Jan Turk
Den Haag

Artikelbespreking Micheal Rubinstein en Peter Sarnak, Chebyshev's bias

Subtiel scheve verdeling van priemgetallen in rekenkundige rijen met gegeven reden

In januari ontving de redactie deze artikelbespreking van Jan Turk. In het begeleidende bericht schrijft hij: "Voor eigen gebruik heb ik een bijzonder artikel van Peter Sarnak bestudeerd. Het artikel is weliswaar uit 1994, maar Sarnak heeft in 2014 de Wolf-prijs gekregen, ik kan me voorstellen mede vanwege dit artikel." Helaas heeft Jan de publicatie van dit stuk niet meer mee mogen maken. Hij overleed op 26 maart 2015. Een In Memoriam is te vinden op de pagina hiervoor.

Het aantal priemgetallen ten hoogste $x \geq 2$ dat 1 plus een veelvoud van 4 is, wordt genoteerd met $\pi_{4;1}(x)$, evenzo $\pi_{4;3}(x)$ en algemener $\pi_{q;a}(x)$ voor veelvouden van q plus a met $\mathrm{ggd}(a,q) = 1$. Voor vaste q zijn er $\phi(q)$ van zulke a's met $1 \leq a \leq q$, waarbij ϕ de bekende functie van de Zwitser Euler is. We nemen $q \geq 3$. Het is duidelijk dat $\phi(q) = 2$ voor $q \in \{3,4,6\}$ en $\phi(q) \geq 4$ voor $q \notin \{1,2,3,4,6\}$. Een getal a met $0 < a < q$ heet *kwadraatrest* als de congruentie $x^2 \equiv a \pmod q$ een oplossing heeft, notatie $a \in R$, en anders een *niet-kwadraatrest*, notatie $a \in N$. Voor $q = 4, p^v, 2p^v$ met p oneven en v een natuurlijk getal zijn er evenveel kwadraatresten als niet-kwadraatresten.

De Duitser Dirichlet bewees in 1837 dat $\pi_{q;a_1}(x)$ en $\pi_{q;a_2}(x)$ beide naar oneindig gaan als x naar oneindig gaat en dat hun quotiënt dan naar 1 gaat. De Fransman Hadamard en de Belg de la Vallée Poussin preciseerden dit aan het eind van de negentiende eeuw tot de *priemgetalstelling voor rekenkundige rijen*

$$\pi_{q;a}(x) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\ln x}.$$

De Duitser Riemann stelde in de negentiende eeuw formules op voor $\pi_{q;a}(x)$ in termen van complexe nulpunten van Dirichlet-functies. Latere wiskundigen formuleerden de *Gegeneraliseerde Riemann Hypothese* (GRH), en de Hongaarse Amerikaan Wintner, de Brit Hooley en de Amerikaan Montgomery formuleerden de *Grand Simplicity Hypothesis* (GSH) over die nulpunten van Dirichlet-functies.

De Rus Chebyshev maakte in 1853 de observatie dat $\pi_{4;3}(x)$ groter is dan $\pi_{4;1}(x)$ voor alle $x \geq 3$ waarvoor hij het berekende. Wat is de betekenis van Chebyshevs observatie?

De Engelsman Littlewood bewees in 1914 dat $P_{4;3,1} := \{n \in \mathbb{N} \mid \pi_{4;3}(n) < \pi_{4;1}(n)\}$ niet leeg is, zelfs oneindig is, en $P_{4;3,1} = \{n \in \mathbb{N} \mid \pi_{4;3}(n) > \pi_{4;1}(n)\}$ evenzo. De Engelsman Leech berekende in 1957 dat 26861 het kleinste getal in $P_{4;3,1}$ is. Chebyshev was niet tot 26861 gekomen is de nuchtere conclusie na dit resultaat van Leech.

Bij de verdere bestudering wordt gebruik gemaakt van dichtheden. De *natuurlijke dichtheid* van een verzameling V van reële getallen groter dan 1 is gedefinieerd als

$$\mathrm{d}(V) = \lim_{n\to\infty} X^{-1} \int_2^X \chi_V(t)\,\mathrm{d}t,$$

als de limiet bestaat. De *logaritmische dichtheid* $\delta(V)$ is gedefinieerd als

$$\delta(V) = \lim_{X\to\infty} (\ln X)^{-1} \int_2^X \chi_V(t)\,\mathrm{d}(\ln t),$$

als de limiet bestaat. Hier is $\chi_V(t)$ de karakteristieke functie van V met waarde 1 als $t \in V$ en waarde 0 als $t \notin V$.

Wintner, die met de kosmopolitische Hongaar Erdős en de Poolse Amerikaan Kac aan de wieg van de probabilistische getaltheorie stond, had al in 1941 laten zien dat $P_{4;1,3}$ en $P_{4;3,1}$ geen natuurlijke dichtheid hebben, maar dat je met de logaritmische dichtheid wel een maat kunt geven. De Zuid-Afrikaanse Amerikaan Peter Sarnak en de Amerikaanse Michael Rubinstein berekenden in 1994 dat $\delta(P_{4;3,1}) \doteq 0{,}9959$ en $\delta(P_{4;1,3}) \doteq 0{,}0041$ [1]. Inderdaad een erg scheve verdeling in deze maat. Het geeft een andere betekenis aan Chebyshevs observatie. Rubinstein en Sarnak introduceerden de term *Chebyshev-bias* in hun artikel van 1994 en bewezen enkele prachtige stellingen, onder aanname van GRH en GSH, over de logaritmische dichtheden $\delta(P_{q:a_1,a_2,\dots,a_r})$ van priemgetallen in r verschillende rekenkundige rijen a_i (mod q), $i = 1,\dots,r$ met reden q, waar $2 \le r \le \phi(q)$. Hier is

$$P_{q:a_1,a_2\dots,a_r} = \Big\{x \in \mathbb{N}, x \ge 2 \mid \pi_{q;a_1}(x) < \pi_{q;a_2}(x) < \cdots < \pi_{q;a_r}(x)\Big\}.$$

Gegeven $a_1,\dots,a_r$, zijn er natuurlijk $r!$ van zulke verzamelingen natuurlijke getallen.

Mijn selectie van hun stellingen voor deze bespreking is de volgende:

1. $\delta(P_{7;1,2,4}) = \frac{1}{6}$ en evenzo voor de andere vijf permutaties van $1,2,4$. Met andere woorden, in de drie rekenkundige rijen $1,2,4$ (mod 7) is er geen Chebyshev-bias. Ook niet in de andere drie, $3,5,6$ (mod 7). Wel is er sterke Chebyshev-bias van $3,5,6$ (mod 7) ten opzichte van $1,2,4$ (mod 7): $\delta(P_{7;3,5,6,1,2,4}) \doteq 0{,}9782$, $\delta(P_{7;1,2,4,3,5,6}) \doteq 0{,}0217$.
2. Er is geen Chebyshev-bias in drie rekenkundige rijen met reden q als ze de machten zijn van ρ met $\rho^3 \equiv 1$ (mod q), $\rho \ne 1$, zoals bij $q = 7, \rho = 2$ want $2^3 \equiv 1$ (mod 7). Zulke trio's zijn er bijvoorbeeld voor elke q die priem en 1 plus een veelvoud van 3 is, een leuke echo van ons onderwerp.
3. Er is geen Chebyshev-bias in twee rekenkundige rijen a_1 (mod q) en a_2 (mod q) als het aantal oplossingen van $X^2 \equiv a_1$ (mod q) gelijk is aan het aantal oplossingen van $X^2 \equiv a_2$ (mod q). Zulke paren zijn er voor alle $q \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3,4,6\}$. Bijvoorbeeld geldt:

$$\begin{aligned}\delta(P_{5;1,4}) &= \delta(P_{5;4,1}) = \delta(P_{5;2,3})\\ &= \delta(P_{5;3,2}) = \tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(P_{8;3,5}) &= \delta(P_{8;5,3}) = \delta(P_{8;3,7})\\ &= \delta(P_{8;7,3}) = \delta(P_{8;5,7})\\ &= \delta(P_{8;7,5}) = \tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(P_{10;1,9}) &= \delta(P_{10;9,1}) = \delta(P_{10;3,7})\\ &= \delta(P_{10;7,3}) = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Peter Sarnak in januari 2014 op een conferentie over getaltheorie die ter ere van hem gehouden werd aan de universiteit van Shandong in China.

Foto: School of Mathematics, Shandong University

4. Afgezien van bovenstaande (oneindig vele) gevallen van rekenkundige rijen zonder Chebyshev-bias is er altijd Chebyshev-bias in r rekenkundige rijen met reden q. Bijvoorbeeld $\delta(P_{3;2,1}) \doteq 0{,}9990$ en $\delta(P_{3;1,2}) \doteq 0{,}0010$. Dit is overigens de maximale Chebyshev-bias in rekenkundige rijen. Er is altijd Chebyshev-bias als $r = \phi(q)$ met $q \notin \{1,2,3,4,6\}$, want dan is $r \ge 4$.
5. Er is Chebyshev-bias naar de niet-kwadraatresten N (mod q) ten opzichte van de kwadraatresten R (mod q) voor alle $q = 4, p^v, 2p^v$ met p oneven priem en v natuurlijk. Het maakt niet uit hoe de N en R daarbij onderling geordend zijn, zie punt 3. Bijvoorbeeld geldt voor $q = 10$ dat $\delta(P_{10;3,7,1,9}) = \delta(P_{10;7,3,1,9}) > \frac{1}{2}$.
6. De Chebyshev-bias naar niet-kwadraatresten wordt willekeurig klein als q naar oneindig gaat: $\delta(P_{q;N,R}) \to \frac{1}{2}$, $\delta(P_{q;R,N}) \to \frac{1}{2}$ als $q \to \infty$.
7. De Chebyshev-bias wordt willekeurig klein als q naar oneindig gaat: voor elke $r \ge 2$ en alle $a_1,\dots,a_r$ convergeert $\delta(P_{q;a_1,\dots,a_r})$ naar $\frac{1}{r!}$ als $q \to \infty$.

In het artikel staat nog een mooi resultaat dat niet over Chebyshev-bias gaat. In 1941 had Wintner al bewezen, onder aanname van GRH, dat de logaritmische dichtheid $\delta(P_1)$ bestaat, waarbij

$$P_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \pi(n) > \mathrm{Li}(n)\}$$

met

$$\mathrm{Li}(n) = \int_2^n \frac{dx}{\ln x}$$

de eerste term in de formule van Riemann voor $\pi(n)$ is. Littlewood bewees in 1914 dat P_1 oneindig groot is. De Zuid-Afrikaan Skewes berekende in 1933 een hoge bovengrens voor het kleinste getal in P_1 onder aanname van GRH, en in 1955 een nog hogere zonder aanname van een hypothese. De Nederlander Herman te Riele bewees in 1986 dat de bovengrens ten hoogste 10^{370} is. De Sloveen Kotnik toonde in 2008 aan dat de bovengrens ten minste 10^{14} is. De berekening van de logaritmische dichtheid van P_1,

$$\delta(P_1) \doteq 0{,}00000026$$

door Rubinstein en Sarnak is spectaculair te noemen.

Lees het artikel, het bevat meer moois, waaronder bewijzen. Het is prachtig geschreven. In 2014 is de prestigieuze Wolf-prijs toegekend aan Peter Sarnak.

Referentie

1 Micheal Rubinstein en Peter Sarnak, Chebyshev's bias, *J. Experimental Math.* 3 (1994), 173–197.