde Buekenhout. Na een seminar bij hem in Brussel om het verhaal te vertellen, leerde ik snel de gemeenschap kennen die aan de classificatie werkte. De Santa Cruz-conferentie van 1979 was een van de eerste gelegenheden daarvoor.

Van de classificatie fascineerde me het werk van Tits en Buekenhout het meest. Het 'van lokaal naar globaal'-principe uit de classificatie werd op verschillende manieren in meetkunde vertaald. In een daarvan wordt uit een groep een netwerk gemaakt waarin de knooppunten de involuties van de groep zijn en twee involuties verbonden worden als ze commuteren. In Figuur 12 ziet u een voorbeeld van een netwerk dat zo tot stand gekomen is, de zogenaamde Petersen-graaf.



Figuur 12

Het 'van lokaal naar globaal'-principe van de classificatie is ook naar deze netwerken te vertalen. Zo zijn bepaalde stukjes van de classificatie pure meetkunde geworden. Aan dit soort resultaten heb ik een bijdrage geleverd.

Computers

Naast deze fraaie meetkunde heb ik al vroeg gewerkt met computers. Van 1979 tot 1992 werkte ik in het Centrum voor Wiskunde en Informatica. Daar vroegen natuurkundigen me regelmatig bepaalde getallen uit te rekenen die met de eerder genoemde Lie-groepen te maken hebben. Om nieuwe vragen voor te zijn, schreef ik, met hulp van enkele collega's, het softwarepakket LiE, dat nog steeds in gebruik is.

Later op het CWI begon ik me te interesseren voor interactieve wiskundige documenten. In 1991 ging ik met collega's als Meertens en Pemberton aan de slag om een prototype daarvan te ontwerpen. Het bleek moeilijker dan we dachten. Een belangrijke oorzaak was de opkomst van het web, waardoor er steeds nieuwe technische mogelijkheden ontstonden, die ons tot herijking van de aanpak dwongen.

De inspanning heeft uiteindelijk geleid tot een *blended learning*-aanpak bij meer dan tien colleges aan deze universiteit, en tot het platform dat de firma SOWISO gebouwd heeft voor een zeer interactieve en soepele wijze van exact onderwijs.

Het web

Door deze activiteiten werd ik vanaf het begin met mijn neus gedrukt op het zich steeds verder ontwikkelende web. Zo heb ik de positieve inwerking gezien van het web op de wiskunde. Ik wil daarvan een aantal ervaringen met u delen aan de hand van de VROUW-criteria.

Volwassenheid dankzij het web

Volwassenheid bereik je door je werk zoveel mogelijk te toetsen aan dat van anderen. Maar in de grote hooiberg aan informatie is het niet altijd gemakkelijk de goede spelden te vinden. Op MathSciNet staan reviews van bijna alle wiskundige wetenschappelijke publicaties, compleet met allerlei online zoekmiddelen. Die mogelijkheid om relevante publicaties te vergaren voor eigen onderzoek, maakt nieuwe resultaten volwassener.

Ook wordt de voortgang van wiskunde nu beter geregistreerd dan ooit. Veel overwegingen en leerzame misstappen achter bewijzen staan voor iedereen zichtbaar op het web. Een belangrijke bijdrage in die registratie levert de website arXiv. Bijna iedereen kan er een artikel op plaatsen, waarbij de indieningsdatum geregistreerd wordt. Zo kunnen auteurs hun rechten (zoals prioriteit) zeker stellen.

Resistentie dankzij het web
Hoeveel overeenstemming er ook is over de correctheid van een bewijs, als er een stap is die je niet kan volgen, komt er weer twijfel naar boven. Had je dit gewoon in moeten zien, of heeft de auteur een misstap begaan? Deze twijfel is weg te nemen dankzij werk van onze eigen De Bruijn uit het eind van de jaren zestig. Zijn programma *AutoMath* is de eerste van een serie kleine overzichtelijke programma's, waarmee de verificatie van de correctheid van een bewijs volledig automatisch kan worden uitgevoerd. Daar is dan wel voor nodig dat het bewijs in groot detail en met veel precisie formeel is opgeschreven.

In 2005 heeft Gonthier een bewijs van de Vierkleurenstelling zodanig formeel opgeschreven dat het volledig automatisch door het computerprogramma COQ geverifieerd kon worden. In 2012 deed hij hetzelfde voor de grote stelling van Feit en Thompson over het bestaan van een involutie.

Hoe lang zal het nog duren voor alle wiskundigen zullen werken met een bewijsontwikkelomgeving, waarin formele bewijzen aan menselijke intuïtie gekoppeld worden? Kort geleden betoogde de Fieldsmedaillewinnaar Vladimir Voevodksy dat het gebruik ervan niet alleen gewenst maar zelfs noodzakelijk is. Veel collega's willen er niet aan denken. Toch verwacht ik dat over vijftig jaar iedere wiskundige op die manier wetenschappelijke publicaties zal voorbereiden.

Originaliteit dankzij het web
Hoe kun je een aansprekend wiskundig probleem vinden, je oriënteren op een oplossing, en laten inspireren door anderen? Daarvoor zijn sites als MathOverflow. Dit is een vraag-en-antwoord-kennisbank voor wiskundigen. Er is een ludiek systeem van bonuspunten aan verbonden voor goede antwoorden, en de begeleiding door experts is indrukwekkend.

Verder zijn er websites waarop zeer verrassende reacties op door jezelf gegeven informatie terug kunnen verschijnen. Een legendarisch voorbeeld is een website van Sloane, waar je een rij getallen kunt intypen om terug te krijgen welke bekende oneindige rijen zo beginnen.

Unificatie dankzij het web
Ik heb al gesproken over automatische bewijsverificatie, maar nog weinig over computeralgebra. Vrijwel alle denkbare wiskunde waaraan exact te rekenen valt, is in een computeralgebrapakket uit te voeren. Deze software, die in de jaren tachtig commercieel werd, heeft het mogelijk gemaakt op grote schaal wiskundig te experimenteren. Aan de pakketten GAP en Magma heb ik ook enkele bescheiden bijdragen geleverd.

Computeralgebrapakketten hebben allemaal hun eigenaardigheden, zoals afwijkende opvattingen over de meest eenvoudige vorm van een eindresultaat. Om de gebruiker de mogelijkheid te geven zich uit te drukken onafhankelijk van het te gebruiken pakket, heb ik meegewerkt aan de ontwikkeling van een wiskundig Esperanto, de taal *OpenMath*. Vanuit deze semantisch rijke taal zijn formules en opdrachten eenvoudig over te zetten naar willekeurig welk softwarepakket.

Waardering dankzij het web
De waardering voor een stelling kan groter worden als je zelf aan de totstandkoming van het bewijs meewerkt. In 2009 formuleerde Gowers op zijn blog een wiskundig probleem. Hij nodigde zijn lezers daarbij uit om zelfs de kleinst denkbare bijdragen aan een oplossing op zijn website aan te leveren. Dit experiment is het begin geworden van het Polymath project, dat een webgebaseerde samenwerkingsvorm is waarin iedereen aan het oplossen van een bepaald probleem kan bijdragen. Het lijkt te werken. Resultaten worden onder pseudoniem in gerespecteerde tijdschriften gepubliceerd, met verwijzing naar de Polymath-website.

Bijna alles wat ik over het web gezegd heb, geldt niet alleen voor onderzoek maar ook voor onderwijs. Ook daar is veel van terug te vinden op het web. De MOOCs zijn daarbij wel heel spraakmakend. In dat format bestaan online colleges over vele onderdelen van de wiskunde, waarin erg goede docenten optreden en prachtige animaties worden vertoond. Ze vormen een verrijking van het studiemateriaal voor iedereen die weet wat zelfstandig werken is.

Maar de online cursussen zijn geen volwaardige vervangers van het bestaande onderwijs. Het contact in twee richtingen tussen studenten en goede leermeesters ontbreekt nog. Een nieuwe trend, waarin MOOCs gekoppeld worden aan bereikbare docenten, gaat hier wat aan doen.

De gegeven voorbeelden laten zien hoe sterk het web helpt in het bedrijven van onderzoek en het volgen van onderwijs in de wiskunde. De wiskunde heeft veel bijgedragen aan de totstandkoming van het web, dat is bekend. Maar aan de hand van de VROUW-criteria heb ik betoogd dat het er ook veel voor terugkrijgt.

Dankwoord

De afgelopen 22 jaar heb ik aan de Technische Universiteit Eindhoven mogen werken. Dat heb ik als een voorrecht ervaren. Heel vaak als ik van het station naar de campus liep, deed ik een klein privé-onderzoekje. Was dit een campus waar ik met plezier naartoe liep? Een enkele keer spande het erom, en koesterde ik de gedachte aan een nieuwe onderneming. Maar het overgrote deel van al die loopjes werd ik vervuld van plezier vanwege de omgang met studenten en collega's, de vrijheid om eigen ideeën te verwezenlijken, en de vooruitgang die de universiteit heeft geboekt. Ik ben de TU/e daar zeer dankbaar voor.

Slot

Veel redes van dit soort beginnen met de klassieken. Deze eindigt er mee.

Euclides werd wel eens gevraagd waar zijn wiskunde nou eigenlijk goed voor was. Hij reageerde ooit met de woorden "Geef de vragensteller wat geld, want hij heeft er kennelijk niet genoeg aan zoiets moois te leren." Gelukkig kunnen we op de vraag naar het nut voor de maatschappij, tegenwoordig antwoorden dat achter dertig procent van het nationale inkomen, wiskunde zit.

Pythagoras introduceerde het woord mathematicus voor ingewijden in zijn elitaire school. Zij waren de enigen die volledig kennis mochten nemen van de wiskundige resultaten van die lokale school. Het web stelt je in staat als mathematicus te participeren in vele globale kringen.

Zelf ben ik natuurlijk van plan het web grotelijks te benutten bij mijn activititeiten vanachter de geraniums. Ik hoop dat u, met welke achtergrond dan ook, zult meegenieten van de verworvenheden van de Wiskunde in het web.

Figuur 6–9 zijn gemaakt door Wil Kortsmit met medewerking van Jan Willem Knopper. Figuur 10 en 11 zijn gemaakt door Jack van Wijk.