Rob Tijdeman
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
tijdeman@math.leidenuniv.nl

Onderzoek

Het *abc*-vermoeden

Het abc-vermoeden is uitgegroeid tot een belangrijk gereedschap in de theorie over Diophantische vergelijkingen. Het wordt gebruikt om na te gaan wat je aan resultaat kunt verwachten, ook al kun je het niet bewijzen. Enige tijd geleden kwam het vermoeden in het nieuws vanwege de claim van de Japanner Shinichi Mochizuki (in ruim 500 bladzijden) het vermoeden bewezen te hebben. Of dat zo is, is nog niet duidelijk. Dit artikel is een inleiding met aandacht voor de historische ontwikkeling en enkele toepassingen.

In 1981 bewees Stothers [20]:

Als $A[x], B[x], C[x] \in \mathbb{C}[x]$ polynomen zijn zonder gemeenschappelijk nulpunt, niet alle constant, zó dat $A(x) + B(x) = C(x)$, dan is

$$\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) < N_1(ABC)$$

waarbij $N_1(f)$ het aantal verschillende nulpunten van $f(x)$ is.

Kies bijvoorbeeld $A(x) = (x+1)^5, B(x) = -(x-1)^5, C(x) = 10x^4 + 20x^2 + 2$. Dan is het linkerlid 5 en volgt dat de vier nulpunten van $C(x)$ enkelvoudig zijn. Een ander gevolg van de stelling is dat voor alle n de veelterm $(x+1)^n - x^n$ van graad $n-1$ geen meervoudige nulpunten heeft.

De stelling was een hulpresultaat en bleef onopgemerkt tot Mason in 1984 het resultaat herontdekte en in zijn proefschrift publiceerde [10]. Ik verwijs naar de stelling als de *stelling van Stothers–Mason*. Een bewijs geef ik in de volgende paragraaf.

Sommige wiskundigen vroegen zich af of er een analogon voor gehele getallen zou zijn. Het voor de hand liggende analogon gaat niet op, want als a, b, c onderling ondeelbare positieve gehele getallen zijn met $a + b = c$, dan hoeft niet te gelden dat $c < N(abc)$ waarbij $N(abc)$ het product van de priemfactoren van abc is. Neem bijvoorbeeld $a = 49, b = 32, c = 81$. Dan is $c = 81, N = 42$.

Oesterlé vermoedde in 1985 dat *er een constante C is zodat als a, b, c onderling ondeelbare positieve gehele getallen zijn met $a + b = c$, dat dan $c < N(abc)^C$.*

Masser dacht dat C zelfs asymptotisch gelijk aan 1 zou kunnen zijn in de volgende zin:

Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaan slechts eindig veel onderling ondeelbare positieve gehele drietallen a, b, c met $a+b = c$ en $c > (N(abc))^{1+\varepsilon}$.

Dit staat nu bekend als *het abc-vermoeden* en is nog niet bewezen of weerlegd.

De Japanner Mochizuki [13] heeft meer dan twee jaar geleden op zijn homepage vier artikelen gepubliceerd. Hij beweert dat hij daarin het abc-vermoeden bewijst. Verschillende wiskundigen proberen het bewijs te begrijpen, maar de theorie is zo ingewikkeld dat nog niemand het heeft geverifieerd of weerlegd. Zoals we zullen zien heeft het abc-vermoeden op Diophantische vergelijkingen van drie termen ongeveer hetzelfde effect als kwantumcomputing op factorisatie van grote getallen. Een bewijs van het abc-vermoeden zou heel wat te weeg brengen. Het zijn dus spannende tijden.

Waarschuwing. Vergeet niet te eisen dat a, b, c onderling deelbaar zijn. Beschouw bijvoorbeeld de vergelijking $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ voor een willekeurig positief geheel getal k. Dan is $c = 2^k = (N(abc))^k$ en hierbij kan de exponent k willekeurig groot gemaakt worden.

Bewijs van de stelling van Stothers–Mason

We schrijven (f, g) voor de grootste gemene deler van de polynomen $f(x)$ and $g(x)$, $\deg(f)$ voor de graad van $f(x)$, en $N_1(f)$ voor het aantal verschillende nulpunten van $f(x)$. We geven een schets van het bewijs van de stelling van Stothers–Mason waarbij de lezer zelf de details kan invullen. We nemen in deze sectie de voorwaarden stilzwijgend aan. We beginnen met enkele lemma's. Het bewijzen van de eerste twee wordt aan de lezer overgelaten.

Lemma 1. *Als $f \in \mathbb{C}[x]$ een wortel x_0 van orde $k > 0$ heeft, dan is x_0 een wortel van f' van orde $k-1$.*

Lemma 2. $\deg((f, f')) = \deg(f) - N_1(f)$.

Lemma 3. $A'B - AB' = BC' - B'C \neq 0$.

Bewijs. Als B constant is, is A dat niet en is

$A'B - AB' \neq 0$. Als A en B niet constant zijn, volgt uit $A'B - AB' = 0$ dat B een deler is van B', een tegenspraak. Dus $A'B - AB' \neq 0$. ☐

Lemma 4. $(A, A') \times (B, B') \times (C, C') \mid (BC' - B'C)$.

Bewijsschets. Merk op dat (A, A') en (B, B') en (C, C') geen nulpunt gemeen hebben en elk nulpunt van het product deler is van $A'B - AB' = BC' - B'C$. Dus is $(A, A') \times (B, B') \times (C, C')$ een deler van $BC' - B'C$. ☐

Bewijs van de stelling van Stothers–Mason. Uit Lemma's 4 en 3 volgt

$$\begin{aligned}&\deg(A, A') + \deg(B, B') + \deg(C, C')\\ &\quad \le \deg(BC' - B'C) = \deg(BC) - 1.\end{aligned}$$

Door toepassing van Lemma 2 vinden we

$$\begin{aligned}&\deg(A) - N_1(A) + \deg(B) - N_1(B)\\ &\quad + \deg(C) - N_1(C)\\ &\quad < \deg(B) + \deg(C).\end{aligned}$$

Dus $\deg(A) < N_1(ABC)$. Vanwege de symmetrie in A, B, C volgt

$$\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) < N_1(ABC). \quad ☐$$

Het $abc2$-vermoeden

Veel mensen hebben onderzocht hoe groot de optimale constante in het vermoeden van Oesterlé zou moeten zijn. Laat a, b, c onderling ondeelbare positieve gehele getallen zijn met $a + b = c$. Schrijf $q = q(abc) = \log c / \log(N(abc))$. De huidige records zijn gegeven in Tabel 1, zie [14].

Genoemde waarden van a, b, c waren al vóór 1995 bekend. In 2000 waren dertien drietallen met $q > 1{,}5$ gevonden en sindsdien geen enkele meer. Ook heuristisch is er goede reden om aan te nemen dat er niet meer zijn. Het bovenstaande maakt aannemelijk dat in het vermoeden van Oesterlé $q = 1{,}63$ voldoet en dat dit nauwelijks te verbeteren is. Baker [1] heeft in 2004 een verscherping van het abc-vermoeden geformuleerd waaruit volgt dat $q = 1{,}75$ een correcte waarde in het vermoeden van Oesterlé zou moeten zijn. In feite vermoedt hij [1] dat voor alle onderling ondeelbare positieve gehele getallen a, b, c met $a + b = c$ geldt dat

$$c < \frac{6}{5} \frac{N(abc)(\log N(abc))^{\omega(abc)}}{(\omega(abc))}! \qquad (1)$$

waarbij $\omega(abc)$ het aantal priemdelers van abc is. Laten we een beetje voorzichtiger zijn:

Het $abc2$-vermoeden. *Er bestaan geen onderling ondeelbare positieve gehele getallen a, b, c met $a + b = c$ zó dat $c < (N(abc))^2$.*

Het ABC@home-project

In 2005 startte Bart de Smit een project om drietallen onderling ondeelbare positieve gehele getallen a, b, c te vergaren met $a + b = c$ en $c > N(abc)$. Zulke drietallen worden *ABC-drietallen* genoemd. Hij deed dit met een tweeledig doel, enerzijds om een grote groep mensen bij wiskundig onderzoek te betrekken, anderzijds om gebruik te maken van anders ongebruikte rekenkracht. Alle deelnemers kregen de software toegestuurd om een bepaald traject van drietallen a, b, c te onderzoeken zodat in totaal een groot gebied onderzocht werd. De resultaten tot nog toe zijn te vinden op [17] waar men zich ook nog kan aanmelden. Inmiddels zijn 23.827.716 ABC-drietallen gevonden.

Het begon volgens de statistieken op 31 augustus 2009 met 147.317 drietallen. Het grootste aantal dat op één dag gevonden werd was 822.036 en wel op 15 oktober 2010. Het vinden van nieuwe drietallen wordt steeds lastiger: op 12 februari 2014 werden 197 nieuwe ABC-drietallen in veertien dagen gerapporteerd. Het zoeken naar drietallen met $c < 10^{18}$ heeft in totaal 14.482.065 van die ABC-drietallen opgeleverd. Het streven is nu om alle ABC-drietallen met $c < 2^{63}$ te bepalen.

Interessant is natuurlijk ook om te zien welke kwaliteit q de gevonden ABC-drietallen hebben. Van de 14.482.065 gevonden drietallen met $c < 10^{18}, q > 1$ geldt voor 0,15 procent dat $c < 10^9$. De overeenkomstige cijfers zijn voor de drietallen met

$q > 1{,}05$,	2.352.105,	0,37%,
$q > 1{,}1$,	449.194,	0,82%,
$q > 1{,}2$,	24.013,	2,94%,
$q > 1{,}3$,	1.843,	7,81%,
$q > 1{,}4$,	160,	21,25%.

Het is duidelijk dat de ABC-drietallen met hoge kwaliteit steeds zeldzamer worden. In het onderzochte hogere segment van de c's groeit het aantal ABC-drietallen ruwweg exponentieel met q, maar het aantal drietallen met $q > 1{,}4$ groeit ongeveer lineair met q.

Vergelijkingen van Fermat, Catalan, Pillai

De laatste stelling van Fermat zegt dat er geen positieve gehele getallen $n > 2, x, y, z$ bestaan met $x^n + y^n = z^n$. Hier mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat x, y, z onderling ondeelbaar zijn. Nadat Faltings in 1983 bewezen had dat er voor elke $n > 2$ maar eindig veel onderling ondeelbare oplossingen x, y, z zijn, werd de stelling van Fermat in 1995 volledig door Wiles en Taylor bewezen [23].

Met het $abc2$-vermoeden wordt de Laatste Stelling van Fermat voor $n > 5$ een fluitje van een cent. Pas het $abc2$-vermoeden toe op $x^n + y^n = z^n$. We mogen aannemen dat de termen onderling ondeelbaar zijn, want anders delen we eerst de gemene deler uit. We krijgen $z^n < (xyz)^2 < z^6$. Dus $n \le 5$. (Het is al bijna 200 jaar bekend dat er voor $n \le 5$ geen oplossingen zijn.)

Het vermoeden van Catalan zegt dat 8 en 9 de enige opeenvolgende positieve gehele getallen zijn die beide een pure macht zijn, met andere woorden dat de enige oplossing van de vergelijking $x^m - y^n = 1$ met $m > 1, n > 1, x > 1, y > 1$ gegeven wordt door $(m, n, x, y) = (2, 3, 3, 2)$. Nadat Tijdeman in 1976 bewezen had dat er een (heel groot) getal is waarboven geen oplossingen voorkomen, werd het volledige vermoeden in 2004 door Mihailescu bevestigd [11].

$q = 1.6299$	$a = 2$, $b = 3^{10} \times 109$, $c = 23^5$	Reyssat
$q = 1.6260$	$a = 11^2$, $b = 3^2 \times 5^6 \times 7^3$, $c = 2^{21} \times 23$	De Weger
$q = 1.6235$	$a = 19 \times 1307$, $b = 7 \times 29^2 \times 31^8$, $c = 2^8 \times 3^{22} \times 5^4$	Browkin and Brzezinski
$q = 1.5808$	$a = 283$, $b = 5^{11} \times 13^2$, $c = 2^8 \times 3^8 \times 17^3$	Browkin and Brzezinski, Nitaj
$q = 1.5679$	$a = 1$, $b = 2 \times 3^7$, $c = 5^4 \times 7$	De Weger

Tabel 1 De huidige records van de optimale constante q.

Ook de oplossing van de vergelijking van Catalan wordt eenvoudig, als we het $abc2$-vermoeden aannemen. Uit $x^m - y^n = 1$ volgt dan dat $x^m < (xy)^2 < (x^m)^{2(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})}$. Dus is $1 < 2(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})$. De ongelijkheid $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ geldt alleen als $\min(m, n) \le 3$. Maar het is sinds 1964 bekend dat er voor deze waarden geen oplossingen zijn.

Een vergelijking waarvan de vergelijkingen van Fermat en Catalan speciale gevallen zijn werd in 1945 door Pillai bestudeerd:

$$x^m + y^n = z^k$$

in onderlinge ondeelbare gehele getallen $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$ met $m > 1$, $n > 1$, $k > 1$. Beukers [2] en Edwards [5] bewezen dat voor elk drietal m, n, k met $1/m + 1/n + 1/k > 1$ er oneindig veel oplossingen zijn die tot eindig veel parameterklassen zijn terug te brengen. Dat betreft de exponenten $(2, 2, *)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ en $(2, 3, 5)$. Het is bekend dat er geen oplossing is voor drietallen m, n, k met $1/m+1/n+1/k = 1$, dat wil zeggen voor exponenten $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$. Darmon en Granville [4] bewezen in 1995 dat er voor elk drietal m, n, k met $1/m + 1/n + 1/k < 1$ maar eindig veel oplossingen x, y, z zijn. De methode is ineffectief, dat wil zeggen dat ze het niet mogelijk maakt voor vaste m, n, k de oplossingen daadwerkelijk te bepalen. Tot 1993 waren de volgende oplossingen van de vergelijking van Pillai bekend:

$$1^m + 2^3 = 3^2,$$

$$2^5 + 7^2 = 3^4,$$

$$13^2 + 7^3 = 2^9,$$

$$2^7 + 17^3 = 71^2,$$

$$3^5 + 11^4 = 122^2.$$

Bij de voorbereiding van de Fermatdag in Utrecht in november 1993 vonden Beukers en Zagier tot ieders verrassing nog vijf grote oplossingen:

$$33^8 + 1549034^2 = 15613^3,$$

$$1414^3 + 2213459^2 = 65^7,$$

$$9262^3 + 15312283^2 = 113^7,$$

$$17^7 + 76271^3 = 21063928^2,$$

$$43^8 + 96222^3 = 30042907^2.$$

Sindsdien heeft niemand meer een oplossing gevonden. Merk op dat er in alle tien gelijkheden een kwadraat voorkomt. Dit leidde mij ertoe om tijdens die Fermatdag het volgende vermoeden uit te spreken:

De vergelijking $x^m + y^n = z^k$ heeft geen oplossingen $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$ met $m > 2$, $n > 2$, $k > 2$ en x, y, z onderling ondeelbaar.

Dit is een generalisatie van zowel de Laatste Stelling van Fermat als de Vergelijking van Catalan. De bankier Beal heeft een geldbedrag uitgeloofd voor de oplossing van dit vermoeden en daarom staat dit vermoeden wel bekend als het Beal-vermoeden en ook als het vermoeden van Tijdeman–Zagier.

Wat zegt het abc-vermoeden over de vergelijking van Pillai? Het is een leuke opgave, ook voor een klas leerlingen, om te bewijzen dat uit $1/m + 1/n + 1/k < 1$ volgt dat $1/m + 1/n + 1/k \le 1 - 1/42$. Passen we het abc-vermoeden met $\varepsilon = 0{,}01$ toe, dan volgt dat $z^k < (xyz)^{1{,}01}$ met slechts eindig veel uitzonderingen. Dus bestaat een constante $C > 1$ zo dat $z^k < C(xyz)^{1{,}01}$ voor alle toegelaten zestallen k, m, n, x, y, z. Omdat $x < z^{k/m}$ en $y < z^{l/m}$, volgt dat voor alle k, m, n met $1/m + 1/n + 1/k < 1$ geldt

$$\begin{aligned} z^k &< Cz^{1{,}01k(1/m+1/n+1/k)} \\ &\le Cz^{1{,}01k(1-1/42)} \\ &< Cz^{0{,}99k}. \end{aligned}$$

Dat impliceert $z^k < C^{100}$. Maar dan zijn ook x^m en y^n kleiner dan C^{100}. Als het abc-vermoeden waar is, heeft de vergelijking van Pillai dus maar eindig veel toegelaten oplossingen m, n, k, x, y, z *in totaal*. Waarschijnlijk zijn bovenstaande tien oplossingen de enige met $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$, $m > 1$, $n > 1$, $k > 1$ en x, y, z onderling ondeelbaar en $1/m + 1/n + 1/k < 1$.

Ik ga in het vervolg nog op een meer recente toepassing in. Er zijn echter nog vele andere toepassingen gepubliceerd. Voor een lijst van zulke toepassingen verwijs ik naar [14].

Kwadraatvrije deel van blok getallen

Het *kwadraatvrije deel* van een positief getal n is het kleinste getal a zodat n/a een kwadraat is. We schrijven $a = Q(n)$. Dus $Q(12) = 3$ en $Q(600) = 6$.

Een blok getallen is een rij opeenvolgende natuurlijke getallen. Onder het kwadraatvrije deel van een blok getallen verstaan we gemakshalve het kwadraatvrije deel van het product van die rij opeenvolgende getallen. Het begrip speelt een rol bij een nog onopgelost probleem van Erdős [8], namelijk of het product van twee blokken getallen een kwadraat kan zijn. Dat is equivalent met de vraag of twee blokken hetzelfde kwadraatvrije deel kunnen hebben. Het probleem van Erdős ligt in het verlengde van het resultaat dat een enkel blok opeenvolgende getallen geen kwadraat als product kan hebben, in 1939 onafhankelijk van elkaar bewezen door Erdős [7] en Rigge [15].

Als je een blok van twee getallen beschouwt, kan het kwadraatvrije deel zo klein zijn als 2. Neem bijvoorbeeld 8 en 9. Het komt zelfs oneindig vaak voor: Als $Q((n-1)n) = 2$, dan is n een kwadraat en $n - 1$ twee keer een kwadraat of andersom. Welnu, de Pell-vergelijkingen $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ hebben elk oneindig veel oplossingen. (Start met $(x_1, y_1) = (3, 2)$ en definieer inductief $x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$, $y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ voor $n = 2, 3, \ldots$.) Zo vinden we de blokken $(49, 50), (288, 289), (1681, 1682), \ldots$ met kwadraatvrij deel 2.

Wat weten we van het kwadraatvrije deel van een blok van drie getallen, zeg $n-1, n, n+1$? Weinig. Nog niet eens dat het groter is dan $\log n$. Het abc-vermoeden geeft wel een mooie ondergrens.

Stel $n - 1 = by^2, n = ax^2, n + 1 = cz^2$ met a, b, c kwadraatvrij (dat wil zeggen niet deelbaar door een kwadraat > 1). Dan is

$$a^2x^4 - bcy^2z^2 = n^2 - (n^2 - 1) = 1.$$

Het abc-vermoeden impliceert dat, voor $\varepsilon > 0$ en bijbehorende C,

$$(abc)^{2/3}(xyz)^{4/3} < a^2x^4 < C(abcxyz)^{1+\varepsilon}.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} C(abc)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon} &> (abc)^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\varepsilon}(xyz)^{\frac{1}{3}-\varepsilon} \\ &= (n(n-1)(n+1))^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dus is $abc > C^{-3}n^{1-4\varepsilon}$ voor voldoend grote n. Door voor het paar $(n, n+1)$ twee getallen te kiezen waarvan het product een kwadraatvrij deel 2 heeft, zien we in dat het kwadraatvrije deel van abc oneindig vaak kleiner dan $2n$ is. Het abc-vermoeden geeft dus de op $\varepsilon > 0$ na best mogelijke exponent van n, namelijk 1.

Wat weten we over het abc-vermoeden?

Nog voordat het abc-vermoeden zijn naam gekregen had, bewezen Stewart en Tijdeman

[18] de volgende twee stellingen. We schrijven in het vervolg N voor $N(abc)$.

Stelling 1. *Alle onderling ondeelbare positieve gehele getallen a, b, c met $a + b = c$ voldoen aan*

$$\log c < CN^{15}, \tag{2}$$

waarbij C een uit te rekenen constante is.

Stelling 2. *Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaan er oneindig veel onderling ondeelbare positieve gehele drietallen a, b, c met $a + b = c$ en*

$$c > N \exp\left((4 - \varepsilon)\frac{\sqrt{\log N}}{\log\log N}\right). \tag{3}$$

Sindsdien zijn alleen de constantes in de exponenten verbeterd. Stewart and Yu [19] hebben het rechterlid van (1) verbeterd tot $CN^{1/3}(\log N)^3$. Frankenhuysen [9] heeft de constante 4 in (3) verbeterd tot een constante tussen 6 and 7. Er zit een orde verschil tussen de bovengrens (2) en de ondergrens (3). Vermoed wordt dat (3) heel dicht bij de asymptotisch juiste grens zit. Schatting (2) berust namelijk op een ongelijkheid uit de theorie van lineaire vormen in logaritmen van algebraïsche getallen waarvan vermoed wordt dat deze een orde van grootte te zwak is. Baker [1] heeft een vermoede scherpe schatting voor lineaire vormen in logaritmen geïntroduceerd en laat zien dat deze equivalent is met zijn vermoede schatting (1) voor het abc-vermoeden.

Een recent artikel van Robert, Stewart and Tenenbaum [16] bevat een heuristisch argument dat de juiste orde gegeven wordt door

$$N \exp\left(4\sqrt{3}\sqrt{\frac{\log N}{\log\log N}}\right).$$

Zij geven daarbij een hoofdterm, een tweede-orde-term en een restterm. De groei van $\exp(\sqrt{\log N})$ is te traag om numerieke evidentie voor deze formule te vinden. Maar de eerdere numerieke resultaten ondersteunen anders dan de heuristiek op overtuigende wijze dat het abc-vermoeden waar is. Dit is uitgewerkt in Baker [1] en heeft ook geleid tot de keuze van de constante 6/5 in (1).

Meer over abc

Wie meer over het abc-vermoeden zelf wil lezen, wordt verwezen naar [12], [14] en [22]. Er bestaan generalisaties van de stelling van Stothers–Mason en het abc-vermoeden in verschillende richtingen. Voor generalisaties van de stelling van Stothers–Mason voor meer dan drie variabelen verwijs ik naar [3] en [21]. Voor generalisaties van het abc-vermoeden, consequenties, numerieke resultaten en referenties naar verwante resultaten, zie [6], [14] en verwijzingen daar.

Referenties

1 A. Baker, Experiments on the abc-conjecture, *Publ. Math. Debrecen* 65 (2004), 253–260.

2 F. Beukers, The Diophantine equation $Ax^p + By^q = Cz^r$, *Duke Math. J.* 91 (1988), 61–88.

3 P. Corvaja en U. Zannier, An $abcd$ theorem over function fields and applications, *Bull. Soc. Math. France* 139 (2011), 437–454.

4 H. Darmon en A. Granville, On the equation $z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$, *Bull. London Math. Soc.* 27 (1995), 513–543.

5 J. Edwards, A complete solution to $X^2+Y^3+Z^5$, *J. Reine Angew. Math.* 571 (2004), 213–236.

6 N.D. Elkies, The ABC's of number theory, *The Harvard College Mathematics Review* 1(1) (2007), 57–76.

7 P. Erdős, Notes on the products of consecutive integers, I and II, *J. London Math. Soc.* 14 (1939), 194–198 en 245–249.

8 P. Erdős en R.L. Graham, On products of factorials, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* 4 (1976), 337–355. Zie ook: *Old and new problems and results in combinatorial number theory*, Monograph Enseign. Math. 28, Geneva, 1980.

9 M. van Frankenhuijsen, A lower bound in the ABC conjecture, *J. Number Th.* 82 (2000), 91–95.

10 R.C. Mason, *Diophantine Equations over Function Fields*, LMS LNS 96, Cambridge Univ. Press, 1984.

11 P. Mihăilescu, Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, *J. Reine Angew. Math.* 572 (2004), 167–195.

12 P. Mihăilescu, Around ABC, *EMS Newsletter* September 2014, 29–34, http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2013-09-89.pdf.

13 S. Mochizuki, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/Inter-universal%20Teichmuller%20Theory%20IV.pdf.

14 A. Nitaj, www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html

15 O. Rigge, Ueber ein diophantisches Problem, *9th Congress Math. Scand.*, pp. 155–160.

16 O. Robert, C.L. Stewart en G. Ténenbaum, A refinement of the abc conjecture, *Bull. London Math. Soc.* 46 (2014), 1156–1166.

17 B. de Smit, http://www.abcathome.com/data.

18 C.L. Stewart, R. Tijdeman, On the Oesterlé-Masser conjecture, *Monatsh. Math.* 102 (1986), 251–257.

19 C.L. Stewart en K.R. Yu, On the abc-conjecture II, *Duke Math. J.* 108 (2001), 169–181.

20 W.W. Stothers, Polynomial identities and Hauptmoduln, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 32 (1981), 349–370.

21 L.N. Vaserstein en E.R. Wheland, Vanishing polynomial sums, *Comm. Algebra* 31 (2003), 751–772.

22 M. Waldschmidt, On the abc-conjecture and some of its consequences, https://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/abcLahore2013VI.pdf.

23 A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, *Ann. Math. (2)* 141 (1995), 443–551.