

Jan Guichelaar

Amsterdam

j.guichelaar4@gmail.com

Boekbespreking Henk Broer: Hemelverschijnselen nabij de horizon

Optische verschijnselen in de atmosfeer

Henk Broer analyseert in zijn boek een aantal optische verschijnselen, zoals asfaltspiegelingen, fata morgana's en blinde stroken in de ondergaande zon. Hij heeft zich daarbij laten inspireren door *De natuurkunde van 't vrije veld, deel I: Licht en kleur in het landschap* van Marcel Minnaert. Jan Guichelaar, theoretisch fysicus en redacteur van *Pythagoras*, bespreekt het boek.

De Epsilon-serie is in de tachtiger jaren van de vorige eeuw gestart door de Utrechtse hoogleraar wiskunde Ferdinand Verhulst, naar het voorbeeld van de Franse serie *Que sais-je?*, die inmiddels duizenden boekjes bevat over een breed veld van wetenschappelijke onderwerpen en uitgegeven wordt door de Franse universitaire uitgeverij.

Henk W. Broer is hoogleraar dynamische systemen aan de faculteit van wiskunde en natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen (RUG) en heeft in de afgelopen jaren al enkele boeken geschreven in de Epsilon-serie. Hij heeft zich laten inspireren door Minnaerts *De natuurkunde van 't vrije veld, deel I: Licht en kleur in het landschap*. Marcel Minnaert, geboren in het Vlaamse Brugge, was van oorsprong bioloog. Na de Eerste Wereldoorlog vestigde hij zich in Nederland en werd astronoom. Zijn driedelige *De natuurkunde van 't vrije veld* van rond 1940 is een *Fundgrube* voor iedereen die zich verbaast over de dagelijkse verschijnselen in de natuur om zich heen en deze verschijnselen wil begrijpen.

In deze Epsilon-uitgave heeft Broer zich ten doel gesteld een aantal optische verschijnselen in de dampkring te analyseren en deze van een mathematisch-fysisch fundament te voorzien. In deze verschijnselen spelen temperatuurinversie en spiegelingen een voornaam rol. In het bijzonder wordt de zogeheten 'blinde strook' over de zon, die soms vlak

voor zonsondergang waargenomen kan worden, volledig verklaard. Bij deze analyses volgt Broer de historische ontwikkeling van de zich steeds verdiepende kennis over deze optische onderwerpen. Juist ook de wetenschapshistorische inkijkjes maken het boek bijzonder.

De analyses worden gegeven op meerdere wiskundige niveaus. In de eerste plaats op basis van de klassieke geometrische optica met behulp van de kaatsingswet van Hero van Alexandrië en de brekingswet van Snellius. Vervolgens wordt de analyse voortgezet op basis van het Principe van Fermat over paden van de kortste tijd. Hero introduceerde trouwens al het idee van de kortste weg. En uiteindelijk brengt Broer de analyse op het niveau van de variatierekening en de vergelijkingen van Euler-Lagrange en Hamilton-Jacobi.

Als gerelateerd probleem komt de brachistochoon, de baan van een over een gebogen metalen draad wrijvingsloos glijdende kraal met kortste glijtijd, aan de orde, die het Principe van Fermat in een mechanisch probleem toepast. De baan krijgt de vorm van een cycloïde. Een volgende stap is de isochroon, het heen en weer glijden van de kraal rond het laagste punt van de cycloïde met trillingstijd onafhankelijk van de uitwijking. Zo belandt Broer ook bij het door Huygens geconstrueerde slingeruurwerk met cycloïdaal gevormde wangen naast het ophangpunt van de slinger, die het gewicht in een cycloïde dwingen

en dus een constante amplitude onafhankelijk van de trillingstijd voor het uurwerk creëren. Huygens' bedoeling om hiermee de geografische lengte van schepen op zee te kunnen bepalen lukte niet vanwege de al te grote storingen op de slinger door stampen en rollen van het schip. Uiteindelijk werd dat probleem pas in de achttiende eeuw opgelost door klokkenmaker John Harrison, wiens levenslange strijd voor erkenning tegen de gevestigde Engelse astronomenkliek prachtig beschreven is in de biografie *Longitude* van Dava Sobel, opgenomen in Broers uitgebreide bibliografie. Zijn eerste klokken staan onder meer in het Londense Clockmaker's Museum.

In hoofdstuk 1, 'Inleiding en samenvatting', geeft Broer een overzicht van de rest van het boek dat uit twee delen bestaat: 'Deel I: Meetkunde van lichtstralen in de atmosfeer' en 'Deel II: Lichtstralen als geodeten'.

Een belangrijk verschijnsel waarop voortgelopen wordt is het ontstaan van een zogeheten Wegener-sector als gevolg van temperatuurinversie in een luchtlaag op zekere hoogte. Aan de grens kan bovenspiegeling optreden. Lichtstralen vanaf de zon die binnen deze sector binnenvallen kunnen het oog van de waarnemer niet bereiken, hetgeen aanleiding geeft tot een blinde strook of blinde zone, die een deel van de ondergaande zon aan het zicht onttrekt. Een belangrijk doel van het boek is ook de vervlechting van natuurkunde en wiskunde duidelijk te maken. Het zal in het algemeen niet goed mogelijk zijn om het brekingsindexprofiel ($n = n(y)$) in het geval van een platte aarde, met y de afstand boven de aarde, of $n = n(r)$ bij een ronde aarde, met r de afstand tot het middel-

punt van de aarde) te meten en dan van daaruit de verschijnselen te verklaren. Vaak zal het zo zijn dat uit de waarnemingen een bijpassend brekingsindexprofiel afgeleid moet worden, een invers probleem dus.

Meetkunde van lichtstralen in de atmosfeer

Deel I start met hoofdstuk 2 'Geometrische optica'. Kaatsings- en brekingswetten worden afgeleid uit het zwakke Principe van Fermat (tijd waarin een lichtstraal van A naar B gaat is een extremum). Voor de platte en de ronde aarde leidt dat tot de behouden grootheden $S = n(y)\sin\alpha$ en $C = rn(r)\sin\alpha$ (met α de hoek van inval of de inclinatie van de lichtstraal), waarbij zowel het geval van meerdere homogene lagen, waarbij n op elke grens verspringt, als het limietgeval van continue brekingsindexprofielen $n(y)$ en $n(r)$ doorge-rekend worden. De grootheden S en C liggen vast door het punt waar en de richting waarin de lichtstraal als eerste invalt. De door te rekenen integraal om de baan van de lichtstraal te vinden, is meestal niet in elementaire functies uit te drukken. In het Scholium komen twee wel-integreerbare brekingsindexprofielen aan de orde. In de eerste plaats dat voor het mechanische model om de brachistochroon te vinden. Behoud van mechanische energie ($\frac{1}{2} \cdot v^2 + gy = 0$) geeft $n(y) = 1/v(y) = 1/\sqrt{-2gy}$. Het probleem wordt in extenso uitgewerkt in hoofdstuk 4. In de tweede plaats het bijzondere brekingsindexprofiel $n(y) = 1/y$, dat lichtstralen levert die een cirkelvormige baan beschrijven.

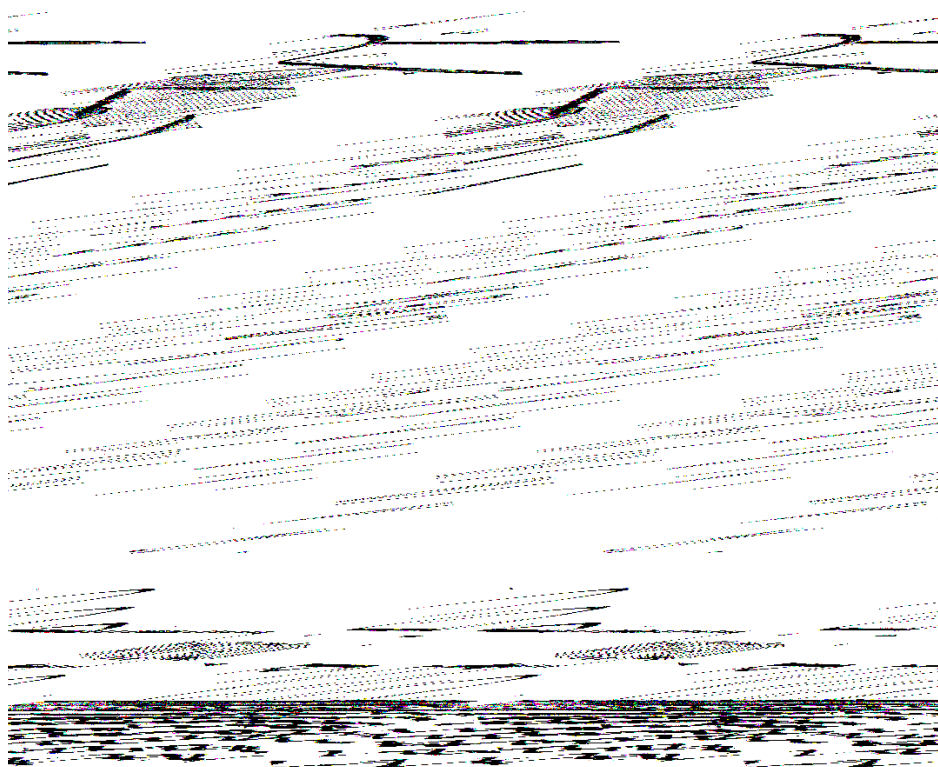
Hoofdstuk 3, 'Atmosferische optica', analyseert in detail de verklaring van een aantal optische verschijnselen aan de horizon: blinde stroken of zones, fata morgana's, en de groene flits bij zonsondergang. Het is het kernhoofdstuk van het boek. De analyse wordt gedaan aan een vereenvoudigd model van de aarde met twee concentrische lagen, met een temperatuurinversie op hoogte H . De Wegener-sector (Alfred Wegener, 1880–1930, bekend vanwege de theorie der verschuiving van de continenten) speelt een centrale rol. De waarnemer ontvangt binnen een deel van zijn zichtveld slechts lichtstralen die via onder spiegeling aan de warmtelaag zijn oog bereiken. Daarbuiten ontvangt de waarnemer lichtstralen die vanuit de warmtelaag boven komen, dat kunnen stralen zijn onder de Wegener-sector van onder de horizon en stralen boven de Wegener-sector. Het begrip 'gezihtsstraal' is in deze theorie handig: een 'straal' vanuit het oog. Zo'n straal kan niet via de Wegener-sector in de warmtelaag komen vanwege de omkeerbaarheid van licht-

stralen. Het blijkt dat de Wegener-sector symmetrisch is rond de horizontale kijkrichting, waarbij hoek δ de kijkrichting bepaalt. Buiten de Wegener-sector is er dan de uittreerichting γ , ook gemeten rond de horizontale richting. In een zogeheten 'transitiediaagram' wordt γ uitgezet als functie van δ , waarbij op de horizontale as er voor de δ 's binnen de Wegener-sector geen uittreerichting bestaan. Voor enkele reële waarden voor het brekingsindexprofiel blijkt de Wegener-sector ongeveer het interval $-0,1^\circ < \delta < 0,1^\circ$ te zijn. De breedte van $0,2^\circ$ is kleiner dan de hoek waaronder we de zon zien (ongeveer $0,5^\circ$). Dit geeft dus een verklaring van een blinde strook over de zon bij zonsondergang. Het kan ook zijn dat de onderste zichtstraal van de Wegener-sector de aarde 'treft', Dan is er slechts sprake van een blinde zone.

Indien er ook nog onder spiegeling aan een dunne warme laag aan het aardoppervlak plaatsvindt, kunnen we zelfs delen van de zon in twee richtingen zien. Fata morgana's komen ook tot stand doordat stralen van achter de horizon via breking en/of kaatsing het oog bereiken. Bij meerdere brekingen staat het beeld afwisselend rechtop of omgekeerd, maar wordt steeds vervormd. Over het algemeen verlaten de gezichtsstralenbundels de atmosfeer niet, zodat alleen fa-

ta morgana's van voorwerpen achter de horizon dicht bij de aarde gezien kunnen worden. In heel bijzondere gevallen kunnen gezichtsstralen net buiten een Wegener-sector de atmosfeer wel verlaten en zo aanleiding geven tot een hemels fata morgana.

In het vervolg van hoofdstuk 3 beschrijft Broer modellen (ontwikkeld door Floris Takens, 1940–2010, hoogleraar wiskunde aan de RUG) met acht of negen lagen om een realistischer model door te rekenen. Daarin komt ook de groene flits aan de orde, ook al uitgebreid beschreven door Minnaert. Doordat blauw/violet licht flink verstrooid wordt in de atmosfeer, zien we van de ondergaande zon voornamelijk rode en groene stralen. De groene worden meer gebogen vanwege hun grotere brekingsindex en bereiken de waarnemer nog net wanneer de rode stralen dat niet meer kunnen, zo een laatste groene flits veroorzakend, die veelal maar enkele seconden duurt. Ten slotte wordt aan het eind van hoofdstuk 3 het continue geval van de ronde aarde geanalyseerd, op basis waarvan met behulp van de behoudswet $C = rn(r)\sin\alpha$ de Wegenersectoren worden berekend. Op basis van een niet-rotatiesymmetrisch brekingsindexprofiel kan dan het bijzondere effect van de waargenomen schijnbare conjunctie van de Maan en Jupiter over een bergrug heen, tijdens de



Figuur 1 Kwalitatieve verklaring voor een blinde strook in de zon in een model met één warme laag, die van onder begrensd wordt door een cirkel ter hoogte H . De waarnemer W kijkt ruwweg in de horizontale kijkrichting. Door de overgang tussen breking en weerkaatsing ontstaat een zogenaamde Wegener-sector, waarbinnen W alleen lichtstralen bereiken van onder de horizon. Dit kan aanleiding geven tot een blinde strook in de ondergaande zon.



Alfred Wegener (1880–1930)



Marcel Minnaert (1893–1970)

overwintering op Nova Zembla van 1596/97, beschreven en verklaard worden.

Hoofdstuk 4, 'De brachistochroon als lichtstraal', gebruikt het principe van Fermat, inhoudende dat de baan van een lichtstraal die is volgens welke in de kortste tijd van A naar B gegaan wordt, voor de bepaling van de brachistochroon: langs welke gekromde metalen draad glijdt onder invloed van de zwaartekracht een kraal wrijvingsloos van A naar B . De snelheid van de lichtstraal is gerelateerd aan de brekingsindex in de luchtlagen, die van de kraal aan de wet van behoud van mechanische energie in het zwaartekrachtveld. Het probleem van de brachistochroon speelde een rol in de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening aan het einde van de zeventiende eeuw en werd geformuleerd en opgelost door Johann Bernoulli, van 1695 tot 1705 hoogleraar in Gronin-

gen. De brachistochroon blijkt een cycloïde te zijn (de beweging van een ventiel van een fietsband), die met behulp van een parametrisering afgeleid wordt uit de behoudswetten $S = n(y)\sin\alpha$ en die voor de mechanische energie $M = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$.

Hoofdstuk 5, 'De cycloïde als isochrone en tautochrone kromme', beschrijft eerst enkele voorbeelden van de harmonische oscillator (periode onafhankelijk van de amplitude) en de gewone slinger als anharmonische oscillator. De harmonische oscillator is isochroon, de periode is onafhankelijk van de amplitude. Voor de cycloïde wordt voor de parameter s , de afstand langs de curve vanaf zeker punt, de vergelijking van de harmonische oscillator afgeleid. De beweging van een kraal langs een cycloïdale metalen draad is dus isochroon. Daaruit volgt dat de beweging van deze kraal ook tautochroon is: vanaf een willekeurige hoogte arriveert de kraal in steeds dezelfde tijd in het onderste punt.

In een historisch uitstapje wordt Huygens' oplossing om van de anharmonische gewone slinger een isochrone slinger te maken uit de doeken gedaan. De door Huygens bedachte 'wangen' aan de bovenkant van de slinger maken de slinger isochroon. De wangen hebben ook de cycloïdale vorm, waarbij de wangen de evoluit zijn van de kromme waarlangs het slingergewicht beweegt.

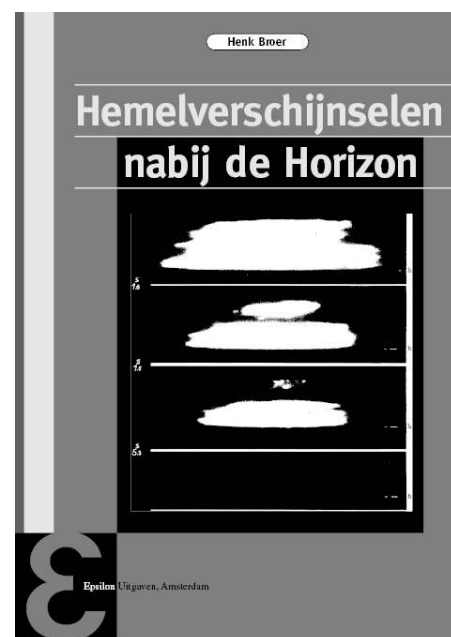
Lichtstralen als geodeten

In deel II wordt de achterliggende theorie van de optische verschijnselen vanuit een wiskundig hoger standpunt bekeken. Voor de hoofdstukken in dit deel is bij de lezer kennis en inzicht nodig van de vergelijkingen van Euler-Lagrange en Hamilton-Jacobi, die via variatierekening en de Legendre-transformatie af te leiden zijn. Voor velen die geen masters natuurkunde op zak hebben, geven de meerdere keren door Broer aangehaalde *Feynman Lectures on Physics* een eerste begrijpelijke en prachtige inleiding op de variatierekening (deel II, hoofdstuk 19).

In de hoofdstukken 6, 'Principes van Fermat en Hamilton', en 7, 'Nogmaals de brachistochronen', worden op basis van een bij het probleem van de lichtstralen gekozen Langrangiaan (en vervolgens de Hamiltoniaan) opnieuw voor de platte en de ronde aarde de al eerder verschenen behoudswetten langs de lichtstralen afgeleid. Zo verschijnen opnieuw de wet van Hero-Snellius en de cycloïde van de brachistochroon ten tonele. Ten slotte komen in hoofdstuk 8 lichtstralen aan de orde als geodeten op omwentelingsoppervlakken.

Slotopmerkingen

Het boek is volgens de Epsilon-website geschreven voor leerlingen, studenten en anderen met belangstelling voor wiskunde en optica, met ingangsniveau vwo. Ik zou daar zeker aan willen toevoegen docenten wis- en natuurkunde van het vwo en de lerarenopleidingen. Het boek kan zeker een bron zijn voor profielwerkstukken over optische verschijnselen in de hoogste klassen van het vwo, hoewel deel II voor deze leerlingen te hoog gegrepen is. In het hbo en op de universiteit kunnen studenten en docenten ook inspiratie opdoen voor scripties of kleine onderzoeken over diverse optische onderwerpen. In het bijzonder zullen dan de vele bibliografische verwijzingen van pas kunnen komen. De bibliografie is een brede verzameling, van wetenschapshistorische werken tot klassiekers (boeken en artikelen) over wis- en natuurkunde, van de *Elementen* van Euclides en de *Feynman Lectures* tot het wiskundetijdschrift voor jongeren *Pythagoras*. Ook het scholium (samenvatting/nadere uitleg/verwijzingen) aan het einde van elk hoofdstuk zal voor iemand die verder wil een *mer à boire* voor nader onderzoek zijn. Hetzelfde geldt voor de vele opmerkingen, die vrijwel op elke bladzijde te vinden zijn. Overigens leiden deze opmerkingen wel eens af van het doorlopende verhaal. Wellicht ware een plaatsing als noot onder aan de bladzijde of aan het einde van het hoofdstuk te overwegen.



Henk Broer, *Hemelverschijnselen nabij de horizon*, Epsilon Uitgaven, deel 77, Amsterdam, 2013, 152 p., ISBN 9789050411363, prijs € 22,00.